Le superficie differenziabili

(Appunti per il corso di geometria III)

Vincenzo Ancona

1. Notazioni

Data una funzione di piu' variabili $f(x, y, \ldots)$ denoteremo spesso le derivate parziali con i simboli $f_x = \partial f/\partial x, f_y = \partial f/\partial y,\ f_{xx} = \partial^2 f/\partial x^2, f_{xy} = \partial^2 f/\partial x \partial y, \cdots$ e analogamente se $P = P(u, v, \ldots) = x(u, v, \ldots)\mathbf{i} + y(u, v, \ldots)\mathbf{j} + z(u, v, \ldots)\mathbf{k}$ e' un vettore dipendente dai parametri $(u, v, \ldots)$ porremo come d'uso $P_u = \partial P/\partial u, P_v = \partial P/\partial v,\ P_{uu} = \partial^2 P/\partial u^2 \cdots$

2. Superficie differenziabili.

Definizione 2.1. *Una superficie differenziabile e' un'applicazione*

$$P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : D \to \mathbf{R}^3$$

ove D e' un dominio di $\mathbf{R}^2$, e $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ sono funzioni differenziabili che soddisfano le seguenti proprieta':

1) la matrice Jacobiana

$$J(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

ha rango massimo in ogni punto (u, v) di D;

2) l'applicazione $P(u, v)$ e' genericamente iniettiva.

Per abuso di linguaggio chiameremo superficie (differenziabile regolare) l'insieme $S \subset \mathbf{R}^3$ immagine dell'applicazione $P(u, v)$. Inoltre ammetteremo applicazioni $P(u, v)$ per cui la matrice Jacobiana (2.1) ha rango massimo tranne eventualmente in un numero finito di punti di D; in tal caso i punti ove il rango non e' massimo saranno detti *singolari*, quelli in cui e' massimo *regolari*, e sara' inteso che ci interesseremo solo ai punti regolari.

Per semplicita' parleremo di superfici invece che di superfici differenziabili. Inoltre scriveremo in breve le equazioni di una superficie S

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \tag{2.2}$$

o anche, in forma vettoriale:

$$P = P(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}.$$

La proprieta' (2.1) della definizione equivale alla seguente: i vettori $P_u = P_u(u,v) = x_u(u,v)\mathbf{i} + y_u(u,v)\mathbf{j} + z_u(u,v)\mathbf{k}$ e $P_v = P_v(u,v) = x_v(u,v)\mathbf{i} + y_v(u,v)\mathbf{j} + z_v(u,v)\mathbf{k}$ sono linearmente indipendenti per ogni $(u,v) \in D$.

Le equazioni (2.2) o equivalentemente l'applicazione $P(u,v)$ si dicono **una parametrizzazione** della superficie, e u, v vengono detti parametri. Un **cambiamento (ammissibile) di parametrizzazione** consiste in un'applicazione differenziabile $\phi : D' \to D$ ove D' e' un dominio di $\mathbf{R}^2$ tale che la composizione $P \circ \phi : D' \to \mathbf{R}^3$ soddisfi ancora le proprieta' 1) e 2) della definizione 2.1.

Se $\phi(\xi,\eta) = (u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$, la parametrizzazione $P \circ \phi$ e' ammissibile se e solo se ϕ ammette un'inversa differenziabile, e quindi (per il teorema della funzione inversa) se e solo se la matrice Jacobiana

$$J(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,\eta) & \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi,\eta) & \frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta) \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

ha rango massimo in ogni punto (ξ,η) di D'.

Nello studio di una superficie saremo interessati prevalentemente alle proprieta' invarianti per cambiamenti di parametrizzazione.

Esempi di superficie.

1) *Il piano per un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ parallelo a due vettori indipendenti di componenti (l,m,n) e (l',m',n') ha equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = x_0 + lu + l'v \\ y = y_0 + mu + m'v \\ z = z_0 + nu + n'v \end{cases} \tag{2.4}$$

e la matrice Jacobiana e'

$$\begin{bmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

che ha rango massimo perche' i vettori riga sono indipendenti.

2) *Sia S una sfera di centro l'origine O e raggio r. Sia $P \equiv (x, y, z)$ un punto di S, e denotiamo con $Q \equiv (x, y)$ la sua proiezione sul piano (x, y). Sia v l'angolo orientato che l'asse delle x forma con la retta OQ e u l'angolo orientato che la retta OQ forma con la retta OP. Ne segue $\overline{OQ} = \overline{OP}\cos u = r\cos u$ e $z = \overline{OP}\sin u = r\sin u$. Inoltre $x = \overline{OQ}\cos v$, $y = \overline{OQ}\sin v$. In conclusione le equazioni parametriche della sfera sono*

$$\begin{cases} x = r\cos u\cos v \\ y = r\cos u\sin v \\ z = r\sin u \end{cases} \tag{2.6}$$

Si lascia al lettore di scrivere la corrispondente matrice jacobiana, in base alla quale si verifica che la parametrizzazione (2.6) e' regolare tranne che per $u = \pm\pi/2$, cioe' i due poli $N_1 \equiv (0, 0, 1)$ e $N_2 \equiv (0, 0, -1)$ sono punti singolari per la precedente parametrizzazione. E' pero' da osservare che si tratta di punti singolari apparenti, in quanto altre parametrizzazioni (ad esempio scambiando il ruolo dei tre assi) rendono regolari i punti N_1 e N_2.

3) *L'esempio precedente suggerisce equazioni parametriche per un ellissoide di equazione cartesiana $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$:*

$$\begin{cases} x = a\cos u\cos v \\ y = b\cos u\sin v \\ z = c\sin u \end{cases} \tag{2.7}$$

per un iperboloide a una falda di di equazione cartesiana $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$:

$$\begin{cases} x = a\cosh u\cos v \\ y = b\cosh u\sin v \\ z = c\sinh u \end{cases} \tag{2.8}$$

per un iperboloide a due falde di di equazione cartesiana $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$:

$$\begin{cases} x = a\cosh u\cosh v \\ y = b\cosh u\sinh v \\ z = c\sinh u \end{cases} \tag{2.9}$$

(questa parametrizzazione descrive solo una delle due componenti dell'iperboloide, quella contenuta nel semispazio $x > 0$; si ricordi infatti che il $\cosh$ e' sempre ≥ 1);

infine le equazioni parametriche di un paraboloide ellittico $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ *e di un paraboloide a sella* $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ *sono rispettivamente*

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \end{cases} \tag{2.10}$$

e

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \end{cases} \tag{2.11}$$

4) *Gli ultimi due esempi sono un caso particolare di* **grafici di funzioni di due variabili**; *infatti il grafico di una funzione* $z = f(x, y)$ *ha equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \tag{2.12}$$

e' facile calcolare la matrice jacobiana e verificare che tutti i punti sono regolari.

