

Problemi al bordo per le Equazioni Differenziali

Prof. Pietro Zecca

E-mail address: `zecca@unifi.it`

URL: `http://www.de.unifi.it/anum/zecca`

Contents

Prefazione	v
Chapter 1. Generalità sulle Equazioni Differenziali Ordinarie	1
1. Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti	1
2. Equazioni a coefficienti costanti, non omogenee	6
3. Equazioni di Eulero-Cauchy	11
4. Serie di Funzioni	17
5. Soluzioni per serie per e.d.o. del secondo ordine	28
Chapter 2. Problemi al bordo per le E.D.O.	53
1. Preliminari	53
2. Problemi di Sturm-Liouville	58
3. Ortogonalità delle autofunzioni	64
4. Serie ortonormali di funzioni	68
5. Convergenza e completezza	71
6. Equazioni auto-aggiunte	76
7. Altri sistemi tipo Sturm-Liouville	81
Chapter 3. Equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine	85
1. Introduzione	85
2. Equazioni lineari e quasi-lineari	85
3. Il problema di Cauchy	86
4. Esistenza ed unicità delle soluzioni	86
5. Leggi di conservazione	91
Chapter 4. Equazioni alle derivate parziali del secondo ordine	99
1. Introduzione	99
2. Separazione delle variabili	108
3. L'equazione d'onda	116
4. L'Equazione di Diffusione	125
5. Forme canoniche	131
Chapter 5. Serie di Fourier	141
1. Introduzione	141
2. Coefficienti di Fourier	141
3. Serie in seni, coseni ed in forma esponenziale	151
4. Applicazioni	155
5. Convergenza della serie di Fourier	160

Chapter 6. Integrali e trasformate di Fourier	169
1. L'integrale di Fourier	169
2. Trasformata di Fourier	176
3. Applicazioni	186
Chapter 7. Problemi al bordo in coordinate cartesiane	193
1. L'equazione di Laplace	193
2. L'equazione d'onda	202
3. L'equazione di diffusione	211
4. Metodo delle trasformate di Fourier e Laplace	218
5. Verifica delle soluzioni	225
Chapter 8. Problemi al bordo in altri sistemi di coordinate	235
1. Coordinate Polari	235
2. Coordinate cilindriche; funzioni di Bessel	243
3. Coordinate sferiche; polinomi di Legendre	255
Chapter 9. Applicazioni	269
1. Problemi al bordo in coordinate cilindriche e sferiche	269
2. Esercizi	277

Prefazione

L'obiettivo di queste note è quello di presentare un metodo per la soluzione delle equazioni differenziali del secondo ordine che nascono dalle applicazioni. Nella maggior parte dei casi questo metodo consiste nella separazione delle variabili e dei metodi di trasformazione (Laplace e Fourier).

Il Capitolo 1 cerca di ricoprire alcuni degli elementi fondamentali delle equazioni differenziali che possono essere utili da consultare in caso di necessità. Nel Capitolo 2 si delinea la differenza tra un problema ai valori iniziali (problema di Cauchy) ed un problema al bordo per le equazioni differenziali ordinarie. Questo problema introduce in modo naturale la teoria di Sturm-Liouville, compresa anche la rappresentazione di una funzione in serie di funzioni ortonormali. Questa rappresentazione porta ai problemi di convergenza e di completezza di tali serie. Nel Capitolo 3 si introduce la teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali limitatamente alle equazioni lineari e quasi lineari, con un accenno alle leggi di conservazione. Il metodo di separazione delle variabili è introdotta nel Capitolo 4 in connessione alla presentazione dell'equazione di Laplace e dell'equazione del calore. In essa viene anche dedotta la soluzione di D'Alembert per la vibrazione di una corda di lunghezza infinita. Tale soluzione viene poi estesa ad una corda di lunghezza finita con condizioni al bordo. Il capitolo si conclude con l'introduzione della forma canonica per le equazioni ellittiche, paraboliche e iperboliche.

La teoria delle serie di Fourier è l'argomento principale del Capitolo 5. Oltre alle serie in seno, coseno ed esponenziale, c'è un paragrafo sulle applicazioni e sulla convergenza delle serie. Nel Capitolo 6, un argomento euristico estende le serie di Fourier agli integrali di Fourier e quindi anche alle trasformate di Fourier e le sue applicazioni. L'insieme degli argomenti precedenti si compongono nel Capitolo 7, dedicato alla soluzione dei problemi al bordo, espressi in coordinate cartesiane. Viene anche inclusa la trattazione delle equazioni non omogenee e delle condizioni al bordo di tipo non omogeneo. Segue un paragrafo di applicazione delle trasformate di Laplace e Fourier alla soluzione di questi problemi, ed anche un paragrafo sulla verifica delle soluzioni. Il Capitolo 8 contiene i problemi al bordo espressi in coordinate polari, cilindriche e sferiche. Questo porta alla discussione delle funzioni di Bessel e dei polinomi di Legendre e delle loro proprietà.

CHAPTER 1

Generalità sulle Equazioni Differenziali Ordinarie

1. Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti

Diamo una breve presentazione di alcuni tipi di equazioni differenziali ordinarie elementari. I capitoli successivi useranno in modo forte il materiale di questo capitolo. Poiché ci occuperemo quasi esclusivamente di equazioni del secondo ordine, ci limiteremo a studiare questo tipo di equazioni.

Il più semplice dei problemi da risolvere è il seguente **problema ai valori iniziali** (o di **Cauchy**¹).

$$y'' + a y' + b y = 0, \quad (1.1a)$$

$$y(0) = c, \quad y'(0) = d. \quad (1.1b)$$

Qui, a, b, c, d sono numeri reali e gli apici indicano la derivazione rispetto alla variabile indipendente, che indicheremo con x . L'equazione differenziale omogenea (1.1a) ha una soluzione generale che è la combinazione lineare di due **funzioni linearmente indipendenti**, ognuna delle quali soddisfa l'equazione. Poiché le condizioni iniziali sono *due*, si può sempre trovare un'unica soluzione del problema (6.2).

Lo illustriamo con alcuni esempi.

ESEMPIO 1. *Risolvere il problema ai valori iniziali*

$$y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4. \quad (1.1c)$$

SOLUZIONE 1. *Scegliendo come possibile soluzione la funzione $y = \exp(r x)$ ed immettendola nell'equazione, si ottiene l'**equazione caratteristica***

$$r^2 - r - 6 = 0$$

*che ha come soluzioni i valori $r = -2, r = 3$. Si ottiene quindi la **soluzione generale***

$$y = c_1 \exp(-2x) + c_2 \exp(3x).$$

Sostituendo i valori iniziali dentro la soluzione generale e la sua derivata prima si ottiene il sistema di equazioni lineari

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 3, \\ -2c_1 + 3c_2 &= 4. \end{aligned}$$

¹Augustin Cauchy (1789-1857), matematico francese.

Il sistema ammette una unica soluzione data dai due valori $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$. Ne segue che la la soluzione del problema ai valori iniziali dato è:

$$y(x) = \exp(-2x) + 2 \exp(3x) .$$

Osserviamo che le due funzioni $y_1(x) = \exp(-2x)$ e $y_2(x) = \exp(3x)$ sono **linearmente indipendenti** su ogni intervallo, infatti il loro **Wronskiano**²

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \exp(-2x) & \exp(3x) \\ -2 \exp(-2x) & 3 \exp(3x) \end{vmatrix} = 5 \exp(x) .$$

è sempre diverso da zero. E' precisamente per questa ragione che il sistema (1.1c) ammette un'unica soluzione.

ESEMPIO 2. Risolvere il problema ai valori iniziali

$$y'' + 2y' + y = 0 , \quad y(0) = 3 , \quad y'(0) = -5 .$$

SOLUZIONE 2. L'equazione caratteristica

$$r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0$$

ha due radici uguali. In questo caso, si può dimostrare che $y_1(x) = \exp(-x)$ e $y_2(x) = x \exp(-x)$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale data. Ne segue che la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = c_1 \exp(-x) + c_2 x \exp(-x) .$$

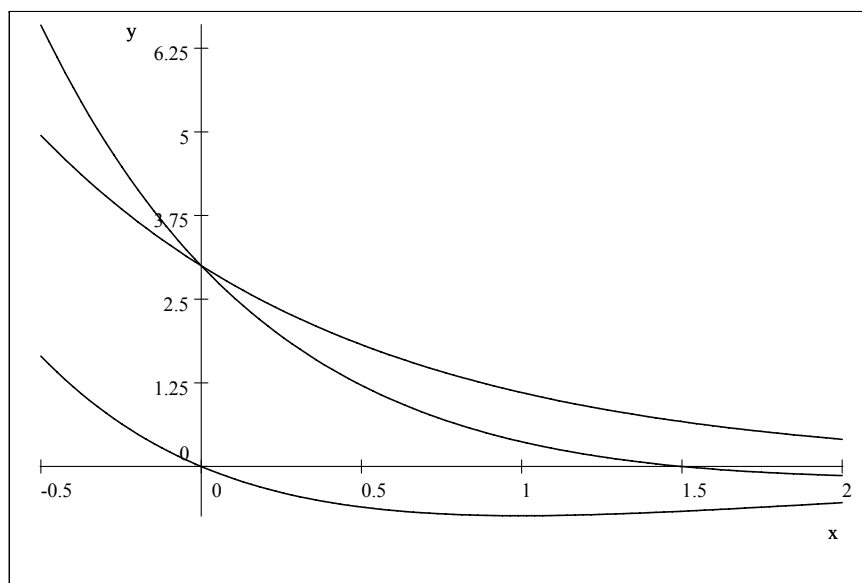
Le condizioni iniziali danno il seguente sistema

$$\begin{aligned} c_1 &= 3 \\ -c_1 + c_2 &= -5 , \end{aligned}$$

quindi la soluzione del problema è (vedi Figura)

$$y(x) = 3 \exp(-x) + -2 x \exp(-x) .$$

²Il Wronskiano è un determinante, così chiamato in onore del matematico polacco Hoëne Wronski (1773-1853).

Grafico di $3 \exp(-x) - 2x \exp(-x)$.

Nell'Esempio sopra, sapendo che $y_1(x) = \exp(-x)$ è una soluzione, assumiamo adesso che la seconda soluzione sia della forma $y_2(x) = u(x) \exp(-x)$. E'

$$y_2(x) = u(x) \exp(-x),$$

$$y_2'(x) = u'(x) \exp(-x) - u(x) \exp(-x),$$

$$y_2''(x) = u''(x) \exp(-x) - 2u'(x) \exp(-x) + u(x) \exp(-x).$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$\begin{aligned} & u''(x) \exp(-x) - 2u'(x) \exp(-x) + u(x) \exp(-x) \\ & + 2(u'(x) \exp(-x) - u(x) \exp(-x)) + u(x) \exp(-x) \\ & = u''(x) \exp(-x) = 0 \end{aligned}$$

da cui

$$u''(x) = 0.$$

Ne risulta che $u(x) = Ax + B$, quindi si ha che

$$y_2(x) = (Ax + B) \exp(-x) = Ax \exp(-x) + B \exp(-x).$$

L'elemento $\exp(-x)$ non è linearmente indipendente da $y_1(x)$ mentre $x \exp(-x)$ lo è.

Questo metodo per la ricerca della seconda soluzione indipendente dell'equazione differenziale è noto come **metodo di riduzione d'ordine**. Il nome proviene dal fatto che, in generale, la risultante equazione differenziale per la funzione $u(x)$ può essere trattata come una equazione differenziale del primo ordine.

Questo metodo non è limitato al caso di equazione a coefficienti costanti, ma può essere applicato a qualsiasi equazione differenziale

lineare, cioè ad un'equazione della forma

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0. \quad (1.2)$$

ESEMPIO 3. Risolvere il problema ai valori iniziali

$$y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 3.$$

SOLUZIONE 3. In questo esempio le radici dell'equazione caratteristica

$$r^2 - 4r + 13 = 0$$

sono i numeri complessi $2 \pm 3i$. Ne segue che la soluzione generale è

$$y(x) = \exp(2x)(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x).$$

Il sistema delle condizioni iniziali è

$$\begin{aligned} c_1 &= 3, \\ 2c_1 + 3c_2 &= 3. \end{aligned}$$

da cui segue che la soluzione del problema è

$$y(x) = \exp(2x)(3 \cos 3x - \sin 3x).$$

Nei tre esempi precedenti si sono esaminati i tre possibili casi che possono sorgere nello studio delle equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti. In tutti i casi, l'equazione caratteristica è un'equazione algebrica di secondo grado a coefficienti reali, le cui radici ricadono sempre nei tre casi precedenti, esse sono due soluzioni reali e distinte, reali e coincidenti o complesse coniugate.

1.1. Esercizi.

- (1) Trovare la soluzione generale per ognuna delle seguenti equazioni
 - (a) $y'' - 3y' + 2y = 0$.
 - (b) $y'' - 6y' + 9y = 0$.
 - (c) $y'' - 6y' + 25y = 0$
- (2) Trovare la soluzione generale dell'equazione $y'' - 3y' = 0$
- (3) Risolvere le seguenti equazioni
 - (a) $y'' + 2y' + 2y = 0$
 - (b) $y'' + y' + 2y = 0$
 - (c) $8y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
 - (d) $x'' + 4x = 0, \quad x(\pi/4) = 1, \quad x'(\pi/4) = 3$
- (4) Risolvere i seguenti problemi ai valori iniziali
 - (a) $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
 - (b) $y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 9$
 - (c) $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -6$
- (5) Risolvere i seguenti problemi ai valori iniziali

- (a) $x'' + x' - 3x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$
- (b) $u'' + 5u' + 6u = 0$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 2$
- (c) $\ddot{\theta} + 2\pi\dot{\theta} + \pi^2\theta = 0$, $\theta(1) = 1$, $\dot{\theta}(1) = 1/\pi$ (il punto denota la derivazione rispetto ad una qualche variabile indipendente).
- (6) Mostrare che le funzioni $\exp(\alpha x) \cos(\beta x)$ e $\exp(\alpha x) \sin(\beta x)$ sono linearmente indipendenti per ogni x (Calcolare il Wronskiano).
- (7) Considerare l'equazione differenziale omogenea (5.1) e si assuma che sia nota una soluzione $y_1(x)$.
- (a) Sia $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ la seconda soluzione. Mostrare che l'equazione differenziale a cui soddisfa la funzione $u(x)$ è
- $$y_1(x) u''(x) + [2y_1'(x) + a(x)y_1(x)] u'(x) = 0 .$$

- (b) Applicare il metodo della parte (a) all'equazione

$$x^2 y'' + xy' - 4y = 0$$

per trovare la soluzione $y_2(x)$ sapendo che $y_1(x) = x^2$.
 (Nota: l'equazione data va divisa per x^2 per poter usare i risultati della parte (a).)

2. Equazioni a coefficienti costanti, non omogenee

Considerare il caso di equazioni non omogenee in generale, ci porterebbe fuori dai limiti del corso, per questo consideriamo solo equazioni a coefficienti costanti, cioè equazioni della forma

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (2.1)$$

dove a e b sono costanti.

