# Le curve differenziabili

## (Appunti per il corso di geometria III)

**Vincenzo Ancona**

## 1. Curve differenziabili.

**Definizione 1.1.** *Una curva differenziabile regolare e' un'applicazione*

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) : J \to \mathbf{R}^3$$

*ove $J$ e' un intervallo di $\mathbf{R}$, e $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$ sono funzioni differenziabili che soddisfano le seguenti proprieta':*

*1) il vettore*

$$(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)) \tag{1.1}$$

*e' diverso dal vettore nullo $(0, 0, 0)$ per ogni $t \in J$;*

*2) l'applicazione $\alpha$ e' iniettiva, con la sola possibile eccezione $J = [a, b]$ e $\alpha(a) = \alpha(b)$.*

Per abuso di linguaggio chiameremo curva (differenziabile regolare) l'insieme $C = \alpha(J) \subset \mathbf{R}^3$ immagine dell'applicazione $\alpha$. Inoltre ammetteremo applicazioni $\alpha$ per cui il vettore (1.1) e' $\neq (0, 0, 0)$ tranne eventualmente in un numero finito di punti di $J$; in tal caso i punti ove il vettore e' nullo saranno detti *singolari*, quelli in cui e' non nullo *regolari*, e sara' inteso che ci interesseremo solo ai punti regolari.

Per semplicita' parleremo di curve invece che di curve differenziabili. Inoltre scriveremo in breve le equazioni di una curva $C$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1.2}$$

o anche, in forma vettoriale:

$$P = P(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \tag{1.3}$$

La proprieta' (1.1) della definizione si puo' scrivere come segue: il vettore

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

e' diverso dal vettore nullo per ogni $t \in J$.
Le equazioni (1.2) o equivalentemente l'applicazione $\alpha$ si dicono **una parametrizzazione** della curva, e $t$ viene detto parametro. Un **cambiamento di parametro** (o di parametrizzazione), consiste in un'applicazione differenziabile $\phi : J' \to J$ ove $J'$ e' un altro intervallo di $\mathbf{R}$ tale che la composizione $\alpha \circ \phi : J' \to \mathbf{R}^3$ soddisfi ancora le proprieta' 1) e 2) della definizione 1.1. Se $\phi = \phi(u)$, la parametrizzazione $\alpha \circ \phi$ e' ammissibile se e solo se $\phi$ ammette un'inversa differenziabile, e quindi se e solo se la derivata $\phi'(u)$ e' diversa da zero per ogni $u \in J'$. In particolare avremo

$$\phi'(u) > 0, u \in J' \tag{1.4}$$

oppure

$$\phi'(u) < 0, u \in J' \tag{1.5}$$

Nel primo caso diremo che la nuova parametrizzazione ha lo stesso verso, nel secondo che ha verso opposto rispetto alla parametrizzazione originale.

Si dice **curva piana** una curva tale che $C = \alpha(J)$ e' contenuta in un piano. Si puo' in tal caso supporre che il piano sia il piano $(x, y)$ e dunque una curva definita dalle equazioni (1.2) e' piana se $z(t) \equiv 0$. Nel seguito dunque una curva piana sara' descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{1.6}$$

e i punti regolari dalla condizione $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$.

*Nello studio di una curva saremo interessati prevalentemente alle proprieta' invarianti per cambiamenti di parametrizzazione.*

**Esempi di curve.** *La retta per un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ parallela a un vettore non nullo di componenti $(l, m, n)$ ha equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \qquad t \in \mathbf{R} \\ z = z_0 + nt \end{cases} \tag{1.7}$$

*e il vettore $(x'(t), y'(t), z'(t)) = (l, m, n)$ e' non nullo.*

*2) Un cerchio $C$ del piano $(x, y)$, di centro l'origine $O$ e raggio $r$ ha equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi] \tag{1.8}$$

*e $(x'(t), y'(t)) = (-r\sin t, r\cos t)$ non e' mai nullo.*

3) *L'esempio precedente suggerisce equazioni parametriche per un ellisse del piano $(x,y)$ di equazione cartesiana $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ :*

