Testi:

Appunti di V. Ancona

nella pagina web:web.math.unifi.it/users/dini

Caddeo-Gray Curve e superfici

anche per gli aspetti informatici con Mathemtica.

- Appunti per uso di “Mathematica” dalla pagina Web web.math.unifi.it/users/dini

- Il programma MATHEMATICA della Wolfram Research, versione di sola lettura, dal sito

  www.wolframresearch.com

Curve $\mapsto$ rette,coniche...
(Se non avete pensato a rette o coniche o qualcosa di piú complicato è un problema)
Superfici $\mapsto$ piani, e poco altro (quadriche da rivedere insieme)

Rette,coniche, piani e quadriche: quali proprietà studiare o meglio in quale ambiente?

L'ambiente ed il gruppo di trasformazioni ammissibili associato.

- spazi metrici : isometrie
- spazi affini : affinità
- spazi topologici : omeomorfismi ...
- spazi proiettivi : proiettività

Due oggetti sono uguali in un certo ambiente se esiste una trasformazione ammissibile che trasforma l'una nell'altra.

Sono proprietà metriche, affini, topologiche quelle che non cambiano per una isometria, affinità etc.

Quali sono le trasformazioni che consideremo ammissibili?

Le seguenti curve(sommariamente indicate) sono uguali?

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad y - \sqrt{1 - x^2} = 0$$

$$y + \sqrt{6 - x^2} = 0 \qquad (x^2 + y^2)^2 - 1 = 0$$

$$\{4\cos t, 4\text{sen } t\} \qquad (x-7)^2+(y+1)^2-1 = 0$$

In particolare studieremo **proprietà** che non dipendono dalle coordinate scelte nel piano o nello spazio o equivalentemente che siano invarianti per le trasformazioni considerate: per es. affinità , cioè trasformazioni

$$\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + b_i \quad i = 1, 2, 3.$$

con (a_{ij}) matrice non singolare.

A partire dal gruppo **GL(n, $\mathbb{R}$)** e dal gruppo **Traslazioni(n, $\mathbb{R}$)** si costruiscono (Caddeo pag 137):

- **Affinità(n, $\mathbb{R}$)=GL(n, $\mathbb{R}$)$\oplus$Traslazioni(n, $\mathbb{R}$)**

- **O($\mathbb{R}^n$)**matrici A tali che $A^t A = Id$

- **Isometrie(n, $\mathbb{R}^n$)**=trasformazione che conserva distanze.

- **Euclidee(n, $\mathbb{R}^n$)=**trasformazione affine con parte lineare ortogonale.

- Rotazioni trasformazioni ortogonali con det(A)=1

- Simmetrie trasformazioni ortogonali con det(A)=-1

Di fatto il gruppo delle isometrie coincide con quello dei movimenti euclidei. (vedi teo 6.3 Caddeo pag 137).

Teor. 1 *Una isometria di* $\mathbb{R}^n$ *è la composizione di una traslazione e di una trasformazione ortogonale.Quindi*
Isometrie(n, $\mathbb{R}^n$**)=Euclidee(n,** $\mathbb{R}^n$**)**.

Dim.L'inclusione
Isometrie(n, $\mathbb{R}^n$**)**$\supset$**Euclidee(n,** $\mathbb{R}^n$**)**è banale: qualunque siano i vettori **x** e **y** e la trasformazione euclidea **v**$\mapsto$ A **v**+ τ