5) **Superficie di rotazione**. *Sono le superficie descritte da una curva regolare* C *(detta curva profilo) posta sul piano* (y, z)*, al ruotare di quest'ultimo intorno all'asse* z*. Se* $y = \alpha(u), z = \beta(u)$ *sono le equazioni parametriche di* C*, un punto* P *della superficie* S *si ottiene da uno e un solo punto* P_0 *di* C *al ruotare del piano* (y, z)*; detto* v *l'angolo di rotazione, si avra'* $x(P) = y(P_0) \cos v$*,* $y(P) = y(P_0) \sin v$*,* $z(P) = z(P_0)$*, pertanto le equazioni parametriche di* S *sono:*

$$\begin{cases} x = \alpha(u) \cos v \\ y = \alpha(u) \sin v \\ z = \beta(u) \end{cases} \tag{2.13}$$

in particolare se C *e' una retta parallela all'asse* z *di equazioni* $y = r, z = u$ *si ottengono le equazioni del cilindro circolare retto:*

$$\begin{cases} x = r \cos v \\ y = r \sin v \\ z = u \end{cases} \tag{2.14}$$

se C e' una retta per l'origine nel piano (y,z), non parallela ne' all'asse y ne' all'asse z, di equazioni $y = au, z = bu$ si ottiene un cono circolare retto di vertice l'origine:

$$\begin{cases} x = au\cos v \\ y = au\sin v \\ z = bu \end{cases} \tag{2.15}$$

infine se C e' un cerchio di raggio r contenuto nel semipiano $y > 0$ del piano (y,z), di centro il punto $(a,0)$, si ha $\alpha(u) = a + r\cos u, \beta(u) = r\sin u$, e la superficie di rotazione si chiama **toro**, *che ha dunque equazioni*

$$\begin{cases} x = (a + r\cos u)\cos v \\ y = (a + r\cos u)\sin v \\ z = r\sin u \end{cases} \tag{2.16}$$

si osservi che anche le equazioni (2.6) di una sfera si possono ottenere per rotazione di un semicerchio del piano (y,z), di centro il punto $(0,0)$ e contenuto nel semipiano $y \geq 0$.
Si osservi che la matrice jacobiana della parametrizzazione (2.13) e'

$$J = \begin{bmatrix} \alpha'(u)\cos v, & \alpha'(u)\sin v & \beta'(u) \\ -\alpha(u)\sin v & \alpha(u)\cos v & 0 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

e poiche' C e' una curva regolare, $(\alpha'(u), \beta'(u)) \neq (0,0)$ e dunque si vede facilmente che (u,v) individua un punto regolare tranne che nel caso $\alpha(u) = 0$; vale a dire che i punti singolari sono i punti d'intersezione della curva C con l'asse delle z. In particolare tutti i punti del cilindro e del toro sono regolari, mentre nel caso del cono l'unico punto singolare e' il vertice.

6) *Si consideri una superficie definita da un'equazione cartesiana:*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}, \tag{2.18}$$

ove g e' una funzione differenziabile di 3 variabili. E' noto che se una delle tre derivate parziali di g, per esempio $\frac{\partial g}{\partial z}$, e' diversa da zero in un punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$, allora esiste una funzione differenziabile $f(x,y)$, definita nelle vicinanze del punto (x_0, y_0), tale che (nelle vicinanze del punto (x_0, y_0, z_0)) l'equazione $g(x,y,z) = 0$ e' verificata se e solo se $z = f(x,y)$. Pertanto nelle vicinanze del punto (x_0, y_0, z_0) S e' una superficie differenziabile regolare, di equazioni parametriche (2.12). Inoltre si ha l'identita'

$$g(x, y, f(x,y)) \equiv 0$$

che, derivata rispetto a x e a y da' rispettivamente $\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0$, $\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$, da cui

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial x} \Big/ \frac{\partial g}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial y} \Big/ \frac{\partial g}{\partial z} \tag{2.19}$$

3. Vettori tangenti a una superficie.

Sia S una superficie definita dalle equazioni (2.2).

Definizione 3.1. *Una curva tracciata sulla superficie S e' una curva C nello spazio ottenuta come immagine tramite $P(u,v) : D \to \mathbf{R}^3$ di una curva differenziabile C_0 nel dominio D*

Precisamente se

$$\begin{cases} u = u(t) \\ \\ v = v(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

sono le equazioni della curva C_0 nel piano (u,v), le equazioni della curva C tracciata su S sono

$$\begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ \\ y = y(u(t), v(t)) \\ \\ z = z(u(t), v(t)) \end{cases}$$

ovvero, in forma vettoriale:

$$P = P(u(t), v(t)) \tag{3.2}$$

E' evidente che $C \subset S$.

Fissiamo un punto (regolare) $P_0 = P(u_0, v_0) \in S$. La curva C tracciata su S passa per P_0 se $u_0 = u(t_0), v_0 = v(t_0)$ per un opportuno t_0.

Definizione 3.2. *Un vettore* $\mathbf{v}$ *dello spazio si dice tangente a S in P_0 se esiste una curva C tracciata su S, e passante per P_0, tale che* $\mathbf{v}$ *e' tangente a C in P_0.*

Proposizione 3.3. *L'insieme dei vettori tangenti a una superficie S in un suo punto P_0 e' uno spazio vettoriale di dimensione 2, di cui i vettori $P_u(u_0,v_0)$ e $P_v(u_0,v_0)$ costituiscono una base. Tale spazio sara' denotato $T_{P_0}S$ e sara' detto* **spazio tangente** *a S in P_0.*

Bastera' provare che i vettori $P_u(u_0,v_0)$ e $P_v(u_0,v_0)$ sono linearmente indipendenti, e che un vettore e' tangente a S in P_0 se e solo se e' una loro combinazione lineare. Le componenti di $P_u(u_0,v_0)$ e $P_v(u_0,v_0)$ sono le righe della matrice Jacobiana (2.1) valutata nel punto (u_0,v_0), che ha rango massimo per definizione; quindi i due vettori sono linearmente indipendenti.