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi] \tag{1.9}$$

*per uno dei due rami dell' iperbole di equazione cartesiana $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ :*

$$\begin{cases} x = a\cosh t \\ \\ z = b\sinh t \end{cases} \qquad t\in\mathbf{R} \tag{1.10}$$

*(per l'altro ramo si cambi $a\cosh t$ in $-a\cosh t$ nella prima equazione);*
*infine per una parabola $y=ax^2$ le equazioni parametriche sono*

$$\begin{cases} x = t \\ \\ y = at^2 \end{cases} \qquad t\in\mathbf{R} \tag{1.11}$$

4) *L' ultimo esempio e' un caso particolare di* **grafici di funzioni di una variabile***; infatti il grafico di una funzione $y=f(x)$ ha equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = t \\ \\ y = f(t) \end{cases} \tag{1.12}$$

*ove $(x'(t),y'(t))=(1,f'(t))\neq(0,0)$*

5) *Si consideri una curva definita da un'equazione cartesiana:*

$$C=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : g(x,y)=0\}, \tag{1.13}$$

*ove $g$ e' una funzione differenziabile di 2 variabili. E' noto che se una delle due derivate parziali di $g$, per esempio $\frac{\partial g}{\partial y}$, e' diversa da zero in un punto $(x_0,y_0)\in C$, allora esiste una funzione differenziabile $f(x)$, definita nelle vicinanze del punto $x_0$, tale che (nelle vicinanze del punto $(x_0,y_0)$) l'equazione $g(x,y)=0$ e' verificata se e solo se $y=f(x)$. Pertanto, nelle vicinanze del punto $(x_0,y_0)$, $C$ e' una curva differenziabile regolare, di equazioni parametriche (1.12). Inoltre si ha l'identita'*

$$g(x,f(x))\equiv 0$$

*che, derivata rispetto $y$ da' $\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{df}{dx}\equiv 0$, da cui*

$$f'(x)=-\frac{\partial g}{\partial x}/\frac{\partial g}{\partial y} \tag{1.14}$$

6) *L'elica circolare retta e' definita da equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ \\ y = r\sin t \qquad t\in\mathbf{R} \\ \\ z = a\ t \end{cases} \tag{1.15}$$

*ove $r>0, a>0$ sono due costanti; l'elica e' contenuta nel cilindro circolare retto di asse l'asse $z$ e di base il cerchio del piano $(x,y)$ di equazioni $x^2+y^2=r^2$.*

## 2. Rette tangenti e vettori tangenti a una curva.

Sia $C$ una curva definita dalle equazioni (1.2) ovvero (1.3), e sia $P_0 = P(t_0)$ un punto regolare di $C$. Una **secante** di $C$ passante per $P_0$ e' una retta per $P_0$ e per un altro punto $P(t)$ di $C$.

**Proposizione 2.1.** *Al tendere di $t$ a $t_0$ la secante $P(t)P_0$ tende a una e una sola retta, che si dice retta tangente a $C$ in $P_0$.*

*Dimostrazione.* La secante $P(t)P_0$ e' la retta per $P_0 = P(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ parallela al vettore $P(t) - P_0$, le cui componenti sono $(x(t) - x_0, y(t) - y_0, z(t) - z_0)$, e quindi ha equazioni cartesiane

$$\frac{x - x_0}{x(t) - x_0} = \frac{y - y_0}{y(t) - y_0} = \frac{z - z_0}{z(t) - z_0} \tag{2.1}$$

sviluppiamo i denominatori in serie di Taylor al secondo ordine:

$$\begin{cases} x(t) - x_0 = x'(t_0)(t - t_0) + \gamma_1(t)(t - t_0)^2 \\ y(t) - y_0 = y'(t_0)(t - t_0) + \gamma_2(t)(t - t_0)^2 \\ z(t) - z_0 = z'(t_0)(t - t_0) + \gamma_3(t)(t - t_0)^2 \end{cases} \tag{2.2}$$

ove $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ sono funzioni differenziabili nell'intorno di $t_0$. Sostituendo nelle (2.1) e semplificando per $t - t_0$ si ottiene

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0) + \gamma_1(t)(t - t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0) + \gamma_2(t)(t - t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0) + \gamma_3(t)(t - t_0)}$$

Per $t \to t_0$ si ottiene dunque l'equazione

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)} \tag{2.3}$$

che individua univocamente la retta limite, che e' dunque la retta per $P_0$ parallela al vettore $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$, il quale e' appunto $\neq (0, 0, 0)$ per definizione di punto regolare.