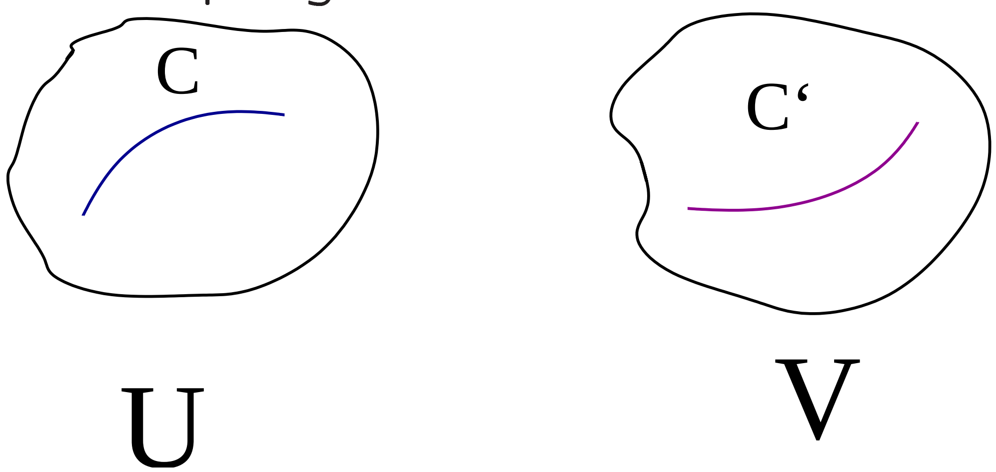
$$||A\mathbf{x}+\tau-(A\mathbf{y}+\tau)|| = (A(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot A(\mathbf{x}-\mathbf{y})) = (\mathbf{x}-\mathbf{y}\cdot A^t A(\mathbf{x}-\mathbf{y})) = (\mathbf{x}-\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Se F è una isometria anche
G(**v**)=F(**v**)-F(**0**)è una isometria
con G(**0**)=**0**.
La linearità deriva dalla unicità della scomposizione di un vettore lungo una base ortonormale $B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots \mathbf{e_n}\}$ e dal fatto che G (B) è ancora ortonormale.

$$G(v) = G(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} < G(v), G(e_i) > G(e_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i G(e_i)$$

Vogliamo studiare inoltre proprietà invarianti per diffeomorfismi (o che variano in modo decente). Per es. regolarità di punti della curva,esistenza di retta tangente ad una conica od una più generica curva.



Invece che "curve" nel piano, curve nello spazio o in $\mathbb{R}^n$, "superfici" nello spazio od in $\mathbb{R}^n$.

Un approccio anche, ma non necessariamente più locale. Studieremo proprietà di curve o superfici che dipendono solo dal comportamento in un qualche intorno di un punto. (per es. la retta tangente in un punto P dipende solo dalla curva vicino a P)

Il passaggio dalla scrittura globale nota di coniche (o quadriche) a quella eventualmente locale di grafico : il **teorema del Dini.**

Le rette possono altresì essere espressa in forma parametrica, come anche le coniche etc..

I passaggi tra forme parametriche e altre forme in modo che i vari concetti e proprietà siano leggibili in tutti i casi (o almeno nella maggior parte dei casi..) (**il teorema della funzione inversa**)

Si vuole arrivare a qualcosa che caratterizzi la "curva" o "superficie".

Su ogni curva C sono definite due funzioni **curvatura k** e **torsione τ,** che caratterizzano la curva nel senso che:

date due curve C e C' che abbiano le stesse curvatura e torsione k e τ allora esiste **un movimento rigido** di $\mathbb{R}^3$ che porta C in C'.

Le due curve sono **la stessa** eccetto che per la loro posizione in $\mathbb{R}^3$. Vale un teorema più forte, ma la cui struttura è la seguente:

date due funzioni k e τ (con ragionevoli proprietà, continuità , k>0 etc.) allora esiste una ed una sola curva a meno di movimenti euclidei di cui k sia la curvatura e τ la torsione.

Quindi le suddette funzioni racchiudono le proprietà delle curve, che vogliamo studiare.

Analogamente per le **superfici:**

su ogni superficie differenziabile S si definiscono due forme quadratiche, dette **prima e seconda forma fondamentale,** I f.f. e II f.f.,

date due superfici S ed S' che abbiano le stesse I e II f.f. allora **esiste un movimeto rigido di** $\mathbb{R}^3$ che porta la prima nella seconda.