Sia $\mathbf{v}$ un vettore tangente a S in P_0. Per definizione esiste una curva C tracciata su S, di equazioni (3.1) che passa per P_0 (e cioe' $u_0 = u(t_0), v_0 = v(t_0)$ per un opportuno t_0), tale che $\mathbf{v}$ sia tangente a C in P_0. Ne segue

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}P(u(t), v(t))|_{t=t_0} = P_u(u_0,v_0)\frac{du}{dt}(t_0) + P_v(u_0,v_0)\frac{dv}{dt}(t_0) \tag{3.3}$$

cioe' $\mathbf{v}$ e' combinazione lineare di $P_u(u_0,v_0)$ e $P_v(u_0,v_0)$. Viceversa supposto che un vettore $\mathbf{v}$ sia combinazione lineare di $P_u(u_0,v_0)$ e $P_v(u_0,v_0)$:

$$\mathbf{v} = v_1 P_u(u_0,v_0) + v_2 P_v(u_0,v_0),$$

si deve trovare una curva C tracciata su S e passante per P_0, tale che $\mathbf{v}$ sia tangente a S in P_0. Cerco cioe' due funzioni differenziabili $u = u(t), v = v(t)$ tali che per un certo t_0

$$u(t_0) = u_0, v(t_0) = v_0, \frac{du}{dt}(t_0) = v_1, \frac{dv}{dt}(t_0) = v_2;$$

si puo' porre per esempio $u = v_1 t + u_0$, $v = v_2 t + v_0$, $t_0 = 0$.

Le curve definite da $u = costante$ e $v = costante$, prendono il nome di **linee coordinate** (corrispondenti alla parametrizzazione utilizzata); il vettore $P_u(u, v_0)$ e' tangente alla linea coordinata $v = costante = v_0$, il vettore $P_v(u_0, v)$ e' tangente alla linea coordinata $u = costante = u_0$.
Nel caso di una superficie di rotazione (2.13), le linee coordinate sono rispettivamente i paralleli e i meridiani.

Diremo **piano tangente** a S in P_0 il piano per P_0 parallelo a tutti i vettori tangenti a S in P_0. Dunque e' il piano per P_0 parallelo a $P_u(u_0, v_0)$ e $P_v(u_0, v_0)$, pertanto se $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, le sue equazioni sono

$$\det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{bmatrix} = 0 \tag{3.4}$$

Esempi. *Si consideri il grafico di una funzione $f(x, y)$, di equazioni parametriche (2.12). si ottiene per il piano tangente in un punto (x_0, y_0, z_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$ l'equazione*

$$\det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_u(u_0, v_0) \\ 0 & 1 & f_v(u_0, v_0) \end{bmatrix} = 0$$

da cui, sviluppando:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Se S e' definita implicitamente dall'equazione (2.18), tenuto conto delle (2.19) si ottiene per il piano tangente in un punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ l'equazione ben nota (almeno nel caso delle quadriche):

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Diremo **versore normale** a S in P_0, e lo indicheremo con $\mathbf{N} = \mathbf{N}(u_0, v_0)$, il versore del vettore $P_u(u_0, v_0) \wedge P_v(u_0, v_0)$. Quindi e' un versore ortogonale al piano tangente a S in P_0, pertanto la sua direzione e' intrinsecamente determinata dalla superficie, mentre il suo verso dipende dalla parametrizzazione scelta per descrivere la superficie (per esempio scambiando le variabili u e v, $\mathbf{N}$ cambia di segno). Dalla definizione segue

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \frac{P_u(u_0, v_0) \wedge P_v(u_0, v_0)}{\|P_u(u_0, v_0) \wedge P_v(u_0, v_0)\|} \tag{3.5}$$

4. Prima forma quadratica fondamentale.

Si consideri una curva C tracciata sulla superficie S, di equazioni (3.1) e calcoliamone l'ascissa curvilinea:

$$(\frac{ds}{dt})^2 = \frac{dP}{dt} \cdot \frac{dP}{dt} = (P_u \frac{du}{dt} + P_v \frac{dv}{dt}) \cdot (P_u \frac{du}{dt} + P_v \frac{dv}{dt}) =$$

$$= (P_u \cdot P_u)(\frac{du}{dt})^2 + 2(P_u \cdot P_v) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + (P_v \cdot P_v)(\frac{dv}{dt})^2$$

Poniamo

$$\begin{cases} E = E(u, v) = P_u \cdot P_u \\ F = F(u, v) = P_u \cdot P_v \\ G = G(u, v) = P_v \cdot P_v \end{cases} \tag{4.1}$$

E' chiaro che E, F, G sono funzioni che dipendono solo dalla superficie e non dalla curva C tracciata su di essa.

Ne segue

$$(\frac{ds}{dt})^2 = E(\frac{du}{dt})^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G(\frac{dv}{dt})^2 \tag{4.2}$$

Formalmente definiremo **prima forma quadratica fondamentale** (in breve 1^a **f.q.f.**) la forma quadratica

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

per cui la (4.2) puo' scriversi

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{4.3}$$

la quale deve intendersi come una scrittura formale la quale, 'divisa' per dt^2, da' la (4.2). La 1^a f.q.f. e' definita positiva a causa della (4.2), poiche' evidentemente $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ e' sempre strettamente positivo. La matrice della 1^a f.q.f. e' data da

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

il cui determinante e' dunque positivo:

$$EG - F^2 > 0. \tag{4.5}$$

Si noti che se $\mathbf{v} = v_1 P_u(u_0, v_0) + v_2 P_v(u_0, v_0)$ e $\mathbf{w} = w_1 P_u(u_0, v_0) + w_2 P_v(u_0, v_0)$ sono due vettori tangenti alla superficie S in un punto $P_0 = P(u_0, v_0)$, si ha $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v_1 P_u(u_0, v_0) + v_2 P_v(u_0, v_0)) \cdot (w_1 P_u(u_0, v_0) + w_2 P_v(u_0, v_0))$ e quindi

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = E(u_0, v_0) v_1 w_1 + F(u_0, v_0)(v_1 w_2 + v_2 w_1) + G(u_0, v_0) v_2 w_2 \tag{4.6}$$

vale a dire: **il prodotto scalare definito sullo spazio tangente $T_{P_0}S$ dalla 1^a f.q.f. coincide col prodotto scalare euclideo**.

Si osservi che dalla definizione (4.1) segue

Proposizione 4.1. *Si ha $F(u, v) = 0$ se e solo se le linee coordinate sono ortogonali nel punto $P(u, v)$.*

Ad esempio per una superficie di rotazione definita dalle equazioni (2.13), $F(u, v) \equiv 0$ in quanto paralleli e meridiani sono ortogonali.

5. Area di una superficie.

Si consideri una superficie di equazioni (2.2) definita in un dominio D del piano (u, v), e consideriamo una regione di D compresa fra le rette $u = u_0$, $u = u_1$, $v = v_0$, $v = v_1$. con $u_0 < u_1$, $v_0 < v_1$. Cerchiamo (euristicamente, vale a dire in forma intuitiva ma non rigorosa) una formula che esprima l'area della porzione di superficie descritta dalle diseguaglianze $u_0 \leq u \leq u_1$, $v_0 \leq v \leq v_1$.