Diremo **vettore tangente alla curva $C$ nel punto** $P_0$ un qualunque vettore parallelo alla retta tangente nel punto. Pertanto come conseguenza della dimostrazione precedente-abbiamo

**Proposizione 2.2.** *Il vettore*

$$\frac{dP}{dt}(t_0) = \frac{dx}{dt}(t_0)\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}(t_0)\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}(t_0)\mathbf{k}$$

*e' tangente alla curva $P = P(t)$ nel punto $P(t_0)$.*

Si noti che se si fa un cambiamento di parametro $t = \phi(u)$, si ottiene un altro vettore tangente

$$\frac{dP}{du}(u_0) = \frac{dP}{dt}(t_0)\phi'(u_0)$$

che e' (ovviamente) parallelo al precedente, ed ha lo stesso verso o verso contrario a seconda che $\phi'(u)$ e' positivo o negativo. Diremo che $\frac{dP}{dt}$ e' **il vettore tangente corrispondente al parametro** $t$.

**Esempi.** *Si consideri una curva piana grafico di una funzione $f(x)$, di equazioni parametriche (1.12). Si ottiene per la retta tangente in un punto $(x_0, y_0)$, $y_0 = f(x_0)$ l'equazione $x - x_0 = (y - y_0)/f'(x_0)$ ovvero la ben nota equazione*

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

*Se $C$ e' una curva piana definita da un'equazione cartesiana (1.13), tenuto conto della (1.14) si ottiene per la tangente nel punto $(x_0, y_0) \in C$ l'equazione*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

## 3. Lunghezza di un arco di curva e ascissa curvilinea.

Sia $C$ una curva di equazioni (1.2), fissiamo su di essa due punti $P_0 = P(t_0)$ e $P = P(t)$, $t_0 < t$, e indichiamo con $C_t$ l'arco di curva compreso fra $P_0$ e $P$. Si consideri una suddivisione $\xi_0 = t_0 < \xi_1 \cdots < \xi_s = t$ dell'intervallo $[t_0, t]$; la poligonale $P(\xi_0)P(\xi_1)\cdots P(\xi_s)$ si dira' una **poligonale iscritta in** $C_t$.

**Definizione.** *Si dice lunghezza dell'arco $C_t$ l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali iscritte in esso.*

Si dimostra che tale estremo superiore esiste finito. Per il calcolo della lunghezza di un arco ci affideremo a un metodo euristico. A tal proposito identifichiamo un elemento infinitesimo $ds$ della lunghezza di $C_t$ con la lunghezza del vettore tangente infinitesimo $\|\frac{dP}{dt}\|dt$; quindi

$$\frac{ds}{dt} = \|\frac{dP}{dt}\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \tag{3.1}$$

per cui la lunghezza $s$ dell'arco compreso fra $P(t_0)$ e $P(t)$ e' dato dalla formula

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \tag{3.2}$$

Fissato il punto $P_0 = P(t_0)$, risulta chiaro che ogni punto $P(t)$ di $C$ con $t \geq t_0$ e' individuato dalla lunghezza dell'arco di curva compreso fra $P_0$ e $P(t)$; la funzione $s = s(t)$ data dalla (3.2) e' differenziabile, biiettiva, $\frac{ds}{dt} > 0$. Quindi la funzione $s(t)$ e' invertibile, e la sua inversa $t = t(s)$ e' anch'essa differenziabile e invertibile, con derivata prima strettamente positiva. Pertanto la $t = t(s)$ da' una nuova parametrizzazione di $C$ (piu' precisamente: della parte di di $C$ definita da $t \geq t_0$) equiversa con la precedente. Il nuovo parametro $s$ si dice **ascissa curvilinea** di origine $P_0$. Le nuove equazioni parametriche di $C$ sono dunque espresse dalla $P = P(t(s))$, che per abuso di notazione scriveremo $P = P(s)$.