Si può dimostrare che la soluzione più generale dell'Eq. (2.1) è la somma

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x)$$

dove $y_o(x)$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata

$$y'' + ay' + by = 0$$

e $y_p(x)$ è chiamata **soluzione particolare** dell'Eq. (5.1).

Abbiamo già visto nel Paragrafo 1.1 come trovare $y_o(x)$, quindi, in questo paragrafo si studierà come trovare $y_p(x)$.

Il problema non è, in generale, semplice a meno che non si impongano alcune restrizioni alla funzione $f(x)$ dell'Eq. (2.1).

Ci limiteremo, quindi, a considerare funzioni del tipo

$$\{P_n(x) \exp(\alpha x) \sin(\beta x), P_n(x) \exp(\alpha x) \cos(\beta x)\} \quad (2.2)$$

dove $P_n(x)$ è un polinomio in x di grado n , cioè

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n .$$

Sebbene possa sembrare restrittivo limitarsi a funzioni di questa forma, una buona parte dei problemi elementari ricadono in questa categoria.

La classe delle funzioni del tipo (2.2) è chiusa rispetto all'operazione di derivazione. Questo significa che se una funzione in questa classe viene derivata, si ottiene una funzione (o somma di funzioni) dello stesso tipo.

Per esempio, se si deriva la funzione

$$f(x) = (x^2 - 2x + 3) \exp(2x) \sin 3x$$

si ottiene la funzione

$$f'(x) = (2x^2 - 6x + 4) \exp(2x) \sin 3x + (3x^2 - 6x + 9) \exp(2x) \cos 3x.$$

Questa proprietà ci permette di determinare la soluzione particolare dell'equazione (2.1) con il metodo chiamato **metodo dei coefficienti indeterminati**.

Questo metodo consiste nell'assumere, per la soluzione, la stessa forma del termine noto, sostituirla nell'equazione e confrontare poi i coefficienti dei termini simili.

ESEMPIO 4. Trovare la soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$y'' + y' - 6y = (4x + 5) \exp(x) .$$

SOLUZIONE 4. Poiché il termine noto è il prodotto di un polinomio di grado uno per $\exp x$, si assume $y_p(x)$ della stessa forma, cioè

$$y_p(x) = (Ax + B) \exp x .$$

Derivando si ha:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (Ax + B) \exp x + A \exp x \\ y_p''(x) &= (Ax + B) \exp x + 2A \exp x , \end{aligned}$$

e, sostituendo nell'equazione si ha

$$(-4Ax + 3A - 4B) \exp x = (4x + 5) \exp x .$$

Uguagliando i due membri dell'equazione, si ottiene $A = -1$ e $B = -2$, quindi la soluzione cercata è

$$y_p'(x) = -(x + 2) \exp x .$$

Vogliamo subito notare che la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_o(x) = c_1 \exp(-3x) + c_2 \exp(2x)$$

e che questa soluzione **non ha** termini in comune con $y(x)$. Questa eventualità deve essere tenuta di conto, come mostreremo più avanti.

ESEMPIO 5. Trovare la soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$y'' + y' - 6y = (50x + 40) \sin x .$$

SOLUZIONE 5. Poiché la derivata di $\sin x$ è $\cos x$, scegliamo la soluzione particolare della forma

$$y_p(x) = (Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x ,$$

che include entrambi i termini in $\sin x$ e $\cos x$.

Sostituendo questa funzione e le sue derivate nell'equazione differenziale, si ottiene

$$\begin{aligned} \sin x [(-7A - C)x + A - 7B - 2C - D] \\ + \cos x [(A - 7C)x + 2A + B + C - 7D] = (50x + 40) \sin x . \end{aligned}$$

Quando si uguagliano i coefficienti del termine destro e sinistro, si ottiene un sistema lineare di quattro equazioni in quattro incognite. Si ottiene $A = -7$, $B = -6$, $C = -1$, $D = -3$, da cui:

$$y_p(x) = -(7x + 6) \sin x - (x + 3) \cos x .$$

Nel prossimo esempio vedremo come comportarsi quando il termine noto dell'equazione contiene termini presenti in $y_o(x)$.

ESEMPIO 6. Trovare la soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y'y = 12x \exp x .$$

SOLUZIONE 6. *Notiamo dapprima che la soluzione dell'equazione omogenea è*

$$y_o(x) = (c_1 + c_2x) \exp x .$$

Poiché il secondo membro dell'equazione è il prodotto di un polinomio di grado uno per un esponenziale, saremmo portati ad assumere che la soluzione particolare ha la forma $(Ax + B) \exp x$.

Questa non può essere, tuttavia, la soluzione, in quanto è già soluzione dell'equazione omogenea associata.

Quando ciò accade, si moltiplica la funzione $(Ax + B) \exp x$ per il termine x^s dove s è il più piccolo intero che impedisce che la soluzione particolare contenga termini già presenti nella soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

In questo caso è $s = 2$; si assume perciò

$$y_p(x) = x^2 (Ax + B) \exp x .$$

Derivando due volte questa funzione e sostituendo nell'equazione differenziale data, si ottiene

$$(6Ax + 2B) \exp x = 12x \exp x ,$$

da cui $A = 2$ e $B = 0$ ne segue che

$$y_p(x) = 2x^3 \exp x .$$

la soluzione generale dell'equazione è quindi

$$y(x) = (c_1 + c_2x) \exp x + 2x^3 \exp x .$$

Il metodo dei coefficienti indeterminati è limitato alle funzioni indicate in (2.2).

Esiste un metodo più generale, noto come **variazione dei parametri** che indichiamo qui di seguito.

Data l'equazione differenziale

$$y'' + a y' + b y = f(x)$$

- (1) (a) Ottenere la soluzione generale dell'omogenea

$$y_o(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

- (b) Assumere che la soluzione particolare sia della forma

$$y_p(x) = u(x) y_1(x) + v(x) y_2(x) .$$

(Notare che le costanti c_1 e c_2 sono state sostituite dalle funzioni $u(x)$ e $v(x)$). Derivare, assumendo che

$$y_p' x = -u(x) y_1'(x) + v(x) y_2'(x)$$

avendo posto

$$u'(x) y_1(x) + v'(x) y_2(x) = 0 .$$

- (c) Trovare $y_p''(x)$ partendo dalla $y_p'(x)$ trovata in (b) per ottenere

$$u'(x)y_1'(x) + v'(x)y_2'(x) = f(x).$$

- (d) Risolvere il sistema

$$\begin{aligned} u'(x)y_1(x) + v'(x)y_2(x) &= 0 \\ u'(x)y_1'(x) + v'(x)y_2'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

in $u'(x)$ e $v'(x)$.

- (e) Integrare $u'(x)$ e $v'(x)$ per ottenere $u(x)$ e $v(x)$.
 (f) Trovare infine $y_p(x)$ e quindi la soluzione generale. Da notare che il successo del metodo dipende dalla possibilità di integrare $u'(x)$ e $v'(x)$.

Quando il termine noto dell'Eq. (2.1) contiene più termini, si può usare il **Principio di Sovrapposizione**.

CRITERIO 1 (Principio di sovrapposizione). *Se $y = \Phi_1(x)$ è soluzione dell'equazione $y'' + ay' + by = f_1(x)$ e $y = \Phi_2(x)$ è soluzione dell'equazione $y'' + ay' + by = f_2(x)$, allora $y(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)$ è soluzione dell'equazione $y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$.*

Esso stabilisce che è possibile risolvere problemi più complicati scomponendoli in problemi più semplici e sommando poi tra loro soluzioni dei problemi più semplici.

2.1. Esercizi.

- (1) Usare il principio di sovrapposizione per risolvere l'equazione

$$y'' - 2y' + y = x^2 - 2x + 3 \sin x.$$

- (2) Risolvere le seguenti equazioni, scrivendo la loro soluzione generale

(a) $y'' - 2y' - 3y = 2 \exp x - 3 \exp(2x)$

(b) $y'' - 2y' + y = 3 \sin 2x$

(c) $y'' + 3y' - 4y = 3 \exp x$

(d) $y'' - 2y' + y = 3 \exp x$

(e) $y'' + 4y' + 4y = (2 + x) \exp(-x)$

(f) $y'' - 4y = 4 \exp(2x)$

(g) $y'' + 4y' + 4y = 4x^2 - 8x$

(h) $y'' + 2y' + y = \sin x + \cos 2x$

- (3) Trovare la soluzione particolare di

$$y'' + 3y' + 2y = 2 \exp(3x).$$

- (4) Trovare la soluzione particolare di

$$y'' + 4y = 3 \sin 2x.$$

(5) Risolvere il problema di Cauchy

$$y'' - 2y' + y = x \exp x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5.$$

(6) Trovare la soluzione generale delle equazioni seguenti

(a) $y'' + y = \cos x + 3 \sin 2x$

(b) $y'' - 5y' + 6y = \cosh x$

(c) $y'' + 2y' + y = \cos^2 x$

(7) Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

(a) $y'' + 2y' + 5y = 10 \cos x, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 6$

(b) $y'' - 7y' + 10y = 100x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5$

(c) $y'' - 2y' + y = x^2 - 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

(8) Risolvere, usando il metodo di variazione dei parametri, la seguente equazione:

$$y'' + y = \tan x.$$

(9) Usare il metodo di variazione dei parametri per ottenere la soluzione generale delle seguenti equazioni

(a) $y'' - y' = \sec^2 x - \tan x$

(b) $y'' - 2y' + y = \exp x / (1 - x^2)$

(c) $y'' + y = \sec x \tan x$

(d) $y'' + y = \sec x$

(e) $y'' - 2y' + y = \exp x / x^2$

(f) $y'' + 4y = \cot 2x$

(10) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y'' - 2y' + y = e^x / (1 - x^2), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$$

(11) Verificare che $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = 1/x$ sono soluzioni di

$$x^3 y'' + x^2 y' - xy = 0.$$

Usare questa informazione ed il metodo di variazione dei parametri per trovare la soluzione generale di

$$x^3 y'' + x^2 y' - xy = x / (1 + x)$$

(12) Data l'equazione $y'' - y = x \sin x$:

(a) Risolverla con il metodo dei coefficienti indeterminati

(b) Risolverla col metodo di variazione dei parametri

(13) Considerare l'equazione $y'' + ay' + by = f(x)$, dove $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ e $f(x)$ è un polinomio di grado n . Mostrare che questa equazione ha sempre come soluzione un polinomio di grado n .

(14) Mostrare che la soluzione dell'Esercizio 13 è un polinomio di grado $n + 1$ se $b = 0$.

3. Equazioni di Eulero-Cauchy

Vogliamo adesso iniziare a risolvere equazioni differenziali lineari a coefficienti non costanti, equazioni, cioè, della forma

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (3.1)$$

Una delle equazioni a coefficienti variabili che può essere facilmente risolta è l'equazione di **Eulero³-Cauchy**, detta anche **equazione equi-dimensionale**. Questo ultimo termine proviene dalla considerazione fisica che la dimensione fisica di x è immateriale, poiché si lascia immutata la dimensione del lato sinistro dell'equazione anche se si cambia x con cx , dove c è una costante non nulla.

Essa ha la forma

$$x^2y'' + a x y' + b y = f(x) .$$

Incontreremo questa equazione più avanti, quando studieremo problemi al bordo aventi simmetria circolare.

Assumiamo che sia $x \neq 0$; nella maggior parte dei casi assumeremo $x > 0$, sebbene considereremo anche il caso $x < 0$. Iniziamo con un esempio per illustrare il metodo di soluzione.

ESEMPIO 7. Trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata all'equazione

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = x^2 \exp(-x), \quad x > 0.$$

SOLUZIONE 7. Questa è un'equazione di Eulero-Cauchy. Cerchiamo una soluzione della forma $y(x) = x^m$.

Ne segue che $y'(x) = mx^{m-1}$, $y''(x) = m(m-1)x^{m-2}$. Sostituendo nell'equazione omogenea si ha

$$[m(m-1) + 2m - 2]x^m = 0 .$$

Poiché $x \neq 0$ deve essere

$$m^2 + m - 2 = 0$$

che ha radici $m_1 = -2$ e $m_2 = 1$. Quindi

$$y_o(x) = c_1x^{-2} + c_2x .$$

Da notare che la scelta di cercare una soluzione della forma $y(x) = x^m$ non è casuale, ma dettata dalla forma dell'equazione. La soluzione particolare dell'equazione completa può essere trovata usando il metodo di variazione dei parametri.

ESEMPIO 8. Trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata all'equazione

$$x^2y'' + 3xy' + y = x^3, \quad x > 0.$$

³Leonard Euler (1707-1783), matematico svizzero.

SOLUZIONE 8. La sostituzione $y(x) = x^m$ porta all'equazione algebrica

$$m^2 + 2m + 1 = 0 ,$$

che ha una radice doppia $m = -1$.

In questo caso abbiamo trovato una sola soluzione dell'equazione omogenea associata, che è $y_1(x) = x^{-1}$.

Il metodo, valido per le equazioni a coefficienti costanti, di trovare una seconda soluzione indipendente, moltiplicando $y_1(x)$ per x non funziona in questa situazione. Tale procedura è infatti valida solo per le equazioni a coefficienti costanti. E' facile vedere che $y = 1$ non è soluzione dell'equazione data.

Per trovare la seconda soluzione si può usare il metodo di **riduzione di ordine**.

Si suppone che la seconda soluzione $y_2(x)$ sia della forma $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ e si cerca di capire quale equazione soddisfa la funzione $u(x)$. In questo caso è $y_2(x) = u(x)/x$ e quindi

$$y_2'(x) = \frac{u'x - u}{x^2} ,$$

$$y_2''(x) = \frac{x^2(xu'' - 2u') + 2ux}{x^4} .$$

sostituendo nell'equazione omogenea associata si ottiene

$$xu'' + u' = 0 .$$

L'equazione può essere scritta nella forma

$$(xu')' = 0$$

da cui

$$xu' = c_2$$

e quindi

$$u' = c_2/x$$

da cui si ottiene che

$$u(x) = c_1 + c_2 \log x .$$

Si ottiene quindi che

$$y_2(x) = \frac{u(x)}{x} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x} \log x .$$

poiché il termine $1/x$ è già presente in $y_1(x)$, possiamo dire che

$$y_2(x) = \frac{u(x)}{x} = \frac{c_2}{x} \log x$$

la soluzione generale dell'omogenea associata è

$$y_o(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x} \log x .$$

Vedremo più avanti che la funzione $\log x$ apparirà sempre nel caso di radici ripetute.