Ancora **date due forme quadratiche (con ragionevoli proprietà) allora esiste una unica superficie a meno di movimenti rigidi che abbia tali forme come prima e seconda forma fondamentale.**

Il teorema del Dini

Teor. 2 *Sia F(x,y) una funzione continua con derivata F_y in un aperto U di* $\mathbb{R}^2$.

Se in (x_0, y_0) *risulta :*

$$F(x_0, y_0) = 0 \qquad F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

allora esistono due costanti positive δ e σ tali che l'equazione F(x,y)=0 definisce implicitamente un'unica funzione
h(x): $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \mapsto (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$, *cioè*

$$F(x, h(x)) = 0 \qquad \textit{per } \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

inoltre h(x) è continua e h$(x_0) = y_0$.

Se inoltre in F(x,y) è $C^k(U), k \in \mathbb{N}$ *allora h(x) è* $C^k(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *e*

$$h'(x) = -\frac{F_x(x, h(x))}{F_y(x, h(x))} \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Teor. 3 *Sia F(x,y) una funzione continua con derivata F_y in un aperto U di* $\mathbb{R}^2$.

Se in (x_0, y_0) *risulta :*

$$F(x_0, y_0) = 0 \qquad F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

allora esistono intorni di x_0 *ed* y_0, $I(x_0, r)$ *ed* $I(y_0, r')$ *tali che l'equazione F(x,y)=0 definisce implicitamente un'unica funzione*
h(x): $I(x_0, r) \mapsto I(y_0, r')$, *cioè*

$$F(x, h(x)) = 0 \qquad \text{per } \forall x \in I(x_0, r)$$

inoltre h(x) è continua e $h(x_0) = y_0$.

Se inoltre in F(x,y) è $C^k(U), k \in \mathbb{N}$ *allora h(x) è* $C^k(I(x_0, r)$ *e*

$$h'(x) = -\frac{F_x(x, h(x))}{F_y(x, h(x))} \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Teor. 4 *Sia F(x,y) una funzione continua con derivata F_y in un aperto U di* $\mathbb{R}^2$.

Se in (x_0, y_0) *risulta :*

$$F(x_0, y_0) = 0 \qquad F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

allora esistono due costanti positive δ *e* σ *tali che l'equazione F(x,y)=0 definisce implicitamente un'unica funzione*
h(x): $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \mapsto (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$, *cioè*

$$F(x, h(x)) = 0 \qquad \text{per } \forall x \in I(x_0, r)$$

inoltre h(x) è continua e h$(x_0) = y_0$.

Se inoltre in F(x,y) è $C^k(U), k \in \mathbb{N}$ *allora h(x) è* $C^k(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *e*

$$h'(x) = -\frac{F_x(x, h(x))}{F_y(x, h(x))} \qquad \forall x \in I(x_0, r)$$

Teor. 5 *Sia F(x,y) una funzione continua con derivata F_y in un aperto U di $\mathbb{R}^{n+m}$ in $\mathbb{R}^m$.*

Se in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ risulta :

$$F(x_0, y_0) = 0 \qquad \det F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

allora esistono intorni di x_0 ed y_0, $I(x_0, r)$ ed $I(y_0, r')$ tali che l'equazione F(x,y)=0 definisce implicitamente un'unica funzione h(x): $I(x_0, r) \mapsto I(y_0, r')$, cioè

$$F(x, h(x)) = 0 \qquad \text{per } \forall x \in I(x_0, r)$$

inoltre h(x) è continua e h$(x_0) = y_0$.

Se inoltre in F(x,y) è $C^k(U), k \in \mathbb{N}$ allora h(x) è $C^k(I(x_0, r)$ e