A tal proposito identifichiamo un elemento infinitesimo $d\sigma$ dell' area di S con l'area del parallelogramma infinitesimo del piano tangente, di lati i vettori tangenti infinitesimi $P_u du$ e $P_v dv$. Tale area e' data dal modulo del prodotto esterno dei due vettori, dunque

$$d\sigma = \|P_u du \wedge P_v dv\| = \|P_u \wedge P_v\| du dv$$

L'area cercata e' dunque $A = \int_{u_0}^{u_1} \int_{v_0}^{v_1} \|P_u \wedge P_v\| dudv$

Calcoliamo ora $\|P_u \wedge P_v\|$. Si ricordi l'identita' vettoriale

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2$$

dalla quale in base alle (4.1) si ottiene

$$\|P_u \wedge P_v\|^2 = EG - F^2 \tag{5.1}$$

e quindi

$$A = \int_{u_0}^{u_1} \int_{v_0}^{v_1} \sqrt{EG - F^2}\, dudv \tag{5.2}$$

Per esempio, nel caso particolare di un grafico di equazioni (2.12), si (ri)trova la formula

$$A = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2}\, dxdy$$

Esercizio. *Si calcoli l'area della sfera, utilizzando le equazioni parametriche (2.6) e la formula (5.2).*

6. L'operatore di Weingarten.

Sia $\mathbf{v}$ un vettore tangente a S in P_0. Per definizione esiste una curva C tracciata su S, di equazioni

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

che passi per P_0 (e cioe' $u_0 = u(t_0), v_0 = v(t_0)$ per un opportuno t_0), tale che $\mathbf{v}$ sia tangente a C in P_0. La derivata

$$\frac{d}{dt}\mathbf{N}(u(t), v(t))|_{t=t_0} = \mathbf{N}_u(u_0, v_0)\frac{du}{dt}(t_0) + \mathbf{N}_v(u_0, v_0)\frac{dv}{dt}(t_0) \tag{6.1}$$

individua un vettore nello spazio che misura la rapidita' di variazione del vettore normale a S lungo la curva C (in prossimita' di P_0).

Se $\mathbf{v} = v_1 P_u + v_2 P_v$, si ha

$$\frac{du}{dt}(t_0) = v_1, \frac{dv}{dt}(t_0) = v_2$$

e quindi

$$\frac{d}{dt}\mathbf{N}(u(t), v(t))|_{t=t_0} = v_1\mathbf{N}_u(u_0, v_0) + v_2\mathbf{N}_v(u_0, v_0). \tag{6.2}$$

Ne segue

Proposizione 6.1.

1) *Se* $\mathbf{v} = v_1 P_u + v_2 P_v$, *si ha*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{N}(u(t), v(t))|_{t=t_0} = v_1 \mathbf{N}_u(u_0, v_0) + v_2 \mathbf{N}_v(u_0, v_0)(t_0)$$

e quindi il vettore (6.1) dipende solo da $\mathbf{v}$ *e non dalla scelta della particolare curva tangente a* $\mathbf{v}$ *in* P_0.

Porremo dunque per definizione

$$W_{P_0}(\mathbf{v}) = -\frac{d}{dt}\mathbf{N}(u(t), v(t))|_{t=t_0}$$

(*si noti il segno meno!*).

L'operatore W_{P_0} associa dunque a ogni vettore tangente $\mathbf{v} \in T_{P_0}S$ un vettore $W_{P_0}(\mathbf{v})$ dello spazio.

W_{P_0} si chiama **operatore di Weingarten** di S in P_0.

Proposizione 6.2.

1) *per ogni* $\mathbf{v} \in T_{P_0}S$, $W_{P_0}(\mathbf{v}) \in T_{P_0}S$, *cioe' l'operatore di Weingarten e' un'applicazione*

$$W_{P_0} : T_{P_0}S \to T_{P_0}S$$

2) W_{P_0} *e' lineare, quindi e' un endomorfismo di* $T_{P_0}S$.

Dimostrazione.

1) $P_u(u_0, v_0)$ e $P_v(u_0, v_0)$ sono una base di $T_{P_0}S$, onde basta provare che $W_{P_0}(P_u(u_0, v_0))$ e $W_{P_0}(P_v(u_0, v_0))$ sono tangenti a S. Per la formula (6.2) si ha $W_{P_0}(P_u(u_0, v_0)) = -\mathbf{N}_u(u_0, v_0)$, $W_{P_0}(P_v(u_0, v_0)) = -\mathbf{N}_v(u_0, v_0)$, dunque bisogna provare che $\mathbf{N}_u(u_0, v_0)$ e $\mathbf{N}_v(u_0, v_0)$ sono vettori tangenti a S. Utilizziamo l' identita'

$$\mathbf{N}(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) \equiv 1$$

che, derivata ripetto a u e v da' rispettivamente

$$\begin{cases} 2\mathbf{N}_u(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) \equiv 0 \\ 2\mathbf{N}_v(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) \equiv 0 \end{cases}$$

che ci dicono appunto che i due vettori $\mathbf{N}_u$ e $\mathbf{N}_v$ sono ortogonali a $\mathbf{N}$ e quindi sono tangenti a S.

2) La linearita' di W_{P_0} si ricava dalla formula (6.2).

Una proprieta' importante di W_{P_0} e' la seguente

Proposizione 6.3. *L'operatore di Weingarten e' simmetrico (cioe' autoaggiunto).*

Dimostrazione. Si tratta di provare che per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{P_0}S$ si ha

$$W_{P_0}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot W_{P_0}(\mathbf{w})$$

Grazie alla linearita' di W_{P_0}, sara' sufficiente provare l'eguaglianza nel caso $\mathbf{v} = P_u(u_0, v_0)$ e $\mathbf{w} = P_v(u_0, v_0)$. Tenuto conto che

$$\begin{cases} W_{P_0}(P_u(u_0, v_0)) = -\mathbf{N}_u(u_0, v_0) \\ W_{P_0}(P_v(u_0, v_0)) = -\mathbf{N}_v(u_0, v_0) \end{cases} \tag{6.3}$$

dovremo mostrare che

$$-\mathbf{N}_u(u_0, v_0) \cdot P_v(u_0, v_0) = -P_u(u_0, v_0) \cdot \mathbf{N}_v(u_0, v_0).$$

A tale scopo consideriamo le identita' (conseguenza del fatto che P_u e P_v sono ortogonali a $\mathbf{N}$) :

$$\begin{cases} P_u(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) \equiv 0 \\ P_v(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) \equiv 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

derivando la prima rispetto a v e la seconda rispetto a u si ottiene

$$\begin{cases} P_{uv}(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) + P_u(u, v) \cdot \mathbf{N}_v(u, v) \equiv 0 \\ P_{vu}(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) + P_v(u, v) \cdot \mathbf{N}_u(u, v) \equiv 0 \end{cases}$$

da cui

$$-P_u(u, v) \cdot \mathbf{N}_v(u, v) = P_{uv}(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) = -P_v(u, v) \cdot \mathbf{N}_u(u, v) \tag{6.5}$$

che e' esattamente l'eguaglianza desiderata.