ESEMPIO 9. *Trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata a*

$$x^2 y'' + xy' + y = \cos x, \quad x > 0.$$

SOLUZIONE 9. *In questo esempio, dopo aver sostituito $y(x) = x^m$, si ha*

$$m^2 + 1 = 0.$$

le soluzioni sono, quindi x^i e x^{-i} . Ne risulta che la soluzione è

$$y_o(x) = C_1 x^i + C_2 x^{-i}. \quad (3.2)$$

Una soluzione in forma reale, si può ottenere sostituendo C_1 e C_2 con $(c_1 - ic_2)$ e $(c_1 + ic_2)$ rispettivamente, e notando che

$$x^i = \exp(i \log x) = \cos(\log x) + i \sin(\log x).$$

Con queste modifiche, la soluzione può essere scritta nella forma reale

$$y_o(x) = c_1 \cos(\log x) + c_2 \sin(\log x).$$

Vogliamo adesso descrivere i vari casi che si incontrano nella soluzione dell'equazione omogenea di Eulero-Cauchy

$$x^2 y'' + axy' + by = 0. \quad (3.3)$$

La sostituzione di $y_o(x) = x^m$ porta all'equazione algebrica

$$m(m-1) + am + b = 0$$

scritta anche come

$$m^2 + (a-1)m + b = 0. \quad (3.4)$$

Questa equazione è chiamata **equazione ausiliaria** dell'equazione omogenea di Eulero-Cauchy (3.3).

Caso 1 $(a-1)^2 - 4b > 0$. Le radici dell'Eq. (3.4) sono reali e distinte, m_1 ed m_2 . In tal caso è

$$y_o(x) = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} \quad (3.5)$$

e poiché il Wronskiano è

$$\begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1 x^{m_1-1} & m_2 x^{m_2-1} \end{vmatrix} = (m_2 - m_1) x^{m_1+m_2-1} \neq 0$$

le due funzioni x^{m_1} e x^{m_2} sono linearmente indipendenti.⁴

Caso 2 $(a-1)^2 - 4b = 0$. Le radici dell'Eq. (3.4) sono reali e coincidenti, $m_1 = m_2 = m$. ne segue che

$$y_1(x) = x^m$$

è una soluzione dell'Eq. (3.3). La seconda può essere trovata con il metodo di riduzione d'ordine. Poniamo

$$y_2(x) = u(x) x^m.$$

⁴Da notare che l'ipotesi $x > 0$ è qui essenziale.

Derivando e sostituendo nell'equazione si ottiene

$$u [m(m-1) + am + b] x^m + u' (2m + a) x^{m+1} + u'' x^{m+2} = 0 .$$

Il coefficiente di u è zero, essendo la soluzione di (3.4). Inoltre, l'Eq (3.4) insieme alla condizione $(a-1)^2 - 4b = 0$ implicano che $2m+a = 1$. Ne segue che

$$xu'' + u' = 0 ,$$

che è soddisfatta da $u = \log x$. Quindi

$$y_2(x) = x^m \log x . \quad (3.6)$$

Caso 3 $(a-1)^2 - 4b < 0$. Le radici dell'Eq. (3.4) sono complesse coniugate, $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$. Ne segue che le due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea sono

$$y_1(x) = x^{\alpha+i\beta} = x^\alpha x^{i\beta} = x^\alpha \exp(i\beta \log x)$$

e

$$y_2(x) = x^{\alpha-i\beta} = x^\alpha x^{-i\beta} = x^\alpha \exp(-i\beta \log x) .$$

Usando la formula di Eulero⁵ trasformiamo l'esponenziale in forma trigonometrica

$$y_1(x) = x^\alpha [\cos(\beta \log x) + i \sin(\log x)]$$

e

$$y_2(x) = x^\alpha [\cos(\beta \log x) - i \sin(\log x)] .$$

ne segue che la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = x^\alpha [c_1 \cos(\beta \log x) + c_2 \sin(\beta \log x)] . \quad (3.7)$$

Se si cerca la soluzione generale dell'Eq. (3.1) , è necessario aggiungere la soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Tale soluzione può essere trovata usando il metodo di variazione delle costanti, anche se può non essere sempre semplice. Il metodo dei coefficienti indeterminati non può essere usato perché l'equazione di Eulero-Cauchy non è a coefficienti costanti.

Esiste un metodo alternativo per risolvere l'Eq. (3.3). Poiché $x > 0$, possiamo operare la sostituzione

$$u = \log x .$$

Ne segue che $x = \exp u$ ed usando la regola di derivazione composta si ha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} .$$

⁵ $\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{du} \right) \\ &= \frac{1}{x} \frac{d}{du} \left(\frac{dy}{du} \right) \frac{du}{dx} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{du} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du} \right). \end{aligned}$$

Con questo cambiamento di variabile l'Eq. (3.3) viene trasformata in

$$\frac{d^2y}{du^2} + (a-1) \frac{dy}{du} + by = f(\exp u) .$$

Adesso l'equazione è a coefficienti costanti ed i metodi relativi alle equazioni a coefficienti costanti possono essere usati.

Abbiamo considerato solo il caso $x > 0$. Se si vogliono le soluzioni per $x < 0$, allora x può essere sostituito con $-x$ nell'equazione differenziale e nella soluzione.

3.1. Esercizi.

- (1) Risolvere il problema di Cauchy

$$x^2y'' - 2y = 0, \quad y(1) = 6, \quad y'(1) = 3 .$$

- (2) Trovare le soluzioni generali delle seguenti equazioni

(a) $x^2y'' + 5xy' - 5y = 0$

(b) $t^2y'' + 5ty' + 5y = 0$

(c) $r^2u'' + 3ru' + u = 0$

- (3) Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$x^2y'' + xy' - 9y = x^2 - 2x$$

- (4) Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$x^2y'' + xy' + 4y = \log x .$$

- (5) Risolvere il problema di Cauchy

$$x^{2y}y'' - xy' + 2y = 5 - 4x, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0 .$$

- (6) Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

(a) $x^2y''' + xy' = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$

(b) $x^2y'' - 2y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$

- (7) Usare il metodo di riduzione d'ordine per trovare la seconda soluzione di ognuno dei seguenti problemi.

(a) $x^2y'' - xy' + y = 0, \quad y_1(x) = x$

(b) $xy'' + 3y' = 0, \quad y_1(x) = 2$

(c) $x^2y'' + xy' - 4y = 0, \quad y_1(x) = x^2$

(d) $x^2y'' - xy' + y = 0, \quad y_1(x) = x \log x^2$

- (8) Mostrare che i prodotti xy' e x^2y'' rimangono inalterati se si sostituisce x con cx , dove c è una costante non nulla.
- (9) Mostrare che la sostituzione $x = \exp u$ trasforma l'equazione $x^2y'' + axy' + by = 0$, dove a, b sono costanti, nell'equazione

$$\frac{d^2y}{du^2} + (a - 1) \frac{dy}{du} + by = 0 .$$

- (10) Risolvere ognuno dei seguenti problemi ai valori iniziali
- (a) $4x^2y'' - 4xy' + 3y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$
- (b) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$
- (11) Determinare la soluzione generale dell'equazione

$$x^2y'' + axy' = 0 .$$

4. Serie di Funzioni

4.1. Serie di potenze. Per la risoluzione delle equazioni differenziali a coefficienti variabili, abbiamo bisogno, in generale, di ulteriori metodi di soluzione. Tra questi, uno dei più utili è quello della ricerca di soluzioni per serie. Per usare questo metodo bisogna supporre che la soluzione di una data equazione differenziabile sia esprimibile per serie di potenze. Vogliamo, quindi, iniziare ricordando alcune delle proprietà delle serie.

Iniziamo con le serie numeriche.

Ognuna delle seguenti è una serie (somma infinita)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots \quad (4.1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (4.2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \quad (4.3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots \quad (4.4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (4.5)$$

la serie (4.1) è **divergente** perché le **somme parziali**

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + 2, \quad S_3 = 1 + 2 + 3, \quad S_4 = 1 + 2 + 3 + 4$$

formano una **successione**

$$\{S_1, S_2, S_3, \dots\} = \{1, 2, 6, 10, \dots\}$$

divergente.

D'altra parte la serie (4.2) è **indeterminata** perché la successione delle somme parziali

$$\{1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$$

non ammette limite.

Per quanto riguarda la serie (4.3), il test dell'integrale ci mostra che essa è convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$. Per $p = 1$ la serie è chiamata **serie armonica**. La serie (4.4) è una **serie geometrica** e si può dimostrare (test della radice) che essa converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$. la somma di tale serie può essere scritta in forma chiusa, infatti

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1.$$

infine, la serie (4.5) è un esempio di **serie a segni alterni** che si può dimostrare essere convergente, usando il criterio di Leibnitz⁶ che afferma:

CRITERIO 2 (Criterio di Leibnitz). *Data la serie (4.5), se*

1) *Il valore assoluto di ogni elemento della serie è minore o uguale al valore assoluto dell'elemento che lo precede.*

2) *Il limite, per $n \rightarrow \infty$, del termine generale della serie, tende a zero. Allora, la serie a segni alterni converge.*

Vogliamo notare che una cosa è determinare se una serie converge o meno, altro determinare a cosa converge. Non è ovvio, per esempio, che la somma della serie (4.3) converge a $\pi/4$.

Oltre che alle serie numeriche, siamo interessati alle **serie di potenze**, della forma

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \quad (4.6)$$

una tale serie di potenze si dirà **centrata in x_0** .

Notato che la serie banalmente converge se $x = x_0$, siamo interessati a conoscere in quale intervallo di valori di x la serie converge. A determinare cioè un numero $R > 0$ tale che la serie converge per tutti i valori di $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. R è chiamato **raggio di convergenza** della serie di potenze.

ESEMPIO 10. *Trovare il raggio di convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} = (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots$$

SOLUZIONE 10. *Il test del rapporto ci dice che una serie converge se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1,$$

dove u_n rappresenta l' n -esimo termine della serie. Nel caso della serie data, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \left| \frac{(-1)^{n+2} (x-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-1)^{n+1} (x-1)^n} \right| \\ &= |x-1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |x-1| < 1. \end{aligned}$$

Ne segue che deve essere $-1 < x-1 < 1$ o $0 < x < 2$, mostrando che il raggio di convergenza è 1. In molti casi va anche esaminato il comportamento della serie agli **estremi dell'intervallo di convergenza** e questo va fatto separatamente valutando il comportamento delle serie numeriche che si ottengono sostituendo ad x i valori degli estremi

⁶Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716), co-inventore insieme a Isaac Newton del calcolo differenziale, dimostrò il teorema nel 1705.

dell'intervallo. In questo caso si ha che la serie converge per $x = 2$ ma non per $x = 0$ (verificare), quindi l'intervallo di convergenza è $0 < x \leq 2$.

Ottenere la rappresentazione in serie di potenze di una funzione è un'importante strumento matematico, utile in molte applicazioni. Ricordo che lo sviluppo di Taylor⁷

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots \quad (4.7)$$

ed il suo caso particolare ($x_0 = 0$), lo sviluppo di Mac Laurin⁸

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \dots \quad (4.8)$$

Ricordiamo qui, lo sviluppo in serie di Mac Laurin delle funzioni $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$. Mentre le prime tre convergono per tutti i valori di x , l'ultima converge nell'intervallo $-1 < x \leq 1$

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (4.9)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (4.10)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (4.11)$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (4.12)$$

Potrebbe sembrare che qualunque funzione che ammette una infinità di derivate, definite in $x = x_0$ possa essere rappresentata in serie di Taylor in un intorno di x_0 . Ciò non è vero, la condizione è, ovviamente, necessaria ma non sufficiente. Ci sono funzioni che pur ammettendo derivate di tutti gli ordini non sono esprimibili in serie di Taylor, come la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

la quale ammette derivate di qualsiasi ordine in $x_0 = 0$ ma $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni valore di n e quindi il suo eventuale sviluppo sarebbe identicamente nullo⁹, non rappresentando, quindi, la funzione.

⁷Brook Taylor (1685-1731) matematico inglese, scoprì lo sviluppo nel 1712.

⁸Colin Mac Laurin (1698-1746), matematico scozzese.

⁹Lo studente provi l'affermazione calcolando la derivata.

4.1.1. *Esercizi.*

- (1) Mostrare che la serie dell'Es. (51) converge per $x = 2$ e diverge per $x = 0$.
- (2) Usare il criterio del rapporto per mostrare che gli sviluppi di $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$ convergono per $x \in \mathbb{R}$.
- (3) Mostrare che l'intervallo di convergenza della serie di Mac Laurin di $\log(1+x)$ converge per $x \in (-1, 1]$.
- (4) Verificare che

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

- (5) Verificare che

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- (6) Usare la serie di Mac Laurin per calcolare $\sin \frac{\pi}{4}$ e $\cos \frac{\pi}{4}$ alla quarta cifra decimale. (**Sugg:** usare il fatto che l'errore ha lo stesso segno del primo termine scartato, ma valore minore).
- (7) Usare il criterio del rapporto per mostrare che la serie (4.4) converge per $|r| < 1$.
- (8) Identificare la somma della serie

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots$$

e trovare la somma della serie.

- (9) Trovare il raggio di convergenza di ognuna delle seguenti serie di potenze.
 - (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1}$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
 - (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n+1}$
 - (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{2^n}$
 - (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 3^n}$
 - (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(2n)!}$
- (10) Verificare che ognuna delle seguenti serie è convergente
 - (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$
 - (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{2^n}$
 - (d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{(n-1)^2}$
- (11) Verificare che ognuna delle seguenti serie è divergente

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n \log n}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{n!}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$

- (12) Determinare i valori di
- $p > 0$
- per i quali la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \log n}$$

- (13) Determinare i valori di
- $p \in \mathbb{R}$
- per i quali la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

- (14) Considerare la serie
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

(a) Scrivere S_n la somma parziale n -esima in forma chiusa.

(b) Trovare la somma della serie.

- (15) Generalizzare l'esercizio precedente per la serie
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p)}$
- dove
- p
- è un intero positivo.

4.2. Successioni di funzioni e loro convergenza. Ricordiamo cosa vuol dire che una successione di funzioni, definita nell'intervallo $a \leq x \leq b$

$$\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots\},$$

converge alla funzione $f(x)$.

La scrittura

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{per tutti gli } x \in [a, b],$$

significa che la differenza tra $f(x)$ e $f_n(x)$ può essere reso arbitrariamente piccolo, prendendo n sufficientemente grande. Usando un linguaggio matematico più preciso potremmo dire che per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni punto $x_0 \in [a, b]$ si verifica che

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{4.13}$$

per tutti gli n tali che $n \geq N(\varepsilon, x_0)$, un intero. In altre parole, dato $\varepsilon > 0$ e dato $x_0 \in [a, b]$ è possibile trovare un intero N tale che la disuguaglianza (4.13) vale quando $n \geq N$. Da notare che N dipende in generale sia da ε che da x_0 per questo scriviamo $N(\varepsilon, x_0)$.

ESEMPIO 11. *Mostrare che la successione di funzioni*

$$\{x^n\}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

non converge uniformemente.