Si noti che il calcolo esplicito della funzione $t = t(s)$ e' il piu' delle volte proibitivo, ma in compenso la sua derivata $\frac{dt}{ds}$ e' data dalla formula

$$\frac{dt}{ds} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} = \frac{1}{\|\frac{dP}{dt}\|}. \tag{3.3}$$

**Osservazioni 3.1.**

1) *L'ascissa curvilinea non e' parametro fra i tanti; e' un parametro intrinseco, essendo legato alla geometria della curva.*
2) *Se si sceglie come origine un altro punto invece che $P_0$, la nuova ascissa curvilinea si altera solo per l'aggiunta di una costante.*
3) *E' possibile estendere la parametrizzazione con l'ascissa curvilinea anche ai punti $P(t)$ di $C$ con $t < t_0$, semplicemente definendo $s(P)$ come l'opposta della lunghezza dell'arco $\widehat{P(t)P_0}$. Si noti che la formula (3.3) resta valida.*
4) *Si osservi infine che il parametro $s$ e' equiverso con il parametro di partenza $t$; se si parte da un altro parametro $u$ che abbia verso opposto rispetto a $t$, si ottiene un'ascissa curvilinea che (a meno di una costante additiva) coincide con $-s$.*

Calcoliamo il vettore tangente corrispondente alla parametrizzazione con l'ascissa curvilinea. Tenuto conto della (3.1) si ha:

$$\frac{dP}{ds} = \frac{dP}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\frac{dP}{dt}}{\|\frac{dP}{dt}\|}$$

da cui

$$\|\frac{dP}{ds}\| = 1$$

vale a dire: **in ogni punto, il vettore tangente corrispondente all'ascissa curvilinea e' un versore.** Si noti che e' vero il viceversa: se per ogni valore del parametro $t$ si ha $\|\frac{dP}{dt}\| = 1$, dalla (3.1) segue $\frac{ds}{dt} \equiv 1$ e quindi (a meno di una costante additiva) $t$ e $s$ coincidono.

Indicheremo con $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s)$ il versore tangente in un punto di ascissa curvilinea $s$. Dunque per definizione

$$\mathbf{t}(s) = \frac{dP}{ds}(s) \tag{3.4}$$

In base all'osservazione 3.1, 4), il versore tangente $\mathbf{t}(s)$ e' definito a meno del segno.

## 4. Versore normale e curvatura.

Si consideri una curva $C$ parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Il versore tangente $\mathbf{t}(s)$ ha ovviamente lunghezza unitaria in ogni punto della curva, pertanto si puo' scrivere

$$\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) \equiv 1$$

L 'identita' precedente puo' essere derivata rispetto a $s$, ottenendo $2\mathbf{t}(s) \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) \equiv 0$ cioe' il vettore $\frac{d\mathbf{t}}{ds}(s)$ e' ortogonale a $\mathbf{t}(s)$ in ogni punto. Quanto sopra giustifica la seguente

**Definizione 4.1.** *Sia $P = P(s)$ un punto di $C$ tale che $\frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) \neq 0$. Diremo* **vettore normale a** *$C$ in $P$ il versore $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$ del vettore $\frac{d\mathbf{t}}{ds}(s)$. Si avra' dunque per definizione*

$$\frac{d^2P}{ds^2}(s) = \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) = k(s)\mathbf{n}(s) \tag{4.1}$$

*ove $k(s)$ e' uno scalare positivo che si dice* **curvatura** *di $C$ nel punto $P$. Si ha*

$$k(s) = \|\frac{d^2P}{ds^2}(s)\| \tag{4.2}$$

**Osservazioni 4.2.**
1) *Il versore normale e' intrinsecamente definito. Infatti se si prende una parametrizzazione di $C$ opposta a quella considerata, a meno di una costante additiva $s$ si muta in $-s$, ma $\frac{d^2P}{ds^2}(s)$ non cambia di segno.*
2) *In un punto $P(s)$ ove $\frac{d^2P}{ds^2}(s) = 0$ il versore normale non e' definito. In questo caso definiremo la curvatura con $k(s) = 0$. Con questa convenzione la curvatura $k(s)$ e' $\geq 0$.*
3) *Nel caso di una curva piana il vettore normale e' uno dei due versori normali al versore tangente e contenuti nel piano.*