Osserviamo a futura memoria che derivando la prima delle (6.4) rispetto a u e la seconda rispetto a v si ottengono anche le identita'

$$\begin{cases} P_{uu}(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) \equiv -P_u(u, v) \cdot \mathbf{N}_u(u, v) \\ P_{vv}(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) \equiv -P_v(u, v) \cdot \mathbf{N}_v(u, v) \end{cases} \tag{6.6}$$

che ci saranno utili in seguito.

Tenuto conto del teorema spettrale reale, possiamo enunciare la

Proposizione 6.4. *Esiste una base ortonormale $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ di $T_{P_0}S$ formata di autovettori di W_{P_0}; in particolare W_{P_0} e' diagonalizzabile e possiede due autovalori reali λ_1 e λ_2 (definiti da $W_{P_0}(\mathbf{v_1}) = \lambda_1 \mathbf{v_1}$, $W_{P_0}(\mathbf{v_2}) = \lambda_1 \mathbf{v_2}$).*

Osservazione 6.5. *Se si cambia la parametrizzazione della superficie S, l'operatore di Weingarten corrispondente alla nuova parametrizzazione coincide col precedente a meno del segno. Precisamente esso cambia di segno se cambia di segno il versore normale. Quindi l'operatore di Weingarten e' intrinsecamente definito, ma solo a meno del segno.*

7. Curvatura normale di una curva tracciata sulla superficie.

Sia P_0 un punto di S e C una curva tracciata su S e passante per P_0, di equazioni (parametrizzate dall'ascissa curvilinea)

$$\begin{cases} u = u(s) \\ v = v(s) \end{cases}$$

La curva possiede un vettore curvatura dato da

$$\frac{d^2P}{ds^2}(s_0) = k(s_0)\mathbf{n}$$

ove $\mathbf{n}$ e' il versore normale alla curva in P_0 e $k(s_0)$ e' la curvatura in P_0.

Definizione 7.1. *Si dice curvatura normale della curva C in P_0, e si denota con $k_n(C, P_0)$, la proiezione (con segno) del vettore curvatura $\frac{d^2P}{ds^2}(s_0)$ sul versore normale $\mathbf{N}(u_0, v_0)$ a S in P_0. Vale a dire*

$$k_n(C, P_0) = \frac{d^2P}{ds^2}(s_0) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0) = k(s_0)\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0) \tag{7.1}$$

Otteniamo successivamente:

$$\frac{dP}{ds} = P_u \frac{du}{ds} + P_v \frac{dv}{ds}$$

$$\frac{d^2P}{ds^2} = \frac{d}{ds}(\frac{dP}{ds}) = P_{uu}(\frac{du}{ds})^2 + P_u \frac{d^2u}{ds^2} + 2P_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + P_{vv}(\frac{dv}{ds})^2 + P_v \frac{d^2v}{ds^2}$$

da cui, tenuto conto che P_u e P_v sono ortogonali a $\mathbf{N}$, si ricava

$$k_n(C, P_0) = \frac{d^2P}{ds^2}(s_0) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0) = (P_{uu} \cdot \mathbf{N})(\frac{du}{ds})^2 + 2(P_{uv} \cdot \mathbf{N})\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + (P_{vv} \cdot \mathbf{N})(\frac{dv}{ds})^2$$

ove nell'ultimo membro abbiamo sottinteso che le varie quantita' sono calcolate nel punto P_0 (cosa che spesso faremo anche in seguito).

Poniamo:

$$\begin{cases} e = e(u, v) = P_{uu} \cdot \mathbf{N} \\ f = f(u, v) = P_{uv} \cdot \mathbf{N} \\ g = g(u, v) = P_{vv} \cdot \mathbf{N} \end{cases} \tag{7.2}$$

E' chiaro che e, f, g sono funzioni che dipendono solo dalla superficie e non dalla curva C tracciata su di essa. Ne segue

$$k_n(C, P_0) = e(\frac{du}{ds})^2 + 2f\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + g(\frac{dv}{ds})^2$$

Se nella descrizione della curva C si utilizza un qualsiasi parametro t in luogo di s, tenuto conto che

$$(\frac{ds}{dt})^2 = E(\frac{du}{dt})^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(\frac{dv}{dt})^2$$

otteniamo

$$k_n(C, P_0) = \frac{e(\frac{du}{dt})^2 + 2f\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + g(\frac{dv}{dt})^2}{E(\frac{du}{dt})^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(\frac{dv}{dt})^2} \tag{7.3}$$

Formalmente definiremo **seconda forma quadratica fondamentale** (in breve 2^a **f.q.f.**) la forma quadratica

$$e(du)^2 + 2fdudv + g(dv)^2$$

per cui la (7.3) diventa

$$k_n(C, P_0) = \frac{2^a f.q.f.}{1^a f.q.f.}$$

La formula (7.3) comporta

Proposizione 7.2. *La curvatura normale $k_n(C, P_0)$ di una curva dipende solo dal vettore tangente alla curva in P_0. In particolare due curve tracciate su S e tangenti fra di loro in P_0 hanno stessa curvatura normale in P_0.*

In effetti la formula (7.3) mette in evidenza che $k_n(C, P_0)$ dipende solo dai valori di $\frac{du}{dt}(t_0)$ e $\frac{dv}{dt}(t_0)$, che sono appunto le componenti del vettore tangente a C in P_0 (corrispondente alla parametrizzazione scelta) nella base $P_u(u_0, v_0)$ e $P_v(u_0, v_0)$.

In base alla proposizione potremo definire la **curvatura normale nella direzione di un vettore tangente non nullo** $\mathbf{v} \in T_{P_0}S$ con la formula

$$k_n(\mathbf{v}) = \frac{e{v_1}^2 + 2fv_1v_2 + g{v_2}^2}{E{v_1}^2 + 2Fv_1v_2 + G{v_2}^2} \tag{7.4}$$

Si osservi che se λ e' un numero reale non nullo si ha

$$k_n(\lambda\mathbf{v}) = k_n(\mathbf{v}) \tag{7.5}$$

Il seguente risultato mette in relazione curvatura normale e operatore di Weingarten:

Teorema 7.3.