SOLUZIONE 11. Per $x = 0$ e per $x = 1$ la convergenza è ovvia. Prendiamo $0 < x_0 < 1$ e scegliamo $0 < \varepsilon < 1$. Poiché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 ,$$

poiché la (4.13) diventa $x_0^n < \varepsilon$ o anche $n \log x_0 < \log \varepsilon$ da cui

$$\frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{x_0}} < n . \quad (4.14)$$

Per dimostrare che la successione converge, dobbiamo trovare un intero N grande abbastanza in modo tale che la relazione (4.14) valga per tutti gli $n \geq N$. La (4.14) dimostra chiaramente che N dipende sia da ε che da x_0 , quindi la successione non converge uniformemente. Osservare che la (4.14) ci ricorda anche che si deve avere $\varepsilon > 0$ e $0 < x_0 < 1$. Notare, infine che mentre tutte le funzioni x^n sono continue in $[0, 1]$, la successione converge a zero per $x \in [0, 1)$ ed a uno per $x = 1$, la funzione limite non è, quindi continua.

La convergenza illustrata nell'Es. (52) è chiamata **convergenza puntuale** poiché dato $\varepsilon > 0$ il valore di n , la disuguaglianza (4.14), dipende dalla scelta del punto x_0 nell'intervallo $(0, 1)$.

La convergenza puntuale non garantisce, come l'esempio sopra mostra, la continuità della funzione limite, anche se tutte le funzioni della successione sono continue.

Più avanti, nel corso avremo a che fare con funzioni che sono definite per mezzo di una serie. per esempio, possiamo avere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) ,$$

dove ognuna delle funzioni $u_n(x)$ è definita su un intervallo $I = [a, b]$. Se la serie è puntualmente convergente per ogni $x \in I$, allora la somma della serie è anch'essa una funzione f della variabile x .

Si pongono alcune importanti domande:

- (1) Sotto quali condizioni la funzione f è continua
- (2) Sotto quali condizioni la funzione f è differenziabile
- (3) Sotto quali condizioni si può scrivere

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] dx = \int_a^b f(x) dx \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx .$$

Sotto quali condizioni si può scrivere

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f'(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) .$$

Le risposte a queste domande coinvolgono una nozione di convergenza diversa e più forte della convergenza puntuale, prima descritta.

4.3. Convergenza uniforme. Supponiamo di avere una successione di funzioni $\{f_n(x)\}$ che converge ad una funzione $f(x)$ e, per ogni $\varepsilon > 0$ si abbia la relazione

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

per tutti gli $n > N(\varepsilon)$ e per ogni x appartenente all'intervallo I . Possiamo allora dire che la successione di funzioni **converge uniformemente** su I . In contrasto alla convergenza puntuale, nella convergenza uniforme l'intero N dipende da ε ma non dipende dal punto x così che possiamo scrivere $N(\varepsilon)$.

ESEMPIO 12. *Data la successione di funzioni $f_n(x) = x^n/n$, mostrare che essa converge uniformemente.*

SOLUZIONE 12. *Sia $0 \leq x \leq 1$, $\varepsilon > 0$. Poiché si ha che $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, la disuguaglianza*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

diventa

$$\left| \frac{x^n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

scegliendo ε in modo tale che $1/\varepsilon < n$. Se N è (per esempio) il più piccolo intero maggiore di $1/\varepsilon$, si vede che la relazione εN è indipendente da x . Diremo allora che x^n/n converge a zero uniformemente nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.

Poiché la convergenza di una serie è intimamente correlata alla convergenza di una successione, la discussione precedente si applica anche alle serie. Per esempio, diremo che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

converge *puntualmente* a $f(x)$ se la successione delle **somme parziali** $\{S_n(x)\}$, dove

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x)$$

converge puntualmente alla funzione $f(x)$. In modo simile si definisce la convergenza *uniforme* sull'intervallo I di una serie di funzioni.

Un'idea correlata è quella relativa all'integrale improprio di una funzione contenente un parametro. per esempio, l'integrale

$$F(x) = \int_a^{\infty} f(t, x) dt \quad (4.15)$$

definisce la funzione $F(x)$ se l'integrale improprio converge per ogni valore di $x \in I$. Se $x_0 \in I$, la convergenza puntuale dell'integrale

nell'Eq. (4.15) significa che si può trovare un numero $N(\varepsilon, x_0)$ tale che, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\left| \int_a^\infty f(t, x_0) dt - \int_a^b f(t, x_0) dt \right| = \left| \int_b^\infty f(t, x_0) dt \right| < \varepsilon$$

se $b > N$. Normalmente N dipende sia da x_0 che da ε . D'altra parte, la convergenza è uniforme sull'intervallo I se esiste un numero $N(\varepsilon)$ indipendente da x tale che

$$\left| \int_b^\infty f(t, x_0) dt \right| < \varepsilon$$

per tutti i $b > N$ e per tutti gli $x \in I$.

ESEMPIO 13. *L'integrale improprio*

$$\int_0^\infty xe^{-xt} dt = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

non converge uniformemente nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$, sebbene converga in ogni punto dell'intervallo.

SOLUZIONE 13. *Cominciamo, dimostrando la convergenza puntuale. Consideriamo*

$$\left| \int_b^\infty xe^{-xt} dt \right| = \int_b^\infty xe^{-xt} dt = e^{-xb} < \varepsilon$$

prendendo $b > N$. ne segue che si deve avere $-b < (1/x) \log \varepsilon$ il che mostra che b (ed N) dipendono entrambi sia da x che da ε . Inoltre, se $0 < \varepsilon < 1$ la quantità $|(1/x) \log \varepsilon|$ può essere resa grande quanto si vuole, così che non c'è modo di soddisfare la disuguaglianza $-b < (1/x) \log \varepsilon$ per tutti gli $x \in [0, 1]$ simultaneamente.

ESEMPIO 14. *Mostrare che l'integrale improprio*

$$\int_0^\infty e^{-xt} dt$$

converge uniformemente alla funzione $1/x$ nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$.

SOLUZIONE 14. *Si ha*

$$\left| \int_b^\infty e^{-xt} dt \right| = \int_b^\infty e^{-xt} dt = \frac{e^{-xb}}{x} < \varepsilon$$

se $b > N$, da cui segue che $-b < (1/x) \log x\varepsilon$. Adesso, la parte destra della disuguaglianza varia tra $\log \varepsilon$ e $1/2 \log 2\varepsilon$ mentre x varia tra 1 e 2. Quindi, scegliendo il più grande dei due valori, si ha che la condizione da soddisfare è $-b < 1/2 \log 2\varepsilon$. In questo caso, b (ed N) dipendono solo da ε , mostrando che la convergenza è uniforme nell'intervallo $[1, 2]$.

Nei capitoli successivi risolveremo problemi al bordo con vari metodi legati alle trasformate. In questi casi, le soluzioni saranno espresse in termini di integrali, e noi siamo interessati a conoscere le condizioni per le quali tali integrali possono essere differenziati. Detto altrimenti, se

$$F(x) = \int_c^\infty f(t, x) dt ,$$

si vuole sapere sotto quali condizioni si ha

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^\infty f(t, x) dt \stackrel{?}{=} \int_c^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt .$$

Il seguente teorema, dato senza dimostrazione, fornisce la risposta.

THEOREM 1. *Se*

$$F(x) = \int_c^\infty f(t, x) dt$$

converge uniformemente nell'intervallo $a \leq x \leq b$, e se $\frac{\partial f}{\partial x}$ è continuo in t e in x per $c \leq t$ e $a \leq x \leq b$, e se

$$\int_c^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt$$

converge uniformemente su $a \leq x \leq b$, allora

$$F'(x) = \int_c^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt .$$

THEOREM 2. *Supponiamo che la serie $\sum_n u_n(x)$ sia una serie di funzioni differenziabili nell'intervallo $I = [a, b]$. Supponiamo inoltre che la serie $\sum_n u_n(x_0)$ converga per qualche $x_0 \in I$. Se $\sum_n u'_n(x)$ converge uniformemente su I , allora $\sum_n u_n(x)$ converge uniformemente su I ad una funzione $u(x)$, inoltre*

$$u'(x) = \sum_n u'_n(x) , \quad a \leq x \leq b .$$

4.3.1. Esercizi.

(1) Mostrare che

$$\int_0^\infty \frac{\sin xt \exp(at)}{t} dt = \arctan \frac{x}{a} \quad \text{per } a > 0 .$$

(Sugg: Chiamato $F(x)$ l'integrale improprio, trovare $F'(x)$ e poi integrare.)

(2) Mostrare che

$$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t} dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{per } x > 0 .$$

(Sugg: Considerare

$$G(a) = \int_0^\infty \frac{\sin xt \exp(at)}{t} dt$$

Usare il risultato dell'esercizio precedente per trovare $G(0)$.
Sotto quali condizioni possiamo calcolare $\lim_{a \rightarrow 0} G(a)$?

- (3) Un utile criterio di convergenza uniforme, dovuto a Weierstrass¹⁰ è il seguente:

Sia $\sum_n u_n(x)$ una serie di funzioni definita sull'intervallo I .
Sia $\sum_n M_n$ una serie numerica convergente, a termini non negativi. Se, per ogni $x \in I$ si ha

$$|u_n(x)| \leq M_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

allora la serie $\sum_n u_n(x)$ converge uniformemente su I .

- (a) Mostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ converge uniformemente su $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
(b) Mostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (x \log x)^n$ converge uniformemente su $(0, 1]$
- (4) Mostrare che la successione

$$\left\{ \frac{x}{x+n} \right\}$$

converge puntualmente su $[0, +\infty)$ ed uniformemente su $[0, a]$,
 $a > 0$.

- (5) Mostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$$

è assolutamente convergente (e quindi convergente per tutti gli x) usando il criterio del confronto.

- (6) Mostrare che la serie delle derivate di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n^2 x$$

è divergente per tutti gli x .

- (7) Mostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

(a) converge uniformemente per tutti gli x

(b) Mostrare che la serie delle derivate diverge per alcuni valori di x .

- (8) Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

(a) mostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1,$$

¹⁰Karl T. Weierstrass (1815-1897), matematico tedesco, tra i primi a formulare in modo rigoroso l'analisi matematica.

(b) Derivando, ottenere che

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1,$$

(c) Giustificare la procedura relativa alla parte (b).

5. Soluzioni per serie per e.d.o. del secondo ordine

5.1. Soluzioni in un intorno di un punto ordinario: Consideriamo una equazione lineare del secondo ordine a coefficienti variabili del tipo:

$$\alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y = 0 \quad (5.1)$$

DEFINIZIONE 1. Un punto x_0 è detto un **punto ordinario** dell'equazione differenziale (5.1) se le due funzioni

$$p(x) = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \quad q(x) = \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} \quad (5.2)$$

sono analitiche nel punto x_0 , cioè le funzioni p, q sono sviluppabili in serie di potenze:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-x_0)^n \quad |x-x_0| < R_1, \\ q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x-x_0)^n \quad |x-x_0| < R_2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Se una delle due funzioni in (5.2) non è analitica nel punto x_0 allora x_0 è detto un **punto singolare** dell'equazione (5.1).

THEOREM 3. Se x_0 è un punto ordinario dell'equazione differenziale (5.1) allora la soluzione generale dell'equazione differenziale è sviluppabile in serie di potenze intorno a x_0 .

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad (5.4)$$

con raggio di convergenza positivo. Più precisamente se R_1, R_2 sono raggi di convergenza delle serie in (5.3) il raggio di convergenza di (5.4) è minore o uguale al minimo fra R_1 e R_2 . I coefficienti $a_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ della serie (5.4) possono essere ottenuti, dalla sostituzione diretta di (5.4) nella equazione differenziale (5.1), uguagliando a zero i coefficienti dei termini della stessa potenza.

ESEMPIO 15. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0 \quad (5.5)$$

in un intorno del punto $x_0 = 1$.

SOLUZIONE 15. Differenziando (5.4) termine a termine si ottiene:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$$

e

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2}$$

Sostituendo y , y' , y'' nell'equazione (5.5) si ottiene:

$$\begin{aligned} y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} \\ -2(x-1)y' &= -2(x-1) \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} -2na_n(x-1)^n \\ 2y &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x-1)^n \end{aligned}$$

Poiché è più facile sommare termine a termine le tre serie se i termini generali sono della stessa potenza in ogni serie e l'indice di partenza delle serie è lo stesso per tutte e tre le serie, riscriviamo i tre termini nella forma equivalente:

$$\begin{aligned} (j = n - 2), y'' &= \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1)a_{j+2}(x-1)^j \\ &= 2a_2 + \sum_{j=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n \\ -2(x-1)y' &= \sum_{n=1}^{\infty} -2na_n(x-1)^n \\ 2y &= \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x-1)^n = 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n(x-1)^n \end{aligned}$$

Sommando termine a termine il membro di destra e quello di sinistra risulta:

$$y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0 = (2a_2 + 2a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + 2a_n](x-1)^n$$

Il membro di sinistra è una serie di potenze identicamente uguale a zero, quindi tutti i suoi coefficienti devono essere nulli. Cioè:

$$2a_2 + 2a_0 = 0 \quad (5.6)$$

e

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + 2a_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

La condizione (5.7) è detta formula di ricorrenza perché permette di ottenere a_{n+2} sapendo a_n .

Dalla (5.6) otteniamo:

$$a_2 = -a_0$$

e dalla (5.7) otteniamo

$$a_{n+2} = \frac{2(n-1)}{(n+2)(n+1)} a_n \quad n = 1, 2, \dots$$

Cioè:

$$\begin{aligned} a_3 &= 0, \quad a_4 = \frac{2}{4 \cdot 3} a_2 = -\frac{2}{4 \cdot 3} a_0 = -\frac{2^2}{4!} a_0 \\ a_5 &= 0, \quad a_6 = \frac{2 \cdot 3}{6 \cdot 5} a_4 = -\frac{2^2 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} a_0 = -\frac{2^3 \cdot 3}{6!} a_0 \\ a_7 &= 0, \quad a_8 = \frac{2 \cdot 5}{8 \cdot 7} a_6 = -\frac{2^3 \cdot 5 \cdot 3}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} a_0 = -\frac{2^4 \cdot 5 \cdot 3}{8!} a_0 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo trovato che:

$$a_{2n+1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

e

$$a_{2n} = -\frac{2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-3)}{2n!} a_0 = \frac{2^n (2n-3)!!}{2n!}$$

$$(2n-3)!! = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3) \quad n = 2, 3, \dots$$

In generale $n!!$ è uguale al prodotto dei primi n numeri dispari se n è dispari e al prodotto dei primi n numeri pari se n è pari. Inoltre osserviamo che $2n! = (2n)!!(2n-1)!!$ e $2n!! = 2^n n!$ da cui:

$$a_{2n} = \frac{2^n (2n-3)!!}{2n!} = \frac{2^n (2n-3)!!}{2^n n! (2n-1)!!} = \frac{1}{n! (2n-1)} \quad n = 2, 3, \dots$$

Allora la soluzione generale dell'equazione (5.5) è

$$y(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_4(x-1)^4 + a_6(x-1)^6 + \dots$$

$$= a_1(x-1) + a_0 \left(1 - (x-1)^2 - \frac{1}{2!3}(x-1)^4 - \frac{1}{3!5}(x-1)^6 - \dots \right).$$

Notiamo che operando un cambiamento di variabili $t = x - x_0$, ci si può sempre ricondurre al caso in cui il punto ordinario o singolare sia uguale a 0.