Si verifica facilmente che la curvatura di una retta (di equazioni (1.7)) e' identicamente nulla. Viceversa **se la curvatura di una curva $C$ e' identicamente nulla, $C$ e' contenuta in una retta**. Infatti l'ipotesi significa $\frac{d^2P}{ds^2}(s) \equiv 0$, da cui si ottiene, integrando due volte: $P(s) = s\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ ove $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ sono due vettori costanti; quindi $C$ e' (un intervallo di) una retta.

**Esercizio 4.3.** *Si provi che la curvatura di un cerchio di raggio $r$ e' identicamente $1/r$.*

L'esercizio giustifica la definizione di **raggio di curvatura in un punto di $C$ : e'** $r(s) = 1/k(s)$, l'inverso della curvatura. Dunque il raggio di curvatura di una retta e' infinito, di un cerchio e' uguale al raggio.

Nel caso delle curve piane, la conoscenza della curvatura, cioe' della funzione non negativa $k(s)$ individua la curva $C$, a meno di movimenti del piano stesso. Precisamente vale il seguente

**Teorema fondamentale delle curve piane.** *Sia $C$ una curva piana.*

1) *(Invarianza della curvatura per movimenti) Sia $T$ un movimento del piano. La curva $C$ e la sua trasformata $T(C)$ hanno curvature uguali in punti corrispondenti.*
2) *(Unicita'). Siano $C_1$ e $C_2$ due curve contenute in un piano, le cui ascisse curviline siano definite nello stesso intervallo $(a,b)$, e siano $k_1(s)$ e $k_2(s)$ le corrispondenti curvature. Se per ogni $s \in (a,b)$ si ha $k_1(s) = k_2(s)$, esiste un movimento $T$ del piano tale che $T(C_1) = C_2$*
3) *(Esistenza). Sia $f = f(s) : (a,b) \to \mathbf{R}$ una funzione continua non negativa. Esiste una curva $C$ la cui ascissa curvilinea e' definita in $(a,b)$ e la cui curvatura in ogni punto $P(s)$ e' $k(s) = f(s)$.*

Dimostreremo solo la 3). Sia $P = P(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$ l'equazione vettoriale (da determinare) della curva cercata. Il vettore $\frac{dP}{ds}(s)$ e' il versore tangente; detto $\theta(s)$ l'angolo che esso forma con l'asse delle $x$ si avra'

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds}(s) = \cos\theta(s) \\ \frac{dy}{ds}(s) = \sin\theta(s) \end{cases} \tag{4.3}$$

derivando si ottiene

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} = -\sin\theta(s)\frac{d\theta}{ds}(s) \\ \frac{d^2y}{ds^2} = \cos\theta(s)\frac{d\theta}{ds}(s) \end{cases}$$

L'equazione (4.2) da' $f(s) = \|\frac{d\theta}{ds}(s)\|$. Possiamo supporre per semplicita' (salvo a cambiare $s$ in $-s$) che $\frac{d\theta}{ds}(s) \geq 0$, dunque $f(s) = \frac{d\theta}{ds}(s)$ e quindi

$$\theta(s) = \int f(s)ds + \theta_0$$

ove $\theta_0$ e' una costante. Le (4.3) danno allora per integrazione

$$\begin{cases} x(s) = \int \cos(\int f(s)ds + \theta_0)ds + c_1 \\ y(s) = \int \sin(\int f(s)ds + \theta_0)ds + c_2 \end{cases} \tag{4.4}$$

ove $c_1$ e $c_2$ sono ulteriori costanti. Le (4.4) (con un'arbitraria scelta delle costanti) danno dunque le equazioni di una curva avente la prescritta curvatura.

Sia $P_0 = P(s_0)$ un punto di $C$; si dice **piano secante** di $C$ passante per $P_0$ un piano contenente la retta tangente a $C$ per $P_0$ e passante per un altro punto $P(s)$ di $C$.