$$h'(x) = -F_y(x, h(x))^{-1} F_x(x, h(x)) \qquad \forall x \in I(x_0, r)$$

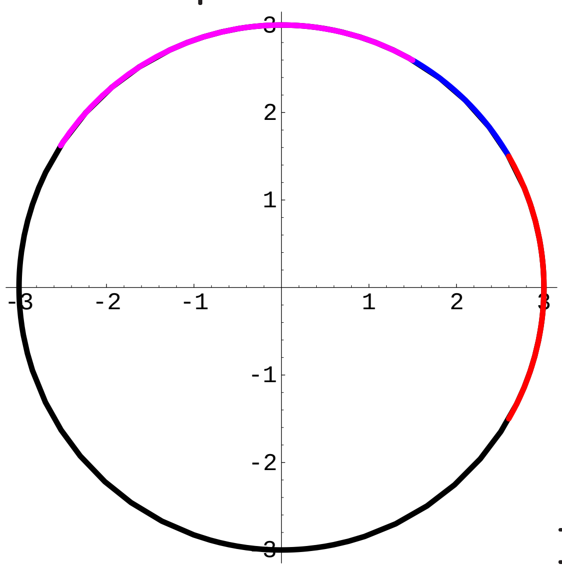
Ovviamente

$$F_y(x, y) = (\frac{\partial F_{n+j}(x, y)}{\partial y_k})_{j,k=1,\ldots,m}$$

Il teorema del Dini nel piano e nello spazio affini
Esempio 1: circonferenza

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

è una delle equazioni della circonferenza unitaria.



Il gradiente

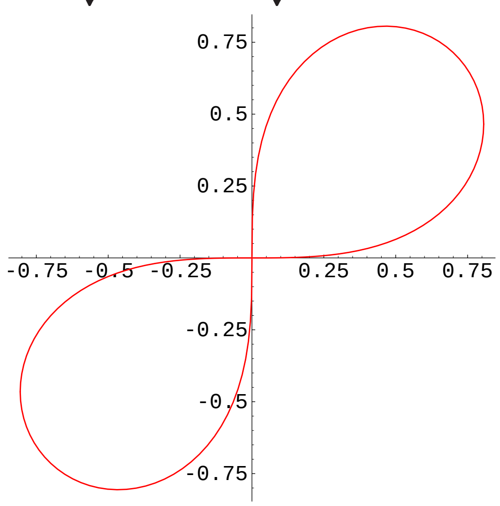
$$(2x, 2y)$$

non è mai nullo sulla circonferenza, in un intorno dei punti di ascissa non nulla è possibile esprimere x come funzione di y (e simmetricamente per y).

Esempio 2: ellisse

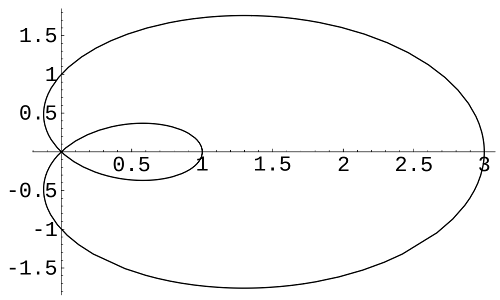
Esempio 3: luogo di zeri della funzione f(x,y)$=(x^2+y^2)^2-2xy$.

I punti del luogo in cui si annulla la derivata rispetto a x $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=f_x(x,y)$ sono tre (0,0), $(\dfrac{-3^{3/4}}{2\sqrt{2}},\dfrac{-3^{1/4}}{2\sqrt{2}})$ e $(\dfrac{3^{3/4}}{2\sqrt{2}},\dfrac{3^{1/4}}{2\sqrt{2}})$



Mentre in (0,0) si annulla anche f_y, come si vede anche geometricamente negli altri due punti si può esprimere y localmente come funzione di x.

Esempio 4: L'esempio della "curva"
$\{\cos\theta(2\cos\theta - 1), \sin\ \theta(2\cos\theta - 1)\}$



Siamo in presenza di una proprietà locale invariante per diffeomorfismi. Eventuali diffeomorfismi non alterano la possibilità di esprimere localmente il suddetto luogo o la sua immagine mediante il diffeomorfismo come un grafico, mentre ovviamente indipendentemente dal diffeomorfismo considerato vicino all'immagine di (0,0) non sarà mai possibile una tale scrittura.

Si noti tuttavia che ciascuno dei rami passanti per (0,0) puo' essere espresso come grafico rispetto ad un sistema opportuno.