5.2. Soluzioni nell'intorno di un punto singolare regolare.

DEFINIZIONE 2. Un punto x_0 è detto un **punto singolare regolare** dell'equazione differenziale:

$$\alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y = 0$$

se è un punto singolare e le due funzioni

$$(x-x_0)\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = (x-x_0)p(x) \quad (x-x_0)^2\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = (x-x_0)^2q(x) \quad (5.8)$$

sono analitiche nel punto x_0 . Se una delle due funzioni in (5.8) non è analitica nel punto x_0 allora x_0 è detto un **punto singolare irregolare** dell'equazione (5.1).

In un intorno di un punto singolare regolare il metodo di sviluppo in serie visto nel paragrafo precedente non si può applicare. In questo caso si risolve l'equazione differenziale usando il **metodo di Frobenius**, che consiste nel cercare una soluzione della forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} \quad (5.9)$$

con $a_0 \neq 0$ e dove abbiamo supposto $x_0 = 0$ per semplicità. Notiamo che in questo caso oltre ai coefficienti a_n della serie è da determinare anche l'esponente λ .

Sostituendo y definita in (5.9) nell'equazione differenziale (5.1) si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda+n)(\lambda+n-1)x^{n+\lambda-2} + p(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda+n)x^{n+\lambda-1} + q(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} = 0.$$

Si raccoglie x dalla seconda serie e x^2 dalla terza per rendere tutti gli esponenti uguali:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda+n)(\lambda+n-1)x^{n+\lambda-2} + xp(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda+n)x^{n+\lambda-2} + x^2q(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+\lambda-2} = 0.$$

Siccome abbiamo supposto che $x_0 = 0$ sia un punto singolare regolare allora $xp(x)$ e $x^2q(x)$ sono sviluppabili in serie di potenze.

$$\begin{aligned} xp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-x_0)^n \quad |x-x_0| < R_1, \\ x^2q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x-x_0)^n \quad |x-x_0| < R_2. \end{aligned}$$

Sostituendo queste serie nell'equazione si ha:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda+n)(\lambda+n-1)x^{n+\lambda-2} + \\ &+(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda+n)x^{n+\lambda-2} + \\ &+(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots) \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+\lambda-2} = 0. \end{aligned}$$

Consideriamo il coefficiente della potenza di x di grado più basso, cioè $x^{\lambda-2}$, e che si ottiene per $n = 0$, esso è $a_0(\lambda(\lambda-1) + A_0\lambda + B_0)$. Poiché $a_0 \neq 0$ questo implica che si ha $\lambda(\lambda-1) + A_0\lambda + B_0 = 0$.

Più in generale considerando un punto singolare regolare x_0 possiamo definire l'equazione indiciale nel seguente modo:

DEFINIZIONE 3. *Supponiamo che x_0 sia un punto singolare regolare dell'equazione differenziale (5.1) e supponiamo che*

$$\begin{aligned} (x-x_0)p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-x_0)^n \quad |x-x_0| < R_1, \\ (x-x_0)^2q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x-x_0)^n \quad |x-x_0| < R_2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

L'equazione:

$$\lambda^2 + (A_0 - 1)\lambda + B_0 = 0 \quad (5.11)$$

è detta **equazione indiciale** di (5.1) in x_0 .

THEOREM 4. *Supponiamo che x_0 sia un punto singolare regolare dell'equazione differenziale (5.1) e supponiamo che valgano gli sviluppi in serie in (5.10). Siano λ_1 e λ_2 due radici dell'equazione indiciale (5.11) con $\Re(\lambda_1) \geq \Re(\lambda_2)$. Allora una delle soluzioni di (5.1) è della forma:*

$$y_1(x) = |x-x_0|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad (5.12)$$

con $a_0 = 1$ ed è valida nell'intervallo $0 < |x-x_0| < R$ con $R = \min\{R_1, R_2\}$. La seconda soluzione linearmente indipendente $y_2(x)$ dell'equazione (5.1) nell'intervallo $0 < |x-x_0| < R$ si trova nel seguente modo:

CASO 1: Se $\lambda_1 - \lambda_2 \neq \text{intero}$, allora

$$y_2(x) = |x - x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad (5.13)$$

CASO 2: Se $\lambda_1 = \lambda_2$, allora

$$y_2(x) = y_1(x) \ln |x - x_0| + |x - x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad (5.14)$$

CASO 3: Se $\lambda_1 - \lambda_2 = \text{intero}$, allora

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln |x - x_0| + |x - x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad (5.15)$$

La costante C può essere uguale a zero.

ESEMPIO 16. Calcolare la soluzione generale dell'equazione:

$$2x^2 y'' + (x - x^2) y' - y = 0 \quad (5.16)$$

in un intorno di $x_0 = 0$.

SOLUZIONE 16. In questo caso è $\alpha(x) = 2x^2$, $\beta(x) = x - x^2$, $\gamma(x) = -1$.

Poiché $\alpha(0) = 0$, il punto $x_0 = 0$ è un punto singolare dell'equazione differenziale (5.16). D'altra parte si ha che:

$$(x - x_0) \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = x \frac{x - x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$$

$$(x - x_0)^2 \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = x^2 \frac{-1}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

sono funzioni analitiche con raggio di convergenza infinito, il punto $x_0 = 0$ è un punto singolare regolare dell'equazione differenziale (5.16). $A_0 = \frac{1}{2}$, $B_0 = -\frac{1}{2}$, quindi l'equazione indiciale è:

$$2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

con radici $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Una soluzione dell'equazione (5.16) è della forma:

$$y_1(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (5.17)$$

con $a_0 = 1$. Poiché $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{3}{2}$, le due radici dell'equazione indiciale non differiscono per un intero e quindi la seconda soluzione linearmente indipendente è della forma:

$$y_2(x) = |x|^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad (5.18)$$

con $b_0 = 1$. Poiché $R_1 = R_2 = +\infty$ la serie di potenze in (5.17) converge per ogni x . D'altra parte la serie in (5.18) non è definita per

$x = 0$, è definita nell'intervallo $0 < |x| < +\infty$.

Calcoliamo adesso i coefficienti a_n della soluzione (5.17). Si ha che:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \\ y_1'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n x^n \text{ e } y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_n x^{n-1} \\ 2x^2 y_1'' &= \sum_{n=0}^{\infty} 2n(n+1)a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n(n+1)a_n x^{n+1} \\ x y_1' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n x^{n+1} = a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_n x^{n+1} \\ -x^2 y_1' &= -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n x^{n+2} = -\sum_{j=1}^{\infty} j a_{j-1} x^{j+1} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} x^{n+1} \quad (n+1 = j) \\ -y_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} -a_n x^{n+1} = -a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} -a_n x^{n+1} \end{aligned}$$

e sommando membro a membro si ottiene:

$$0 = (a_0 - a_0)x + \sum_{n=0}^{\infty} [2n(n+1)a_n + (n+1)a_n - n a_{n-1} - a_n] x^{n+1}.$$

Uguagliando i coefficienti a zero, si ha la formula ricorsiva:

$$2n(n+1)a_n + (n+1)a_n - n a_{n-1} - a_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a_n = \frac{n a_{n-1}}{2n(n+1) + (n+1) - 1} = \frac{1}{2n+3} a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

per $n = 1$: $a_1 = \frac{1}{5} a_0$

per $n = 2$: $a_2 = \frac{1}{7} a_1 = \frac{1}{5 \cdot 7} a_0$

per $n = 3$: $a_3 = \frac{1}{9} a_2 = \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} a_0$

in generale

$$a_n = \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)} a_0 = \frac{3}{(2n+3)!!} a_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Quindi una soluzione dell'equazione (5.16) in un intorno di x_0 è

$$y_1(x) = a_0 x \left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{3x^n}{(2n+3)!!} + \cdots \right)$$

Calcoliamo, adesso, i coefficienti b_n di y_2 nel caso $x > 0$:

$$y_2(x) = x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-(1/2)}$$

$$y_2'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \frac{1}{2}) b_n x^{n-(3/2)}$$

$$y_2''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) b_n x^{n-(5/2)}$$

Quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} 2x^2 y_2'' &= \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(n - \frac{1}{2} \right) \left(n - \frac{3}{2} \right) b_n x^{n-(1/2)} \\ &= \frac{3}{2} b_0 x^{(-1/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(n - \frac{1}{2} \right) \left(n - \frac{3}{2} \right) b_n x^{n-(1/2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x y_2' &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2} \right) b_n x^{n-(1/2)} \\ &= -\frac{1}{2} b_0 x^{(-1/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2} \right) b_n x^{n-(1/2)} \end{aligned}$$

$$-x^2 y_2' = \sum_{n=0}^{\infty} - \left(n - \frac{1}{2} \right) b_n x^{n+(1/2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{3}{2} \right) b_{n-1} x^{n-(1/2)}$$

$$-y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} -b_n x^{n-(1/2)} = -b_0 x^{(-1/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} -b_n x^{n-(1/2)}$$

sommando membro a membro:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{3}{2} b_0 - \frac{1}{2} b_0 - b_0 \right) x^{(-1/2)} + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[2 \left(n - \frac{1}{2} \right) \left(n - \frac{3}{2} \right) b_n + \left(n - \frac{1}{2} \right) b_n - \left(n - \frac{3}{2} \right) b_{n-1} - b_n \right] x^{n-(1/2)} \end{aligned}$$

Uguagliando ogni coefficiente a zero, si ha la formula ricorsiva:

$$2 \left(n - \frac{1}{2} \right) \left(n - \frac{3}{2} \right) b_n + \left(n - \frac{1}{2} \right) b_n - \left(n - \frac{3}{2} \right) b_{n-1} - b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

cioè:

$$b_n = \frac{\left(n - \frac{3}{2} \right) b_{n-1}}{2 \left(n - \frac{1}{2} \right) \left(n - \frac{3}{2} \right) + \left(n - \frac{1}{2} \right) - 1} = \frac{1}{2n} b_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{per } n = 1: \quad b_1 = \frac{1}{2} b_0$$

$$\text{per } n = 2: \quad b_2 = \frac{1}{2 \cdot 2} b_1 = \frac{1}{2^2 \cdot 2} b_0$$

$$\text{per } n = 3: \quad b_3 = \frac{1}{3} b_2 = \frac{1}{2^3 \cdot 2 \cdot 3} b_0$$

in generale:

$$b_n = \frac{1}{2^n \cdot n!} b_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Quindi la seconda soluzione linearmente indipendente dell'equazione (5.16) in un intorno di x_0 è

$$\begin{aligned} y_2(x) &= b_0 x^{-(1/2)} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} + \dots + \frac{x^n}{2^n \cdot n!} + \dots \right) \\ &= b_0 x^{-(1/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} = b_0 x^{-(1/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^n}{n!} \end{aligned}$$

cioè:

$$y_2(x) = b_0 x^{-1/2} e^{x/2}. \quad (5.19)$$

Ora troviamo la soluzione per $x < 0$. A questo scopo poniamo $x = -t$ nell'equazione differenziale (5.16), dalla regola della catena si ottiene:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = -\frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

L'equazione (5.16) diventa:

$$2t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - (-t - t^2) \frac{dy}{dt} - y = 0. \quad (5.20)$$

Poiché $x < 0$ si ha $t > 0$ in (5.20). L'equazione indiciale per l'equazione (5.20) è la uguale a quella per l'equazione (5.16), le cui radici sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Dobbiamo trovare la soluzione corrispondente a $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ perché per $\lambda_1 = 1$ l'abbiamo già trovata. Analogamente al caso precedente cerchiamo una soluzione del tipo:

$$y_2(t) = |t|^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n,$$

Poiché in questo caso $t > 0$, si ha:

$$y_2(t) = |t|^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n,$$

Calcolando i coefficienti b_n con la diretta sostituzione di $y_2(t)$ nella equazione (5.20), si ottiene:

$$y_2(t) = t^{-1/2} e^{-t/2}, \quad t > 0$$

Ma $t = -x$, quindi si ha che:

$$y_2(x) = (-x)^{-1/2} e^{x/2}. \quad (5.21)$$

Mettendo insieme (5.19) e (5.21) otteniamo che la seconda soluzione linearmente indipendente sia per $x > 0$, che per $x < 0$ di (5.16) è:

$$y_2(x) = |x|^{-1/2} e^{x/2}.$$

Quindi la soluzione generale di (5.16) è:

$$y(x) = c_1 x \left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{x^n}{5 \cdot 7 \dots (2n+3)} + \dots \right) + c_2 |x|^{-1/2} e^{x/2}.$$

dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie.

OSSERVAZIONE 1. Si può dimostrare che se

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (5.22)$$

è una soluzione di (5.1) per $x > 0$, allora anche

$$y(x) = (-x)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (5.23)$$

è una soluzione di (5.1) per $x < 0$, come si è visto nell'esempio precedente. Mettendo insieme (5.22) e (5.23) si ottiene una soluzione sia per $x > 0$ che per $x < 0$:

$$y(x) = |x|^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (5.24)$$

Nei prossimi esempi considereremo solo in caso in cui $x > 0$.

OSSERVAZIONE 2. Nel caso in cui le due soluzioni dell'equazione indiciale non differiscano per un intero rientra anche il caso di avere due soluzioni complesse.

Se i coefficienti di (5.1) sono reali allora anche i coefficienti dell'equazione indiciale saranno reali. Quindi se si ha una soluzione $\lambda_1 = a + ib$, la seconda soluzione dovrà essere la complessa coniugata della prima $\lambda_2 = a - ib$. La differenza $\lambda_1 - \lambda_2 = 2ib$ non può essere un intero quindi avremo una soluzione della forma:

$$y_1(x) = x^{a+ib} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

che è la soluzione che corrisponde alla prima soluzione λ_1 . Allora anche la funzione:

$$y_2(x) = x^{a-ib} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} x^n$$

che è la complessa coniugata di y_1 , è soluzione dell'equazione (5.1), infatti è la soluzione che corrisponde alla seconda radice dell'equazione indiciale λ_2 . Siano:

$$y_1(x) = y_1^1(x) + iy_1^2(x),$$

$$y_2(x) = \overline{y_1(x)} = y_1^1(x) - iy_1^2(x)$$

dove y_1^1 e y_1^2 sono funzioni reali. Qualsiasi combinazione lineare di queste due soluzioni è ancora soluzione, dunque:

$$y_1^1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad y_1^2 = \frac{y_1 - y_2}{2i}$$

sono le due soluzioni reali indipendenti dell'equazione (5.1) per $0 < x < R$. Inoltre dal fatto che vale la formula:

$$x^{a+ib} = x^a (\cos(b \ln x) + i \sin(b \ln x))$$

e ponendo:

$$a_n = c_n + id_n, \quad \overline{a_n} = c_n - id_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dove c_n e d_n sono costanti reali, si ricavano le funzioni y_1^1 ed y_1^2 :

$$\begin{aligned} y_1^1(x) &= x^a (\cos(b \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sin(b \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n) \\ y_1^2(x) &= x^a (\cos(b \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n + \sin(b \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n). \end{aligned}$$

ESEMPIO 17. Trovare la soluzione generale dell'equazione:

$$x^2 y'' + x y' + y = 0 \quad (5.25)$$

in un intorno del punto $x_0 = 0$.