**Proposizione 4.4.** *Si supponga che $\frac{d^2P}{ds^2}(s_0) \neq 0$. Al tendere di $P(s)$ a $P_0$ il piano secante per $P(s)$ tende a uno e un solo piano, che si dice piano osculatore a $C$ in $P_0$.*

*Dimostrazione.* Il piano secante e' il piano per per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ parallelo al vettore tangente $\frac{dP}{ds}(s_0)$ e al vettore $P(s) - P_0$, dunque le sue equazioni sono

$$\det\begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(s_0) & y'(s_0) & z'(s_0) \\ x(s) - x_0 & y(s) - y_0 & z(s) - z_0 \end{bmatrix} = 0 \tag{4.5}$$

sviluppiamo gli elementi della terza riga in serie di Taylor al terzo ordine:

$$\begin{cases} x(s)-x_0 = x'(s_0)(s-s_0)+\frac{1}{2}x''(s_0)(s-s_0)^2+\gamma_1(s)(s-s_0)^3 \\ y(s)-y_0 = y'(s_0)(s-s_0)+\frac{1}{2}y''(s_0)(s-s_0)^2+\gamma_2(s)(s-s_0)^3 \\ z(s)-z_0 = z'(s_0)(s-s_0)+\frac{1}{2}z''(s_0)(s-s_0)^2+\gamma_3(s)(s-s_0)^3 \end{cases}$$

ove $\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)$ sono funzioni differenziabili nell'intorno di $s_0$. Sostituendo nella (4.5) e sviluppando, l'equazione diventa:

$$(s-s_0)\det\begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(s_0) & y'(s_0) & z'(s_0) \\ x'(s_0) & y'(s_0) & z'(s_0) \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(s-s_0)^2\det\begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(s_0) & y'(s_0) & z'(s_0) \\ x''(s_0) & y''(s_0) & z''(s_0) \end{bmatrix} +$$

$$+(s-s_0)^3\det\begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(s_0) & y'(s_0) & z'(s_0) \\ \gamma_1(s) & \gamma_2(s) & \gamma_3(s) \end{bmatrix} = 0$$

Il primo dei determinanti e' identicamente nullo, avendo due righe uguali. Eliminandolo dalla scrittura precedente, e semplificando per $(s-s_0)^2$ rimane

$$\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(s_0) & y'(s_0) & z'(s_0) \\ x''(s_0) & y''(s_0) & z''(s_0) \end{bmatrix} + (s-s_0)\det\begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(s_0) & y'(s_0) & z'(s_0) \\ \gamma_1(s) & \gamma_2(s) & \gamma_3(s) \end{bmatrix} = 0$$

che per $s \to s_0$ diventa infine

$$\det\begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(s_0) & y'(s_0) & z'(s_0) \\ x''(s_0) & y''(s_0) & z''(s_0) \end{bmatrix} = 0 \tag{4.6}$$

che e' l'equazione del piano cercato.

L'equazione precedente ci dice che il piano osculatore in $P_0$ e' il piano per $P_0$ parallelo ai vettori $\frac{dP}{ds}(s_0)$ e $\frac{d^2P}{ds^2}(s_0)$, quindi, tenuto conto della (4.1), e' il piano parallelo al versore tangente e al versore normale in $P_0$. Si puo' ulteriormente osservare che se si usa un parametro qualunque $t$ invece del parametro $s$, l'equazione del piano osculatore si esprime ancora nella forma

$$\det\begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{bmatrix} = 0 \tag{4.7}$$

ove stavolta le derivate si intendono fatte rispetto alla variabile $t$. Per vederlo, basta provare che **il vettore $\frac{d^2P}{dt^2}(t_0)$ e' parallelo al piano osculatore**, il che discende dalla formula

$$\frac{d^2P}{dt^2}(t_0) = \frac{d^2P}{ds^2}(s_0)\left(\frac{ds}{dt}(s_0)\right)^2 + \frac{dP}{ds}(s_0)\frac{d^2s}{dt^2}(s_0)$$

che mostra che il vettore in questione e' combinazione lineare del versore tangente e del versore normale.