1) Vale la formula

$$k_n(\mathbf{v}) = \frac{W_{P_0}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \tag{7.6}$$

2) Gli autovalori λ_1 e λ_2, di W_{P_0} sono un minimo e un massimo della curvatura normale, e inoltre $\lambda_1 = k_n(\mathbf{v_1})$, $\lambda_2 = k_n(\mathbf{v_2})$, ove $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ sono gli autovettori.

Dimostrazione.

1) Sia $\mathbf{v} = v_1 P_u + v_2 P_v$; siccome $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = E{v_1}^2 + 2Ev_1v_2 + G{v_2}^2$, bastera' provare l'eguaglianza

$$W_{P_0}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = e{v_1}^2 + 2fv_1v_2 + g{v_2}^2$$

Per la (6.3) e per linearita' si ha $W_{P_0}(\mathbf{v}) = -v_1\mathbf{N}_u - v_2\mathbf{N}_v$ da cui $W_{P_0}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = -(P_u \cdot \mathbf{N}_u){v_1}^2 - (P_u \cdot \mathbf{N}_v + P_v \cdot \mathbf{N}_u)v_1v_2 - (P_v \cdot \mathbf{N}_v){v_2}^2$. Tenuto conto delle formule (6.5), (6.6), (7.2) arriviamo appunto all'eguaglianza desiderata.

2) Dalla formula (7.6) segue facilmente che $k_n(\mathbf{v_1}) = W_{P_0}(\mathbf{v_1}) \cdot \mathbf{v_1} = \lambda_1 \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_1} = \lambda_1$; e analogamente $k_n(\mathbf{v_2}) = \lambda_2$. Possiamo ora supporre per esempio $\lambda_1 \leq \lambda_2$, e provare che λ_1 e' un minimo e λ_2 un massimo della curvatura normale. Cioe' si deve provare che per ogni vettore $\mathbf{v}$ tangente si ha $\lambda_1 \leq k_n(\mathbf{v}) \leq \lambda_2$. Per la (7.5) si puo' supporre $\|\mathbf{v}\| = 1$, quindi si ha $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2}$ con ${a_1}^2 + {a_2}^2 = 1$. Dalla (7.6) otteniamo $k_n(\mathbf{v}) = \lambda_1{a_1}^2 + \lambda_2{a_2}^2$ da cui appunto $\lambda_1 \leq k_n(\mathbf{v}) \leq \lambda_2$.

Definizione 7.4. *Il minimo e il massimo della curvatura normale in P_0 (gli autovalori di W_{P_0}) si dicono* **curvature principali** *di S in P_0 e si indicano con k_1 e k_2; le direzioni corrispondenti (parallele agli autovettori di W_{P_0}) si dicono* **direzioni principali** *di S in P_0.*

In base all'osservazione 6.5 se si cambia la parametrizzazione di S, k_1 e k_2 restano invariati oppure cambiano di segno; in quest'ultimo caso massimo e minimo si scambiano tra loro.

Un vettore tangente $\mathbf{v} \neq 0$ in P_0 individua una direzione principale se e solo se

$$W_{P_0}(\mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} = 0 \tag{7.7}$$

in effetti la precedente relazione significa esattamente che $W_{P_0}(\mathbf{v})$ e' parallelo a $\mathbf{v}$, e quindi che $\mathbf{v}$ e' un autovettore di W_{P_0}.

Definizione 7.5. *Si dice* **curvatura di Gauss (o gaussiana)** *di S in P_0 e si indica con $K = K(P_0)$ il determinante di W_{P_0}. Si dice* **curvatura media** *di S in P_0 e si indica con $H = H(P_0)$ la meta' della traccia di W_{P_0}. Quindi*

$$K = K(P_0) = det\ W_{P_0} = k_1k_2 \tag{7.8}$$

$$H = H(P_0) = \frac{1}{2}\ tr\ W_{P_0} = \frac{1}{2}\ (k_1 + k_2) \tag{7.9}$$

Si osservi che la curvatura di Gauss e' definita intrinsecamente, e il suo segno e' indipendente dalla parametrizzazione scelta per S; un cambiamento di parametrizzazione puo' cambiare il segno di k_1 e k_2, ma il prodotto non cambia. Invece la curvatura media e' definita a meno del segno.

8. Le formule di Weingarten.

Riprendiamo in considerazione l'operatore di Weingarten $W = W_{P_0} : T_{P_0}S \to T_{P_0}S$ in P_0 e calcoliamone la matrice associata nella base P_u, P_v. Cioe' posto

$$\begin{cases} W(P_u) = a_{11}P_u + a_{12}P_v \\ W(P_v) = a_{21}P_u + a_{22}P_v \end{cases} \tag{8.1}$$

vogliamo trovare la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Ricordando che $W(P_u) \cdot P_u = e$, $W(P_u) \cdot P_v = W(P_v) \cdot P_u = f$, $W(P_v) \cdot P_v = g$, per (8.1) otteniamo

$$\begin{cases} e = a_{11}E + a_{12}F \\ f = a_{11}F + a_{12}G = a_{21}E + a_{22}F \\ g = a_{21}F + a_{22}G \end{cases}$$

Le precedenti relazioni corrispondono all'eguaglianza matriciale

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

dalla quale si ricava

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}$$

da cui

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

Sviluppando i prodotti nella precedente eguaglianza matriciale si ottengono le cosiddette **formule di Weingarten**, che sono lasciate al lettore per esercizio.

Direttamente dalle (8.2) ricaviamo le **formule per la curvatura di Gauss e la curvatura media**:

$$K = det\ A = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \tag{8.3}$$

$$H = \frac{1}{2}\ trA = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \tag{8.4}$$

Definizione 8.1. *Il punto P_0 si dice:*

- **ellittico** *se $K(P_0) > 0$, equivalentemente k_1 e k_2 sono non nulli e hanno lo stesso segno: $(eg - f^2)(u_0, v_0) > 0$;*
- **iperbolico** *se $K(P_0) < 0$, equivalentemente k_1 e k_2 sono non nulli e hanno segno opposto: $(eg - f^2)(u_0, v_0) < 0$;*
- **parabolico** *se $K(P_0) = 0$, equivalentemente se almeno uno fra k_1 e k_2 e' nullo: $(eg - f^2)(u_0, v_0) = 0$.*
- **ombelicale** *se $k_1 = k_2$.*

Un punto ombelicale e' ovviamente ellittico o parabolico.
Si provi per esercizio che un punto P_0 e' ombelicale se e solo se l'operatore di Weingarten in P_0 e' la moltiplicazione per uno scalare.