In $\mathbb{R}^3$ due esempi

Dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ a espressione come grafico, possibile nei punti in cui le derivate parziali sono non nulle. La proprietà non è peró della sfera, ma del riferimento. Nella sfera tutti i punti sono uguali a meno di isometrie.

L'intersezione di un cilindro e di una sfera : la finestra del Viviani.

$$x^2+(y-1/2)^2-1/4=0 \qquad x^2+y^2+z^2-1=0$$

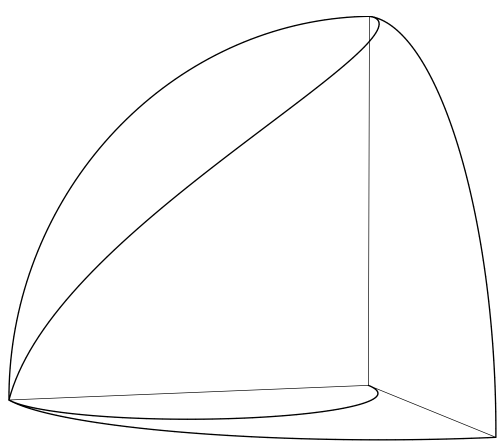
Si può leggere come il luogo di zeri di

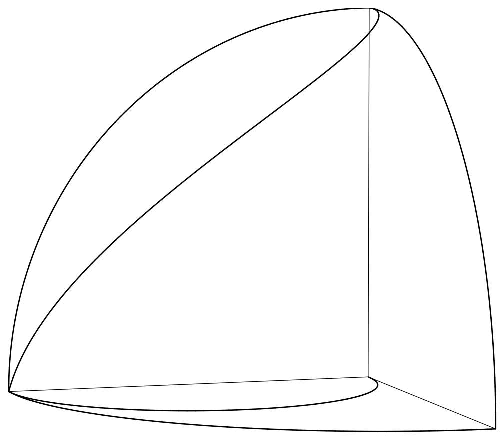
$$F(x,y,z)=\{x^2+(y-1/2)^2-1/4, x^2+y^2+z^2-1\},$$

con $F: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$

La matrice jacobiana

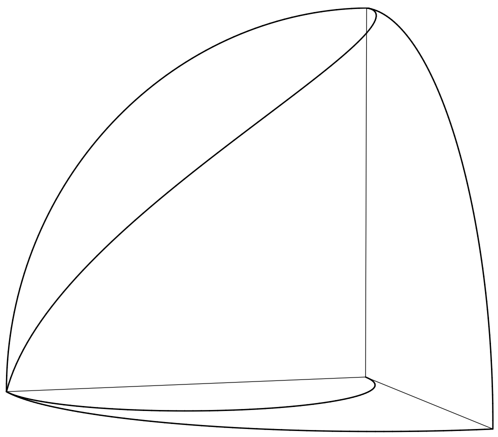
$$\begin{pmatrix} 2x & 2(y-1/2) & 0 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$



 La matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} 2x & 2(y-1/2) & 0 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

I minori hanno determinanti rispettivamente:
z (y-1/2) ,x z , x
Si noti che : se x $\neq$0 il terzo minore è senz'altro non nullo, per cui in un punto ($x_0, y_0, z_0), x_0 \neq$ 0 della curva si puó utilizzare z come parametro nel senso che esistono funzioni x(z),y(z) tali che F(x(z),y(z),z) $\equiv$0
(nella fattispecie $(\pm z\sqrt{1- \ z^2}, (1 - z^2)))$ che ovviamente non funzionano in un qualche intorno di $(0, 1, 0)$.

 Se esprimiamo x e z in funzione di y, otteniamo:
$z = \pm\sqrt{1-2\ y}, x = \pm\sqrt{(2-y)\ y}$ che presenta impossibilità di scegliere il segno anche in punti con z=0 e y=1/2.

Es. 1 *Esprimere localmente, ove possibile, y e z come funzione di x.*

Il teorema dela funzione inversa:

Teor. 6 *Sia* $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ *differenziabile e sia* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *tale che lo jacobiano di f in* x_0 *sia non nullo. Allora esiste un intorno di* x_0 *su cui f è invertibile con inversa differenziabile.*

Grafici e forma parametrica.