Si osservi che nel caso che $C$ sia la traiettoria del moto di un punto nello spazio, il che vuol dire semplicemente che il parametro $t$ e' il tempo, il vettore accelerazione al tempo $t_0$ e' il vettore $\frac{d^2P}{dt^2}(t_0)$ applicato in $P_0$; da quanto precede segue: **il vettore accelerazione e' contenuto, punto per punto, nel piano osculatore alla traiettoria**.

## 5. Le formule di Frenet.

Sia $C$ una curva di equazioni (riferite all'ascissa curvilinea) $P = P(s)$; consideriamo d'ora in poi solo punti regolari di $C$ in cui e' definito il vettore normale, cioe' con $\frac{d^2P}{ds^2}(s) \neq 0$. Nel punto $P = P(s)$ definiamo **versore binormale** il versore

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) \tag{5.1}$$

Si tratta di uno dei due versori ortogonali al piano osculatore a $C$ nel punto considerato.

La terna di versori $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$, per ogni $s$ fissato costituisce una base ortonormale per i vettori dello spazio, e si dice **terna mobile**, in quanto varia al variare del punto sulla curva. I vettori derivati

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}, \frac{d\mathbf{n}}{ds}, \frac{d\mathbf{b}}{ds}$$

misurano la rapidita' di variazione della terna mobile lungo la curva, e danno dunque informazioni sulla geometria della curva stessa. Il teorema seguente, esprime esplicitamente le tre derivate nella base costituita dalla terna mobile.

**Teorema (formule di Frenet).** *Valgono le formule*

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) = & & k(s)\mathbf{n}(s) & & (1) \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = & -k(s)\mathbf{t}(s) & + & \tau(s)\mathbf{b}(s) & (2) \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) = & & -\tau(s)\mathbf{n}(s) & & (3) \end{cases} \tag{5.2}$$

*ove $\tau(s)$ e' uno scalare che si dice* **torsione** *della curva nel punto considerato.*

Per la dimostrazione, premettiamo che, essendo $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ una base ortonormale, dato un vettore qualunque $\mathbf{v}$ le sue componenti nella base sono i prodotti scalari $\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}(s)$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(s)$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}(s)$, rispettivamente.
La (1) e' la definizione di vettore normale (4.1). Per provare la (3) si considerino le due identita'

$$\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{b}(s) \equiv 1, \ \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{b}(s) \equiv 0$$

per derivazione rispetto a $s$ la prima da'

$$2\mathbf{b}(s) \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) \equiv 0$$

e la seconda

$$\mathbf{t}(s) \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) + \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) \cdot \mathbf{b}(s) \equiv 0$$

da cui tenuto conto della (1):

$$\mathbf{t}(s) \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) \equiv 0$$

Ne segue che $\frac{d\mathbf{b}}{ds}(s)$ e' ortogonale a $\mathbf{t}(s)$ e a $\mathbf{b}(s)$, quindi e' parallelo a $\mathbf{n}(s)$, da cui segue la (3) (convenzionalmente il coefficiente si indica con $-\tau(s)$). infine per provare la (2) utilizziamo le tre identita'

$$\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{n}(s) \equiv 1, \ \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}(s) \equiv 0, \ \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{b}(s) \equiv 0,$$

che per derivazione danno rispettivamente

$$2\mathbf{n}(s) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) \equiv 0$$

$$\mathbf{t}(s) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) + \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = \mathbf{t}(s) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) + k(s) \equiv 0$$

(si e' tenuto conto della (1)) e infine

$$\mathbf{n}(s) \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) + \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) \cdot \mathbf{b}(s) = -\tau(s) + \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) \cdot \mathbf{b}(s) \equiv 0$$

(si e' tenuto conto della (3)). Da cio' e dall'osservazione preliminare segue la (2).