Le formule (8.3), (8.4) permettono di calcolare le curvature gaussiana e media a partire dal calcolo di e, f, g; dopo di che e' possibile trovare le curvature principali:

Proposizione 8.2. *Le curvature principali sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado*

$$x^2 - 2Hx + K = 0$$

quindi, supposto per esempio $k_1 \leq k_2$

$$k_1, k_2 = H \mp \sqrt{H^2 - K}$$

La proposizione segue immediatamente dal fatto che $2H$ e' la semisomma e K e' il prodotto delle radici k_1, k_2 dell'equazione cercata.

Una volta note le curvature principali in P_0, e' possibile calcolare la curvatura normale in qualunque direzione, mediante il seguente

Teorema di Eulero. *Sia $\mathbf{v}$ un vettore non nullo tangente a S in P_0, e sia θ l'angolo che esso forma con il versore principale $\mathbf{v_1}$. Allora*

$$k_n(\mathbf{v}) = k_1 cos^2\theta + k_2 sin^2\theta$$

In effetti si puo' supporre che $\mathbf{v}$ abbia modulo 1, quindi poiche' $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ sono una base ortonormale di $T_{P_0}S$ sara' $\mathbf{v} = cos\theta\mathbf{v_1} + sin\theta\mathbf{v_2}$, da cui per la (7.6) $k_n(\mathbf{v}) = W_{P_0}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = (cos\theta k_1\mathbf{v_1} + sin\theta k\mathbf{v_2}) \cdot (cos\theta\mathbf{v_1} + sin\theta\mathbf{v_2}) = k_1 cos^2\theta + k_2 sin^2\theta$.

Per terminare diamo delle formule esplicite per calcolare le funzioni e, f, g.

$$\begin{cases} e = P_{uu} \cdot \mathbf{N} = \frac{P_{uu} \cdot P_u \wedge P_v}{EG - F^2} \\ f = P_{uv} \cdot \mathbf{N} = \frac{P_{uv} \cdot P_u \wedge P_v}{EG - F^2} \\ g = P_{vv} \cdot \mathbf{N} = \frac{P_{vv} \cdot P_u \wedge P_v}{EG - F^2} \end{cases}$$

ove i numeratori sono prodotti misti, e quindi si calcolano come determinanti; ad esempio

$$P_{uu} \cdot P_u \wedge P_v = det \begin{bmatrix} x_{uu} & x_u & x_v \\ y_{uu} & y_u & y_v \\ z_{uu} & z_u & z_v \end{bmatrix}$$

e cosi' via.

9. La curvatura delle curve su S.

Si dice **sezione normale** di S nel punto P_0 la curva che si ottiene intersecando S con un piano normale a S in P_0, cioe' con un piano per P_0 parallelo a $\mathbf{N} = \mathbf{N}(u_0, v_0)$

Per individuare un piano normale π basta assegnare un vettore tangente $\mathbf{v} \neq 0$ a S in P_0; π e' allora il piano per P_0 parallelo a $\mathbf{N}$ e $\mathbf{v}$.

Scriveremo dunque $\pi = (\mathbf{N}, \mathbf{v})$.

Si noti che una sezione normale e' una curva piana (contenuta nel piano normale corrispondente).

Se $C = \pi \cap S$ e' una sezione normale, il suo vettore tangente sta sul piano π (che la contiene), inoltre poiche' C sta su S, il vettore tangente sta anche su $T_{P_0}S$, e quindi e' parallelo a $\mathbf{v}$; dunque $\mathbf{v}$ e' tangente a S in P_0. Ne segue che il vettore normale $\mathbf{n}$ a C in P_0 sta sul piano π ed e' ortogonale a $\mathbf{v}$, quindi e' parallelo a $\mathbf{N}$. Tenuto conto della formula (7.1) che definisce la curvatura normale di C in P_0 possiamo concludere

$$k_n(C, P_0) = k(s_0)\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0) = \pm k(s_0)$$

vale a dire
la curvatura normale in P_0 di una sezione normale coincide, a meno del segno, con la sua curvatura in P_0.

Questo permette di calcolare $k_n(C, P_0)$ se si conosce $k(s_0)$, ma anche il viceversa. Si ricordi che comunque il segno di $k_n(C, P_0)$ dipende dalla parametrizzazione di S, percio' ci si puo' sempre ricondurre, salvo a cambiare parametrizzazione (ad esempio scambiando u e v) al caso $k_n(C, P_0) \geq 0$, quindi $k_n(C, P_0) = k(s_0)$.

Ricordiamo anche che $k_n(\mathbf{v}) = k_n(C, P_0)$ e quindi quanto sopra permette di calcolare anche la curvatura normale nella direzione $\mathbf{v}$.

Mettiamo anche in evidenza il fatto che per conoscere la curvatura normale in un punto di una curva qualunque C tracciata su S basta conoscere $k_n(\mathbf{v})$ ove $\mathbf{v}$ e' il vettore tangente a C in P_0, e quindi tale curvatura normale e' uguale (a meno del segno) alla curvatura (assoluta) della sezione normale di S col piano $\pi = (\mathbf{N}, \mathbf{v})$. Inoltre, la curvatura (assoluta) di C in P_0 e' data, in base a (7.1), dalla formula

$$k(s_0) = \pm \frac{k_n(C, P_0)}{cos\beta}$$

ove β e' l'angolo che la normale $\mathbf{n}$ a C forma con la normale $\mathbf{N}$ a S.

Esempio. *Sia S una sfera di raggio r, e P_0 un suo punto. Una sezione normale di S e' un cerchio massimo, la sua curvatura e' dunque $\frac{1}{r}$. Ne segue che $k_n(\mathbf{v})$ e' costante $= \pm\frac{1}{r}$, pertanto $k_1 = k_2 = \pm\frac{1}{r}$. Per conseguenza $K = \frac{1}{r^2}$, $H = \pm\frac{1}{r}$, in particolare curvatura gaussiana e curvatura media sono costanti al variare del punto. Inoltre gli autovalori dell'operatore di Weingarten sono uguali, percio' W_{P_0} e' la moltiplicazione per lo scalare $k_1 = k_2 = \pm\frac{1}{r}$. Quindi tutte le direzioni sono principali, e tutti i punti sono ombelicali.*

Altri esempi di superficie i cui punti sono tutti ombelicali sono i piani, per cui k_1, k_2 sono identicamente nulli. Viceversa, vale la seguente caratterizzazione delle superfici aventi solo punti ombelicali: sono aperti di un piano o di una sfera.