SOLUZIONE 17. In questo caso:

$$p(x) = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{1}{x}; \quad q(x) = \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = \frac{1}{x^2}$$

$x_0 = 0$ è un punto singolare, ma dato che:

$$x p(x) = x \frac{1}{x} = 1; \quad x^2 q(x) = x^2 \frac{1}{x^2} = 1$$

si ha che $x_0 = 0$ è un punto singolare regolare, inoltre si ha $A_0 = 1$, $B_0 = 1$, l'equazione indiciale è:

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Si hanno due soluzioni complesse e coniugate i e $-i$.

Le due soluzioni avranno la forma:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^i \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \\ y_2(x) &= x^{-i} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \end{aligned}$$

Tenendo conto dell'osservazione 2 si ha che y_1 è della forma:

$$y_1(x) = (\cos(\ln |x|) + i \sin(\ln |x|)) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

e la soluzione y_2 è la sua complessa coniugata.

Calcoliamo i coefficienti a_n di y_1 , derivando si ottiene:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \left(-\sin(\ln x) \frac{1}{x} + i \cos(\ln x) \frac{1}{x} \right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + (\cos(\ln x) + i \sin(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= (-\sin(\ln x) + i \cos(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1} + (\cos(\ln x) + i \sin(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1''(x) &= \left(-\cos(\ln x) \frac{1}{x} - i \sin(\ln x) \frac{1}{x} \right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1} + (-\sin(\ln x) + i \cos(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) a_n x^{n-2} \\
&+ \left(-\sin(\ln x) \frac{1}{x} + i \cos(\ln x) \frac{1}{x} \right) \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (\cos(\ln x) + i \sin(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\
&= (-\cos(\ln x) - i \sin(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-2} + (-\sin(\ln x) + i \cos(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) a_n x^{n-2} \\
&+ (-\sin(\ln x) + i \cos(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-2} + (\cos(\ln x) + i \sin(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.
\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione (5.25) si ha:

$$\begin{aligned}
&(-\cos(\ln x) - i \sin(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + (-\sin(\ln x) + i \cos(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) a_n x^n + \\
&+ (-\sin(\ln x) + i \cos(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + (\cos(\ln x) + i \sin(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \\
&+ (-\sin(\ln x) + i \cos(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + (\cos(\ln x) + i \sin(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \\
&+ (\cos(\ln x) + i \sin(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0
\end{aligned}$$

Da cui:

$$(-\sin(\ln x) + i \cos(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} ((n-1)+n+1) a_n x^n + (\cos(\ln x) + i \sin(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} (n(n-1)+n) a_n x^n = 0$$

Cioè:

$$(\cos(\ln x) + i \sin(\ln x)) \sum_{n=0}^{\infty} (2n - in^2) a_n x^n = 0.$$

Poiché $2n$ è un numero naturale e in^2 è un numero immaginario puro, la quantità fra parentesi $2n - in^2$ può essere uguale a zero solo per $n = 0$. Quindi si ottiene:

$$a_n = 0 \quad \forall n \neq 0.$$

Dunque la soluzione y_1 dell'equazione (5.25) è

$$y_1(x) = a_0(\cos(\ln x) + i \sin(\ln x)).$$

Si noti che è lo stesso risultato che si ottiene osservando che l'equazione è una equazione di Eulero e risolvendola, per esempio, con la sostituzione $e^t = x$.

ESEMPIO 18. *Trovare la soluzione generale dell'equazione:*

$$xy'' + (2-x)y' + \frac{1}{4x}y = 0 \tag{5.26}$$

in un intorno del punto $x_0 = 0$.

SOLUZIONE 18. *In questo caso:*

$$p(x) = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{2-x}{x}; \quad q(x) = \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = \frac{1}{4x^2}$$

$x_0 = 0$ è un punto singolare, ma dato che:

$$xp(x) = x \frac{2-x}{x} = 2-x; \quad x^2q(x) = x^2 \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{4}$$

si ha che $x_0 = 0$ è un punto singolare regolare, inoltre si ha $A_0 = 2$, $B_0 = \frac{1}{4}$, l'equazione indiciale è:

$$\lambda^2 + (2-1)\lambda + \frac{1}{4} = 0$$

che ha una radice doppia $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Quindi c'è una soluzione della forma:

$$y_1(x) = x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-(1/2)},$$

derivando,

$$y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right) a_n x^{n-(3/2)}$$

$$y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) a_n x^{n-(5/2)}$$

da cui:

$$xy_1'' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) a_n x^{n-(3/2)} = \frac{3}{4}a_0x^{-(3/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) a_n x^{n-(3/2)}$$

$$\begin{aligned} (2-x)y_1' &= \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(n - \frac{1}{2}\right) a_n x^{n-(3/2)} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right) a_n x^{n-(1/2)} = \\ &= -a_0x^{-(3/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(n - \frac{1}{2}\right) a_n x^{n-(3/2)} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{3}{2}\right) a_{n-1} x^{n-(3/2)} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4x}y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}a_n x^{n-(3/2)} = \frac{1}{4}a_0x^{-(3/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}a_n x^{n-(3/2)}$$

sommando membro a membro:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{4}\right) a_0 x^{-(3/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) a_n + 2 \left(n - \frac{1}{2}\right) a_n - \left(n - \frac{3}{2}\right) a_{n-1} + \frac{1}{4} a_n\right) x^{n-(3/2)} = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n n^2 - \frac{2n-3}{2} a_{n-1}\right) x^{n-(3/2)} = 0 \end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti a zero, si ottiene la formula ricorsiva:

$$a_n = \frac{2n-3}{2n^2} a_{n-1}.$$

Quindi una soluzione è:

$$y_1(x) = a_0 \left(x^{-(1/2)} - \frac{1}{2} x^{1/2} - \frac{1}{16} x^{3/2} + \dots \right)$$

Poiché le radici dell'equazione indiciale sono uguali c'è una seconda soluzione linearmente indipendente della forma:

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-(1/2)}$$

Si ha:

$$y_2'(x) = \frac{y_1(x)}{x} + y_1'(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right) b_n x^{n-(3/2)}$$

$$y_2''(x) = \frac{-y_1(x)}{x^2} + \frac{2y_1'(x)}{x} + y_1''(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) b_n x^{n-(5/2)}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} xy_2'' &= \frac{-y_1(x)}{x} + 2y_1'(x) + xy_1''(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) b_n x^{n-(3/2)} = \\ &= \frac{-y_1(x)}{x} + 2y_1'(x) + xy_1''(x) \ln x + \frac{3}{4}b_0 x^{-(3/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) b_n x^{n-(3/2)} \\ (2-x)y_2' &= (2-x) \left(\frac{y_1(x)}{x} + y_1'(x) \ln x\right) + \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(n - \frac{1}{2}\right) b_n x^{n-(3/2)} - \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right) b_n x^{n-(1/2)} = \\ &= (2-x) \left(\frac{y_1(x)}{x} + y_1'(x) \ln x\right) - b_0 x^{-(3/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(n - \frac{1}{2}\right) b_n x^{n-(3/2)} - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{3}{2}\right) b_{n-1} x^{n-(3/2)} \\ \frac{1}{4x}y_2 &= \frac{1}{4x}y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}b_n x^{n-(3/2)} = \frac{1}{4x}y_1 \ln x + \frac{1}{4}b_0 x^{-(3/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}b_n x^{n-(3/2)} \end{aligned}$$

Sommando membro a membro si ha:

$$\begin{aligned} &\left(xy_1'' + (2-x)y_1' + \frac{1}{4x}y_1(x)\right) \ln x \\ &+ \frac{y_1(x)}{x} + 2y_1'(x) - y_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n n^2 - \frac{2n-3}{2}b_{n-1}\right) x^{n-(3/2)} = 0. \end{aligned}$$

La quantità che moltiplica $\ln x$ è pari a zero in quanto y_1 è soluzione dell'equazione (5.26), quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n n^2 - \frac{2n-3}{2} b_{n-1} \right) x^{n-(3/2)} = -\frac{y_1(x)}{x} - 2y_1'(x) + y_1(x)$$

Uguagliando i coefficienti si ha che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n n^2 - \frac{2n-3}{2} b_{n-1} \right) x^{n-(3/2)} = 2x^{-1/2} - 14x^{1/2} + 1384x^{5/2} + \dots$$

$$b_1 + 12b_0 = 2$$

$$4b_2 - 12b_1 = -14$$

$$9b_3 - 32b_2 = 0 .$$

In conclusione, poiché in questo caso si può scegliere $b_0 = 0$, in quanto, essendo le radici dell'equazione indiciale uguali, il termine che si ottiene per $n = 0$ è già contenuto in y_1 , si ottiene:

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + 2x^{1/2} + 316x^{3/2} + 132x^{5/2} + \dots$$

ESEMPIO 19. Trovare una soluzione generale dell'equazione:

$$x^2 y'' - (x+2)y = 0 \quad (5.27)$$

in un intorno di $x_0 = 0$.

SOLUZIONE 19. In questo caso $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = 0$ e $\gamma(x) = -(x+2)$. Poiché $a_2(0) = 0$, il punto $x_0 = 0$ è un punto singolare dell'equazione differenziale (5.27). Si ha che:

$$(x-x_0) \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0; v$$

$$(x-x_0)^2 \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = -2-x,$$

il punto $x_0 = 0$ è un punto singolare regolare. L'equazione indiciale è ($A_0 = 0$, $B_0 = -2$):

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Le radici sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

Una soluzione dell'equazione (5.27) è del tipo:

$$y_1(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

Poiché le soluzioni differiscono per un intero la seconda soluzione linearmente indipendente è della forma:

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln |x| + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1}.$$

Calcoliamo i coefficienti a_n di y_1 . Si ha che:

$$\begin{aligned}y_1'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)a_n x^{n+1}, \\y_1''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n x^n, \\x^2 y_1''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n x^{n+2}.\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione ed uguagliando i coefficienti si ottiene:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n x^{n+2} - (x+2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n x^{n+2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} &= 0 \\ (2a_0 - 2a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n x^{n+2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+2} &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_n - 2a_n + a_{n-1}) x^{n+2} &= 0.\end{aligned}$$

Si ha, quindi, la formula ricorsiva:

$$\begin{aligned}a_n &= -\frac{1}{n(n+3)} a_{n-1} \\ y_1(x) &= x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{40} + \dots\end{aligned}$$

Calcoliamo, adesso, i coefficienti b_n di y_2 . Si ottiene:

$$\begin{aligned}y_2(x) &= C \left(x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{40} + \dots \right) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} \\ y_2'(x) &= C \left(2x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{10}x^3 + \dots \right) \ln x + C \left(x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{40} + \dots \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)b_n x^{n-2} \\ y_2''(x) &= C \left(2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{10}x^2 + \dots \right) \ln x + C \left(2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{10}x^2 + \dots \right) + \\ &C \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{40}x^2 + \dots \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n-2)b_n x^{n-3}.\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione si ha:

$$\begin{aligned}C \left(2x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \dots \right) \ln x + C \left(3x^2 + \frac{5}{4}x^3 + \dots \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n-2)b_n x^{n-1} - \\ - C \left(x^3 + \frac{x^4}{4} + \dots \right) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - \\ - C \left(2x^2 + \frac{x^3}{2} + \dots \right) \ln x - 2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} = 0.\end{aligned}$$

Da cui:

$$C \left(3x^2 + \frac{5}{4}x^3 + \dots \right) + [(-b_0 - 2b_1) + (-b_1 - 2b_2)x - b_2x^2 - \dots] = 0.$$

Uguagliando i coefficienti a zero si ha:

$$(-b_0 - 2b_1) + (-b_1 - 2b_2)x + (3C - b_2)x^2 + \dots = 0.$$

Ponendo $b_0 = 1$ si ottiene:

$$b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{1}{12}, \quad \dots$$

Dunque la seconda soluzione linearmente indipendente è:

$$y_2(x) = \frac{1}{12} \left(x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{40} + \dots \right) \ln|x| + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \dots \right).$$

In ogni caso, se y_1 è una soluzione dell'equazione (5.1), una seconda soluzione linearmente indipendente è data da $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{[y_1(x)]^2} dx$ che si ottiene con il metodo della riduzione d'ordine.

Infatti, applicando questo metodo cerchiamo una soluzione del tipo y_1v .

Sostituendo tale soluzione nell'equazione (5.1) si ottiene:

$$a_2(x)y_1(x)v''(x) + v'(x)(2a_2y_1'(x) + a_1(x)y_1(x)) + v(x)(a_2(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)) = 0$$

risolvendo in termini di v otteniamo:

$$\frac{v''(x)}{v'(x)} = -2 \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} - p(x)$$

$$\ln|v'| = -2 \ln|y_1(x)| - \int p(x) dx + C$$

$$v'(x) = D|y_1(x)|^{-2} e^{-\int p(x) dx}$$

Ed infine, integrando ancora una volta ambo i membri e prendendo $D = 1$ si ottiene:

$$v(x) = \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{[y_1(x)]^2} dx. \quad (5.28)$$

ESEMPIO 20. Trovare una soluzione generale di:

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0, \quad x > 0. \quad (5.29)$$

SOLUZIONE 20. L'equazione è della forma $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$. Dal fatto che $xp(x) = x(1/x) = 1$ e $x^2q(x) = x^2$, si ha che $x = 0$ è un punto singolare regolare e che $A_0 = 1$, $B_0 = 0$, quindi l'equazione indiciale diventa:

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda = \lambda^2 - \lambda + \lambda = \lambda^2 = 0$$

quindi $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Allora c'è una soluzione della forma:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Sostituendo la serie nell'equazione (5.29) si trova:

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Unificando le tre serie si ottiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

In questo modo si ha:

$$a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n(n-1)a_n + n a_n + a_{n-2}) x^n = 0$$

Uguagliando i coefficienti a zero si ottiene la formula ricorsiva:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0; \\ a_n &= -\frac{1}{n^2} a_{n-2} \end{aligned}$$

Scegliendo $a_0 = 1$ una soluzione è $y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \dots$

Usiamo la formula (5.28) per determinare una seconda soluzione linearmente indipendente:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int 1/x dx}}{\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \dots\right)^2} dx$$

Svolgendo l'integrale al numeratore si ottiene:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{x^{-1}}{\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \dots\right)^2} dx.$$

Svolgendo il quadrato al denominatore si ha:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{x^{-1}}{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{32} + \dots\right)} dx.$$

Dopo aver fatto la divisione di polinomi e risolvendo l'integrale si arriva a:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{x^{-1}}{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{32} + \dots\right)} dx = y_1(x) \int \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{32} + \dots\right) dx \\ &= y_1(x) \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{5x^3}{32} + \dots\right) dx = y_1(x) \left(\ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \dots\right). \end{aligned}$$

Notiamo che con questo metodo alternativo per trovare una seconda soluzione linearmente indipendente, si ottiene una soluzione della forma che si era trovata nel terzo caso del Teorema.