**Proposizione 5.1.** *La torsione di una curva $C$ e' identicamente nulla se e solo se $C$ e' una curva piana.*

Per una curva piana il vettore binormale $\mathbf{b}(s)$ e' costante, pertanto $\frac{d\mathbf{b}}{ds}(s)$ e quindi la torsione sono identicamente zero. Viceversa se $\tau(s)$ e' identicamente nulla, la (5.2), (3) implica che $\mathbf{b}(s)$ e' costante $= \mathbf{b}_0$. Se $P_0 = P(s_0)$ e' un punto di $C$, si ha

$$\frac{d}{ds}[(P(s) - P_0) \cdot \mathbf{b}_0] = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b}_0 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} \equiv 0$$

e quindi $(P(s) - P_0) \cdot \mathbf{b}_0$ e' costante rispetto a $s$, e la costante e' 0 perche' $P(s_0) = P_0$; dunque $(P(s) - P_0) \cdot \mathbf{b}_0 = 0$ e cioe' tutti i punti $P(s)$ della curva stanno sul piano per $P_0$ ortogonale a $\mathbf{b}_0$.

La curvatura e la torsione determinano univocamente la curva. Precisamente si puo' dimostrare il

**Teorema fondamentale delle curve nello spazio.** *Sia $C$ una curva.*

1) *(Invarianza della curvatura e della torsione per movimenti) Sia $T$ un movimento dello spazio. La curva $C$ e la sua trasformata $T(C)$ hanno curvatura e torsione uguali in punti corrispondenti.*
2) *(Unicita') Siano $C_1$ e $C_2$ due curve le cui ascisse curviline siano definite nello stesso intervallo $(a, b)$, e siano $k_1(s)$, $k_2(s)$ le corrispondenti curvature, e $\tau_1(s)$, $\tau_2(s)$ le corrispondenti torsioni. Se per ogni $s \in (a, b)$ si ha $k_1(s) = k_2(s)$ e $\tau_1(s) = \tau_2(s)$, esiste un movimento $T$ dello spazio tale che $T(C_1) = C_2$*
3) *(Esistenza). Siano $f(s), g(s) : (a, b) \to \mathbf{R}$ due funzioni continue, e $f(s)$ sia supposta non negativa. Esiste una curva $C$ la cui ascissa curvilinea e' definita in $(a, b)$ e la cui curvatura in ogni punto $P(s)$ e' $k(s) = f(s)$ e la cui torsione e' $\tau(s) = g(s)$.*

Per concludere, diamo delle formule che permettono di calcolare tutti gli invarianti di una curva in termini di una parametrizzazione qualunque.

**Proposizione 5.2.** *Sia $C$ una curva parametrizzata da un parametro $t$, e indichiamo con $'$, $''$ ... le derivate rispetto a $t$. Allora:*

1) $\mathbf{t} = \frac{P'}{\|P'\|}$
2) $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$
3) $\mathbf{b} = \frac{P' \wedge P''}{\|P' \wedge P''\|}$
4) $k = \frac{\|P' \wedge P''\|}{\|P'\|^3}$
5) $\tau = \frac{P' \wedge P'' \cdot P'''}{\|P' \wedge P''\|^2}$

*Dimostrazione.* La 1) e la 2) sono immediate.
Sia $v = \frac{ds}{dt}$. Si ha tenendo conto delle formule di Frenet:

$$P' = v\mathbf{t}, \quad P'' = v'\mathbf{t} + v^2 k\mathbf{n}$$

da cui

$$P' \wedge P'' = v^3 k\mathbf{b}$$

che da' subito la 4). Inoltre siccome $v > 0$, segue che $\mathbf{b}$ e' parallelo ed equiverso con $P' \wedge P''$ il che implica la 3). Infine calcoliamo $P' \wedge P'' \cdot P'''$; siccome $P' \wedge P''$ e' parallelo a $\mathbf{b}$, possiamo limitarci a calcolare la componente di $P'''$ lungo $\mathbf{b}$. Si ottiene (sempre grazie a Frenet):

$$P''' = v^3 k\tau\mathbf{b} + \cdots$$

e quindi

$$P' \wedge P'' \cdot P''' = (v^3 k)^2 \tau$$

che, tenuto conto della 4) da' la 5).

**Corollario 5.3.** *Se $C$ e' una curva piana di equazioni (1.6) la sua curvatura e' data dalla formula*

$$k = \frac{\|x'y'' - y'x''\|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$