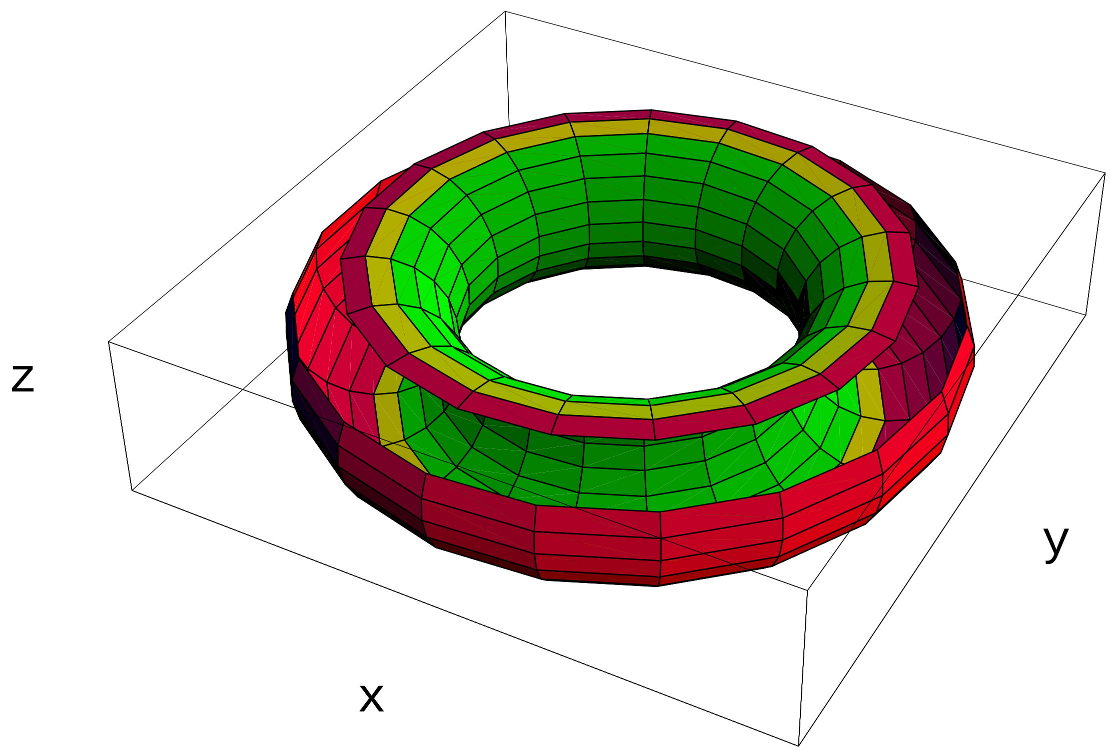
Il teorema della funzione inversa. Il passaggio da forme implicite a grafici e forme parametriche. Il caso generale di curve o superfici non si puó trattare senza la definizione di curva o superficie, ma lo schema è il seguente:data la superficie $\begin{cases} x & = x(u,v) \\ y & = y(u,v) \\ z & = z(u,v) \end{cases}$ per il teorema della funzione inversa in corrispondenza del minore di rango massimo si trova la funzione inversa (locale) per es. u(y,z),v(y,z) e poi si sostituisce nella prima ottenendo: $\begin{cases} x & = x(u(y,z),v(y,z)) \\ y & \qquad\qquad = y \\ z & \qquad\qquad = z \end{cases}$
alias x=x(u(y,z),v(y,z)) per (y,z) in un dominio opportuno.

Ecco l'importanza dello studio locale indipendente dalla scelta di rappresentare in un modo od in un altro la curva o superficie.

MATHEMATICA

I comandi indispensabili. Le figure. I conti. Il teorema fondamentale per le curve: aspetti e risoluzione numerici.

Rappresentazioni di superfici.



I conti nello spazio.