Una soluzione generale dell'equazione (5.29) è $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, con c_1, c_2 costanti arbitrarie.

5.3. Applicazioni. Il metodo di Frobenius è un metodo utile per risolvere alcune equazioni differenziali che compaiono spesso nelle applicazioni. Una di queste è l'equazione di Bessel di ordine p , che è una equazione differenziale della forma:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad (5.30)$$

dove p è una costante.

Vediamo come l'equazione di Bessel appare nella soluzione di problemi specifici.

Supponiamo di conoscere la distribuzione della temperatura in un cilindro al tempo $t = 0$. La temperatura $u = u(r, \theta, t)$ nel punto (r, θ) in ogni istante t soddisfa la seguente equazione differenziale alle derivate parziali in coordinate polari:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \frac{1}{k}u_t. \quad (5.31)$$

In questo caso abbiamo supposto che la temperatura sia indipendente dalla coordinata zeta, che rappresenta l'altezza del cilindro, la quantità k nell'equazione è una costante che dipende dalla conduttività termica e, in generale, dal materiale usato nel costruire il cilindro. Usiamo il metodo della separazione di variabili per risolvere l'equazione. Seguendo questo metodo supponiamo che esista una soluzione $u(r, \theta, t)$ dell'equazione che sia il prodotto di una funzione di r , di una funzione di θ e di una funzione di t . Cioè:

$$u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t),$$

Dove R, Θ, T sono funzioni incognite. Sostituendo u in (5.31), otteniamo:

$$R''\Theta T + \frac{1}{r}R'\Theta T + \frac{1}{r^2}R\Theta''T = \frac{1}{k}R\Theta T'.$$

Possiamo scrivere l'equazione nel modo seguente:

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} - \frac{r^2}{k} \frac{T'}{T} = -\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Il primo membro è una funzione indipendente dalla variabile θ mentre il secondo membro è una funzione della sola θ . Quindi devono essere entrambi uguali ad una costante che chiameremo p^2 . Si ottengono perciò le equazioni:

$$\Theta'' + p^2\Theta = 0 \quad (5.32)$$

e

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} - \frac{r^2 T'}{k T} = p^2$$

oppure in maniera analoga:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} - \frac{p^2}{r^2} = \frac{1}{k} \frac{T'}{T}. \quad (5.33)$$

Il primo membro dell'equazione (5.33) è una funzione solo di r , mentre il secondo membro è una equazione solo di t , quindi ambo i membri devono essere uguali a una costante, che chiameremo $-\lambda^2$. Otteniamo così:

$$T' + \lambda^2 k T = 0 \quad (5.34)$$

e

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda^2 r^2 - p^2) R = 0. \quad (5.35)$$

Le funzioni $\Theta(\theta)$ e $T(t)$ si trovano risolvendo le semplici equazioni differenziali (5.32) e (5.34). Per trovare $R(r)$ bisogna risolvere (5.35), che, come si vede, è un'equazione di Bessel. Infatti operiamo la trasformazione $x = \lambda r$ e poniamo $y(x) = R(r)$, otteniamo:

$$R' = \frac{dR}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} = \lambda y' = \frac{x}{r} y' \quad e \quad R'' = \frac{d}{dx}(\lambda y') \frac{dx}{dr} = \lambda^2 y'' = \frac{x^2}{r^2} y''.$$

Sostituendo R' e R'' in (5.35) troviamo l'equazione di Bessel (5.30), che ora risolveremo in un intorno del punto $x = 0$. Supponiamo per semplicità che $p \geq 0$, si ha che:

$$\alpha(x) = x^2, \quad \beta(x) = x, \quad \gamma(x) = x^2 - p^2.$$

Poiché $\alpha(0) = 0$ si ha che $x = 0$ è un punto singolare. Ma

$$x \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 \quad e \quad x^2 \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = -p^2 + x^2,$$

Così $x = 0$ è un punto singolare regolare con equazione indiciale $\lambda^2 - p^2 = 0$. Le due soluzioni dell'equazione indiciale sono $\lambda_1 = p$, $\lambda_2 = -p$, quindi una soluzione dell'equazione di Bessel è della forma:

$$y_1(x) = |x|^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (5.36)$$

Le soluzioni di (5.30) hanno senso per $|x| > 0$, cioè per $x > 0$, $x < 0$. La seconda soluzione dipende dal valore di $\lambda_1 - \lambda_2 = 2p$. Essa è data da:

Caso 1. Se $2p \neq$, allora

$$y_2(x) = |x|^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n;$$

Caso 2. Se $p = 0$ allora

$$y_2(x) = y_1(x) \ln |x| + |x|^p \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n; \quad (5.37)$$

Caso 3. Se $2p =$, allora

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln |x| + |x|^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \quad (5.38)$$

Calcoliamo i coefficienti a_n .

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p}, \quad y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p) a_n x^{n+p-1},$$

e

$$y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1) a_n x^{n+p-2}$$

$$x^2 y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1) a_n x^{n+p}$$

$$x y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p) a_n x^{n+p}$$

$$x^2 y_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p}$$

$$-p^2 y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -p^2 a_n x^{n+p}$$

$$[p(p-1)a_0 + p a_0 - p^2 a_0] x^p + [(1+p)p a_1 + (1+p)a_1 - p^2 a_1] x^{1+p} +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} [(n+p)(n+p-1)a_n + (n+p)a_n + a_{n-2} - p^2 a_n] x^{n+p} = 0.$$

Questo implica:

$$(1+2p)a_1 = 0$$

$$n(n+2p)a_n + a_{n-2} = 0 \quad n = 2, 3, \dots$$

Quindi, si ottiene:

$$a_1 = 0 \quad a_n = -\frac{1}{n(n+2p)} a_{n-2} \quad n = 2, 3, \dots$$

che implica:

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n} n! (p+1)(p+2) \dots (p+n)} a_0 \quad n = 2, 3, \dots$$

Quindi, la soluzione è data da:

$$y_1(x) = a_0 |x|^p \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (p+1)(p+2) \dots (p+n)} x^{2n} \right]$$

e la serie converge per ogni x .

Se $2p \neq$ una seconda soluzione linearmente indipendente può essere trovata sostituendo p con $-p$ nell'equazione precedente, cioè:

$$y_2(x) = a_0|x|^{-p} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!(p+1)(p+2)\cdots(p+n)} x^{2n} \right].$$

La serie converge per $x > 0$ o $x < 0$.

Nella teoria delle funzioni di Bessel la costante a_0 si prende uguale a

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$$

Dove Γ è la funzione Gamma cioè la funzione definita dall'integrale:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

Con questa scelta di a_0 la soluzione y_1 è detta la funzione di Bessel del primo tipo di ordine p e si indica con $J_p(x)$. Usando l'identità

$$\Gamma(n+p+1) = (n+p)(n+p-1)\cdots(p+2)(p+1)\Gamma(p+1)$$

si ottiene la formula

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}.$$

La soluzione y_2 con a_0 definito da:

$$a_0 = \frac{1}{2^{-p} \Gamma(-p+1)}$$

è una soluzione di Bessel del primo tipo di ordine $-p$ e si denota con $J_{-p}(x)$. Chiaramente

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$$

Quindi $J_p(x)$ è sempre una soluzione dell'equazione di Bessel. Inoltre, quando $2p$ non è un intero, le funzioni $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione di Bessel. Se $p = 0$ e osservando che $\Gamma(n+1) = n!$, otteniamo:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

La funzione $J_0(x)$ è una soluzione dell'equazione di Bessel con $p = 0$. Quando $p = 0$ oppure quando $2p$ è un intero positivo la seconda soluzione linearmente indipendente è della forma (5.37) oppure (5.38) rispettivamente e può essere ottenuta con una sostituzione diretta nell'equazione. Una tale soluzione con una appropriata scelta della costante b_0 è detta funzione di Bessel del secondo tipo.

ESEMPIO 21. *Trovare la soluzione dell'equazione*

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0 \quad (5.39)$$

dove n è costante. Questa equazione è nota come **equazione differenziale di Legendre**¹¹

SOLUZIONE 21. *Poiché i punti $x = \pm 1$ sono punti singolari regolari, possiamo assumere $x = 0$ come centro della serie. Si ha quindi*

$$y = \sum_{m=0} a_m x^m, \quad y' = \sum_{m=1} m a_m x^{m-1}, \quad y'' = \sum_{m=2} m(m-1) a_m x^{m-2}.$$

Sostituendo nella (5.39) si ha

$$\begin{aligned} & \sum_{m=2} a_m m(m-1) x^{m-2} - \sum_{m=2} a_m m(m-1) x^m \\ & - 2 \sum_{m=1} a_m m x^m + n(n+1) \sum_{m=0} a_m x^m = 0. \end{aligned}$$

Sostituendo m con $m+2$ nella prima somma, si ha

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0} a_{m+2} (m+2)(m+1) x^m - \sum_{m=2} a_m m(m-1) x^m \\ & - 2 \sum_{m=1} a_m m x^m + n(n+1) \sum_{m=0} a_m x^m = 0. \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0} [a_{m+2} (m+2)(m+1) - a_m m(m-1) - 2a_m m + a_m n(n+1)] x^m \\ & + 2a_2 + 6a_3 x - 2a_1 x + n(n+1)a_0 + n(n+1)a_1 x = 0. \end{aligned}$$

ponendo i coefficienti di ogni potenza uguale a zero, si ha

$$\begin{aligned} 2a_2 + n(n+1)a_0 &= 0, & a_2 &= \frac{-n(n+1)a_0}{2}, & a_0 & \text{arbitrario.} \\ 6a_3 - 2a_1 + n(n+1)a_1 &= 0, & a_3 &= \frac{[2 - n(n+1)]a_1}{6}, & a_1 & \text{arbitrario.} \end{aligned}$$

In generale possiamo dire che

$$a_{m+2} (m+2)(m+1) - [m(m-1) + 2m - n(n+1)] a_m = 0;$$

$$a_{m+2} = \frac{m(m+1) - n(n+1)}{(m+2)(m+1)} a_m;$$

$$a_{m+2} = \frac{(m-n)(m+n+1)}{(m+2)(m+1)} a_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.40)$$

¹¹Adrien Marie Legendre (1752 - 1833), matematico francese.

L'equazione (5.40) è la relazione ricorrente da cui ricavare i coefficienti. Calcolando i primi coefficienti si ha

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{-n(n+1)}{1 \cdot 2} a_0, \\
 a_4 &= \frac{(2-n)(n+3)}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} a_0, \\
 a_6 &= \frac{(4-n)(n+5)}{6 \cdot 5} a_4 = \frac{-n(n-2)(n-4)(n+1)(n+3)(n+5)}{6!} a_0, \\
 a_3 &= \frac{(1-n)(n+2)}{3 \cdot 2} a_1 = \frac{-(n-1)(n+2)}{3!} a_1, \\
 a_5 &= \frac{(3-n)(n+4)}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} a_1, \\
 a_7 &= \frac{(5-n)(n+6)}{7 \cdot 6} a_5 = \frac{-(n-1)(n-3)(n-5)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!} a_1.
 \end{aligned}$$

Ne segue che la soluzione dell'equazione di Legendre può essere scritta come

$$\begin{aligned}
 y_n(x) &= a_0 \left[1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{n(n-2)(n-4)(n+1)(n+3)(n+5)}{6!} x^6 + \dots \right] \\
 &\quad + a_1 \left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!} x^7 + \dots \right] \quad (5.41)
 \end{aligned}$$

Entrambe le serie relative ai coefficienti a_0 e a_1 convergono per $-1 < x < 1$. Se $n = 0, 2, 4, \dots$ e scegliamo $a_1 = 0$, allora, usando l'Eq.(5.41) le soluzioni dell'equazione diventano

$$\begin{aligned}
 y_0(x) &= a_0, \\
 y_2(x) &= a_0(1 - 3x^2), \\
 y_4(x) &= a_0 \left(1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4 \right), \quad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Se imponiamo la condizione che $y_n(1) = 1$ possiamo calcolare a_0 ed ottenere

$$\begin{aligned}
 P_0(x) &= 1, \\
 P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\
 P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \dots
 \end{aligned} \quad (5.42)$$

Questi polinomi sono chiamati **polinomi di Legendre di ordine pari**.

Se $n = 1, 3, 5, \dots$ e si sceglie $a_0 = 0$, allora le soluzioni dell'Eq.(5.41) diventano

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_1 x, \\ y_3(x) &= a_1 \left(x - \frac{5}{3} x^3 \right), \\ y_5(x) &= a_1 \left(x - \frac{14}{3} x^3 + \frac{21}{5} x^5 \right), \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Se imponiamo ancora la condizione $y_n(1) = 1$, possiamo calcolare a_1 ed avere

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x, \\ P_3(x) &= \frac{1}{2} (5x^3 - 3x), \\ P_5(x) &= \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x), \dots \end{aligned} \tag{5.43}$$

Questi polinomi sono chiamati **polinomi di Legendre di ordine dispari**.

Riprenderemo i polinomi di Legendre nel Paragrafo 8.3 poiché questi polinomi compaiono nella soluzione di problemi al bordo espressi in coordinate sferiche.

5.4. Esercizi:

(1) Risolvere per serie ognuna delle seguenti equazioni:

- (a) $y'' + y = 0$,
- (b) $y'' - y = 0$,
- (c) $y' - y = x^2$,
- (d) $y' - xy = 0$,
- (e) $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

(2) Risolvere in un intorno di $x = 0$ l'equazione:

$$4y'' + x^2y' + x^2y = 0$$

(3) Risolvere in un intorno di $x = 0$ l'equazione:

$$4xy'' + x^2y' - \frac{3}{x}y = 0.$$

(4) Risolvere in un intorno di $x = 2$ l'equazione:

$$(x - 2)y'' + (x + 3)y' + \left(x - \frac{1}{2}\right)y = 0.$$

(5) Risolvere in un intorno di $x = -1$ l'equazione:

$$(x + 1)y'' + xy' - 2y = 0.$$

(6) Classificare i punti singolari per ognuna delle seguenti equazioni differenziali:

- (a) $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
- (b) $x^3y'' - xy' + y = 0$,

(c) $x^2 y'' + (4x - 1) y' + 2y = 0$,

(d) $x^3 (x - 1) y'' + x^4 (x - 1)^3 y' + y = 0$.

(7) Risolvere, con il metodo di Frobenius, le seguenti equazioni differenziali

(a) $xy'' + y' + xy = 0$,

(b) $4xy'' + 2y' + y = 0$,

(c) $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$.

(8) Risolvere l'equazione

$$y'' - xy' - y = 0$$

cercando una soluzione per serie centrata in $x = 1$.

(9) L'equazione differenziale

$$y'' - xy = 0$$

è nota come **equazione di Airy**¹² e le sue soluzioni sono chiamate **funzioni di Airy** che hanno applicazioni nella teoria della diffrazione.

(a) Determinare le soluzioni per serie, centrate in $x = 0$.(b) Determinare le soluzioni per serie, centrate in $x = 1$.