Proposizione 9.1. *Una superficie S i cui punti siano tutti ombelicali e' contenuta in un piano o in una sfera.*

Si osservi che l'ipotesi equivale a dire che in ogni punto $P = P(u, v)$ di S l'operatore di Weingarten e' la moltiplicazione per uno scalare $\lambda = \lambda(u, v)$, scalare che a priori dipende dal punto. Ebbene, in realta' si prova innanzitutto che λ e' costante. Infatti, si avra' $W_P(P_u) = \lambda P_u, \quad W_P(P_v) = \lambda P_v$, da cui tenuto conto delle (6.3):

$$-\mathbf{N}_u = \lambda P_u, \quad -\mathbf{N}_v = \lambda P_v \tag{9.1}$$

da cui, derivando la prima rispetto a v , la seconda rispetto a u e sottraendo si ottiene:

$$\lambda_u P_v - \lambda_v P_u = 0;$$

tenuto conto che i vettori P_u e P_v sono linearmente indipendenti in ogni punto, segue $\lambda_u = \lambda_v = 0$ e quindi λ e' costante (si ricordi che (u, v) varia su D, che e' un dominio).
Se $\lambda = 0$ le (9.1) danno $\mathbf{N}_u = 0, \mathbf{N}_v = 0$ da cui $\mathbf{N}$ e' costante $= \mathbf{N}_0$; pertanto se P_0 e' un punto qualunque della superficie, S e' contenuta nel piano per P_0 ortogonale a $\mathbf{N}_0$ (quest'ultima conclusione e' lasciata al lettore).
Supponiamo ora $\lambda \neq 0$, in particolare possiamo supporre $\lambda > 0$ (eventualmente scambiando il ruolo di u e v), e sia $r = 1/\lambda$. Si consideri un punto $P_0 = P(u_0, v_0)$ di S e sia $\mathbf{N}_0$ il vettore normale a S in P_0. La sfera candidata a contenere S non potra' che essere la sfera di raggio r passante per P_0 il cui centro O e' caratterizzato dall'essere il vettore $O - P_0$ parallelo, equiverso con $\mathbf{N}_0$ e di lunghezza r, cioe'

$$O - P_0 = r\mathbf{N}_0$$

Bastera' dunque provare che ogni punto $P = P(u, v)$ di S ha distanza r dal punto O sopra definito. Sia $M = M(u, v)$ il punto ottenuto da P allo stesso modo che O e' stato ottenuto da P_0, e cioe'

$$M(u, v) - P(u, v) = r\mathbf{N}(u, v); \tag{9.2}$$

derivando rispetto a u si ottiene

$$M_u(u, v) = P_u(u, v) + r\mathbf{N}_u(u, v)$$

da cui, tenuto conto che $\mathbf{N}_u(u, v) = -W_P(P_u(u, v)) = -\lambda P_u(u, v)$ si ottiene

$$M_u(u, v) = 0.$$

analogamente, derivando rispetto a v, si ha

$$M_v(u, v) = 0.$$

Ne segue che $M(u, v)$ e' costante, e siccome $M(u_0, v_0) = O$, la (9.2) diventa

$$O - P(u, v) = r\mathbf{N}(u, v)$$

che implica $\|O - P(u, v)\| = r$, cioe' appunto che P sta sulla sfera di centro O e raggio r.

10. Linee di curvatura.

Definizione 10.1. *Si dice* **linea di curvatura** *un curva tracciata su S la cui tangente in ogni punto coincide con una direzione principale in quel punto.*

Si puo' dimostrare che per un punto di S non ombelicale passano due linee di curvatura (e sono ovviamente ortogonali). Supponiamo per semplicita' che S non abbia punti ombelicali

Lemma 10.2. *Supponiamo che S non abbia punti ombelicali. Le linee di curvatura coincidono con le linee cordinate se e soltanto se $F = f = 0$.*

Supponiamo innanzitutto che le linee di curvatura coincidano con le linee cordinate e proviamo che $F = f = 0$. Poiche' le linee di curvatura sono ortogonali, lo sono anche le linee coordinate, ne segue $F = 0$; inoltre P_u e P_v sono direzioni principali in ogni punto, quindi $f = W(P_u) \cdot P_v = 0$ perche' $W(P_u)$ e' parallelo a P_u.
Viceversa supponiamo $F = 0$ e $f = 0$; la prima assicura che le linee cordinate sono ortogonali; la seconda ci da' $W(P_u) \cdot P_v = f = 0$ cioe' $W(P_u)$ e' ortogonale a P_v e quindi e' parallelo a P_u; ne segue che P_u e' un autovettore dell'operatore di Weingarten in ogni punto, quindi le $v =$ *costante* sono linee di curvatura; analogamente per le $u =$ *costante*, con il che il lemma e' provato.

Come conseguenza:

Proposizione 10.3. *Le linee di curvatura di una superficie di rotazione sono i meridiani e i paralleli.*

Si utilizzi la parametrizzazione di S data da (2.13), in cui i meridiani e i paralleli sono rispettivamente le linee coordinate $v = costante$ e $u = costante$. Siccome meridiani e paralleli sono ortogonali, segue $F = 0$. Sia π un piano definito da $v = v_0$ contenente l'asse z e sia $M = \pi \cap S$ il meridiano corrispondente. Se P e' un punto di M, il vettore normale $\mathbf{N}(u, v_0)$ a S in P e' contenuto in π (infatti: P_v, vettore tangente al parallelo per P, e' ortogonale a π; P_u, vettore tangente in P al meridiano M sta su π, onde $\mathbf{N} = P_u \wedge P_v$ sta pure su π). Pertanto anche la sua derivata parziale $\mathbf{N}_u(u, v_0)$ sta su π. Percio' $f = -P_v \cdot \mathbf{N}_u(u, v_0) = 0$. La conclusione segue dal lemma precedente.

Osservazione 10.4. *Se $F = f = 0$ (per esempio se S e' una superficie di rotazione) si ha:*

$$k_1 = \frac{e}{E}, \quad k_2 = \frac{g}{G}, \quad K = \frac{eg}{EG} \quad H = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right)$$

In effetti se $F = f = 0$ le formule di Weingarten (8.2) danno

$$W(P_u) = \frac{e}{E} P_u, \quad W(P_v) = \frac{g}{G} P_v$$

vale a dire che P_u e P_v sono gli autovettori di W e $\frac{e}{E}, \frac{g}{G}$ sono gli autovalori.

Esercizio. *Trovare le linee di curvatura di un cilindro circolare retto e di un cono circolare retto, e calcolare le curvature principali, la curvatura di Gauss e la curvatura media.*