(10) Risolvere il problema di Cauchy

$$y'' + y' + xy = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

(11) Trovare la soluzione generale di

$$y'' + xy' + y = 0.$$

¹²Sir George B. Airy (1801-1892), matematico e astronomo inglese.

CHAPTER 2

Problemi al bordo per le E.D.O.

1. Preliminari

Abbiamo dato una rapida sintesi dei problemi ai valori iniziali per le equazioni del secondo ordine, nei quali venivano assegnati il valore della funzione incognita e della sua derivata prima in un punto assegnato.

In molti problemi di interesse pratico, tuttavia, le condizioni sulla soluzione dell'equazione vengono date relativamente a due punti distinti¹. Per esempio, una funzione $y(x)$ può soddisfare un'equazione differenziale su di un intervallo $a \leq x \leq b$ avendo assegnati i valori che essa assume agli estremi dell'intervallo, cioè avendo assegnati i valori di $y(a)$ e $y(b)$. Questi due valori vengono chiamate **condizioni al bordo** ed il problema complessivo che ne risulta è chiamato **problema al bordo**. In realtà, in questi tipi di problemi possono essere specificate $y(a)$ e $y'(b)$, o $y'(a)$ e $y(b)$ o combinazioni di questi valori.

Iniziamo, illustrando il problema con alcuni esempi semplici nei quali si ha un parametro λ diverso da zero

ESEMPIO 22. *Risolvere il problema al bordo*

$$\begin{aligned}y'' - \lambda^2 y &= 0, \quad 0 < x < a \\ y(0) &= y(a) = 0\end{aligned}$$

SOLUZIONE 22. *Il problema ammette una **unica soluzione**. Infatti, la soluzione generale dell'equazione differenziale è*

$$y(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \sinh \lambda x .$$

La condizione al bordo $y(0) = 0$ implica che $c_1 = 0$, mentre la condizione $y(a) = 0$ implica che $c_2 \sinh \lambda a = 0$. Questa ultima equazione ha come unica soluzione $c_2 = 0$, poiché la funzione $\sinh \lambda x$ è zero solo per $x = 0$. Quindi l'unica soluzione del problema è $y(x) = 0$

Poiché l'equazione dell'esempio precedente è omogenea e le condizioni al bordo sono anch'esse omogenee, potrebbe sembrare che la soluzione nulla sia quella naturale. Il prossimo esempio mostra che si possono avere situazioni diverse.

¹In questo capitolo continueremo a considerare solo equazioni differenziali del secondo ordine.

ESEMPIO 23. *Risolvere il problema al bordo*

$$\begin{aligned}y'' + \lambda^2 y &= 0, \quad 0 < x < a \\ y(0) &= y(a) = 0\end{aligned}$$

SOLUZIONE 23. *Questo problema ammette infinite soluzioni. Infatti, la soluzione generale dell'equazione differenziale è*

$$y(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x .$$

Ancora una volta la condizione $y(0) = 0$ implica che $c_1 = 0$. La condizione $y(a) = 0$, tuttavia, porta all'equazione $c_2 \sin \lambda a = 0$ che è soddisfatta dalla condizione $c_2 = 0$, ma anche dalla condizione $\lambda a = n\pi$, $n = 1, 2, \dots$. In altre parole, se il parametro λ assume uno qualsiasi dei valori

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

allora, la soluzione del problema è

$$y_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

o anche ogni multiplo costante di questa.

Ricordiamo, dall'algebra lineare, che se T è un operatore lineare dello spazio in se (una matrice $n \times n$) che trasforma un vettore n -dimensionale \mathbf{u} in un vettore \mathbf{w} dello stesso spazio, scriviamo $T\mathbf{u} = \mathbf{w}$. Se, tuttavia, per qualche vettore non nullo dello spazio \mathbf{v} si ha che $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ allora, chiamiamo λ autovalore di T e \mathbf{v} autovettore di T corrispondente a λ .

Se definiamo

$$L = \frac{d^2}{dx^2},$$

è semplice vedere che L è un **operatore differenziale lineare** che trasforma funzioni differenziabili due volte in funzioni. Nel caso illustrato, nell'Esempio 51 si ha

$$Ly = -\lambda^2 y ;$$

è quindi naturale chiamare le funzioni $y_n(x)$ dell'Eq. (1.2) **autofunzioni** ed i corrispondenti valori di $\lambda_n^2 = n^2\pi^2/a^2$ **autovalori**. Osserviamo che le autofunzioni non sono uniche poiché se $y(x)$ è una autofunzione, anche $cy(x)$ lo è, qualunque sia il valore della costante c .

ESEMPIO 24. *Trovare gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni del problema al bordo*

$$\begin{aligned}y'' + \lambda^2 y &= 0, \quad 0 < x < \pi \\ y'(0) &= y'(\pi) = 0 .\end{aligned}$$

SOLUZIONE 24. La soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x ,$$

da cui

$$y'(x) = -\lambda c_1 \sin \lambda x + c_2 \lambda \cos \lambda x .$$

la condizione $y'(0) = 0$ implica che $c_2 = 0$, mentre la condizione $y'(\pi) = 0$ da la condizione

$$-\lambda c_1 \sin \lambda \pi = 0 .$$

Sebbene l'equazione sia soddisfatta dalla condizione $c_1 = 0$, questa porterebbe al risultato $y(x) = 0$, chiamata **soluzione banale** del problema. Scegliendo, invece $\lambda = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ per soddisfare la condizione al bordo, si ottengono gli autovalori

$$0, 1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$$

e le corrispondenti autofunzioni

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \cos nx, \dots$$

ESEMPIO 25. Risolvere il problema al bordo, con condizioni al bordo non omogenee.

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \lambda^2 y &= 0 , & 0 < t < 1 \\ y(0) &= 0 , & y(1) = 1 . \end{aligned}$$

SOLUZIONE 25. Dalla soluzione generale

$$y(x) = c_1 \cos \lambda t + c_2 \sin \lambda t ,$$

si ha $c_1 = 0$ poiché $y(0) = 0$. La condizione $y(1) = 1$ implica che

$$c_2 \sin \lambda = 1$$

da cui

$$c_2 = \frac{1}{\sin \lambda}$$

con λ qualsiasi, purché $\lambda \neq \pm n\pi$.

le corrispondenti autofunzioni sono

$$y_\lambda(t) = \frac{\sin \lambda t}{\sin \lambda} .$$

ESEMPIO 26. Trovare gli autovettori e gli autovalori del problema al bordo

$$\begin{aligned} y'' + \lambda^2 y &= 0 , & 0 < x < \pi \\ y'(0) + 2y'(\pi) &= 0 , & y(\pi) = 0 . \end{aligned}$$

SOLUZIONE 26. La soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x ,$$

da cui

$$y'(x) = -\lambda c_1 \sin \lambda x + c_2 \lambda \cos \lambda x .$$

Applicando le due condizioni al bordo si ottiene

$$\begin{cases} c_2\lambda - 2c_1\lambda \sin \lambda\pi + 2c_2\lambda \cos \lambda\pi = 0 \\ c_1 \cos \lambda\pi + c_2 \sin \lambda\pi = 0 . \end{cases}$$

Questo sistema in c_1 e c_2 è facilmente risolubile, ricavando (per esempio) c_1 dalla seconda equazione per sostituirlo nella prima. Si ottiene così, scartando la soluzione banale, che deve essere

$$\cos \pi\lambda = -2 .$$

Ne segue che il problema può avere soluzione non nulla solo se si accetta che λ possa assumere valori complessi. In tal caso, il problema data ha, ovviamente, autovalori ed autofunzioni complesse.

E' del tutto ovvio che il problema del passaggio per due punti assegnati può assumere forme molto diverse. Nei prossimi paragrafi limiteremo il tipo di problemi su cui porre attenzione.

1.1. Esercizi.

- (1) Trovare gli autovalori ed i corrispondenti autovettori per ognuno dei problemi al bordo dati:

(a) $y'' - \lambda^2 y = 0, \quad 0 < x < a, \quad y'(0) = 0, \quad y'(a) = 0$

(b) $y'' - \lambda^2 y = 0, \quad 0 < x < a, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = 1$

(c) $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad 0 < x < a, \quad y(0) = 0, \quad y'(a) = 0$

(d) $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad 0 < x < a, \quad y(0) = 1, \quad y'(a) = 0$

- (2) Determinare, nell'esercizio precedente, se e quando zero è un autovalore. Trovare la corrispondente autofunzione (diversa, ovviamente da zero).

- (3) Trovare le autofunzioni del seguente problema

$$\begin{aligned} y'' + \lambda^2 y &= 0, \quad 0 < x < 2\pi, \\ y(0) - y(2\pi) &= 0, \quad y'(0) - y'(2\pi) = 0 \end{aligned}$$

- (4) Determinare autovalori ed autofunzioni del seguente problema

$$\begin{aligned} y'' + \lambda^2 y &= 0, \quad -1 < x < 1, \\ y(-1) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

- (5) Determinare autovalori ed autofunzioni del seguente problema

$$\begin{aligned} y'' + y' + (\lambda + 1)y &= 0, \quad 0 < x < \pi, \\ y(0) &= y(\pi) = 0 \end{aligned}$$

- (6) Mostrare che il seguente problema

$$\begin{aligned} y'' + (\lambda + 1)y' + \lambda y &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ y'(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

ha solo la soluzione banale, a meno che λ non sia complesso. (Sugg: studiare i tre casi $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$.)

(7) Mostrare che l'unico autovalore reale del problema

$$\begin{aligned}x^2 y'' - \lambda x y' + \lambda y &= 0, \quad 1 < x < 2, \\ y(1) &= 0, \quad y(2) - y'(2) = 0,\end{aligned}$$

è lo zero.

(8) Dimostrare che il problema

$$\begin{aligned}y'' + 9y &= 0, \quad 0 < x < \pi, \\ y(0) &= 1, \quad y(\pi) = -1\end{aligned}$$

non possiede un'unica soluzione.

2. Problemi di Sturm-Liouville

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, le soluzioni di un problema al bordo può assumere forme molto diverse. Ci possono essere soluzioni reali o complesse; inoltre l'insieme delle soluzioni era a volte finito, a volte numerabile ed anche non numerabile. In breve, i risultati possono essere alquanto vari, anche se nella maggior parte dei casi abbiamo studiato problemi relativamente semplici di equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti.

Ci limiteremo, d'ora in poi, allo studio di equazioni differenziali lineari del secondo ordine, cioè equazioni della forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (2.1)$$

I problemi al bordo saranno limitati a problemi della forma

$$\begin{aligned} a_1y(a) + a_2y'(a) &= a_3 \\ b_1y(b) + b_2y'(b) &= b_3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

dove gli a_i e i b_i sono costanti reali con $a_3 \neq 0$ e $b_3 \neq 0$. Un'equazione della forma (5.1), con $a \leq x \leq b$, insieme alle condizioni al bordo (2.2) costituisce un **problema al bordo di passaggio per due punti non omogeneo**. Assumeremo che le funzioni $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, siano continue su $[a, b]$, condizione che ci assicura l'esistenza della soluzione generale dell'equazione differenziale.

Quando l'equazione e le condizioni al bordo sono omogenee, si ha un **problema al bordo di passaggio per due punti omogeneo**.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} a_1y(a) + a_2y'(a) &= 0 \\ b_1y(b) + b_2y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

più avanti, nel risolvere problemi al bordo per le equazioni differenziali alle variabili separabili col metodo della separazione delle variabili (Cap. 3.2) l'Eq. (2.3) sarà generalizzata nell'equazione

$$y'' + p(x, \lambda)y' + q(x, \lambda)y = 0. \quad (2.5)$$

E' questo il tipo di equazioni differenziali che abbiamo studiato nel paragrafo precedente. Da notare, tuttavia, che non tutte le condizioni al bordo considerate erano del tipo considerato nelle Equazioni (2.2) o (??).

Un problema al bordo omogeneo, della forma

$$\frac{d}{dx} \left[r(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda w(x)] y = 0, \quad -\infty < a \leq x \leq b < +\infty \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} a_1y(a) + a_2y'(a) = 0, \\ b_1y(b) + b_2y'(b) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

è chiamato **problema di Sturm-Liouville**² (S-L) se le costanti e le funzioni che compaiono hanno certe proprietà che descriveremo più avanti.

Nell'Eq. (2.6) si richiede che la funzione $r(x)$ sia reale, continua ed abbia derivata continua nell'intervallo $a \leq x \leq b$. Si richiede inoltre che $q(x)$ sia reale e continua, ed infine, che $w(x)$ sia nonnegativa nell'intervallo $a \leq x \leq b$. Può accadere che sia $w(x) = 0$ su un numero finito di punti dell'intervallo. Per quanto riguarda la condizione al bordo (2.7) richiediamo che a_1 e a_2 così come b_1 e b_2 non siano contemporaneamente nulli. Se $r(x) > 0$ per $a \leq x \leq b$ il problema di S-L è detto **regolare**.

Risolvere un problema di S-L significa trovare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ (chiamati **autovalori** o valori caratteristici) per i quali il sistema ammette soluzione non banale e le corrispondenti funzioni $y(x)$ (chiamate **autofunzioni** o funzioni caratteristiche). Problemi di questo tipo compaiono in una varietà di applicazioni, come vedremo.

Vediamo, adesso, qualche esempio, identificando anche gli elementi rispetto al problema generale (2.6)-(2.7).

ESEMPIO 27. *Risolvere il seguente sistema:*

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ y(0) &= 0, & y(\pi) = 0. \end{aligned}$$

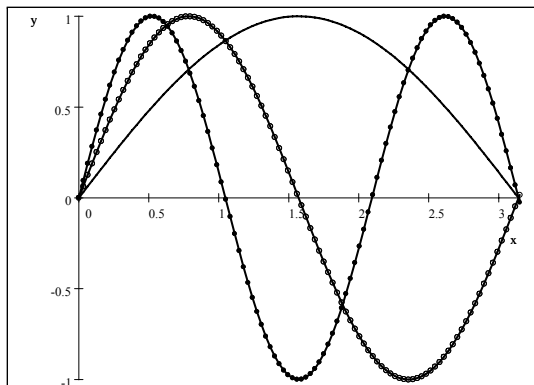
SOLUZIONE 27. *Si ha che $r(x) = 1$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1$, $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 0$. la soluzione dell'equazione differenziale è*

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

con $\lambda > 0$. Se $\lambda \leq 0$, come abbiamo visto, il sistema ammette solo la soluzione banale. Ciò non è di interesse, perché ovviamente, ogni sistema di S-L ammette la soluzione nulla.. da notare che si ammette zero come autovalore, ma non come autovettore. La condizione $y(0) = 0$ implica che $c_1 = 0$ La seconda condizione, $y(\pi) = 0$ implica che si abbia o $c_2 = 0$ (che implicherebbe la soluzione banale) o $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$, cioè $\lambda = n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Cioè gli autovalori del sistema sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 9$, \dots . Le corrispondenti autofunzioni sono

$$y_1(x) = \sin x, \quad y_2(x) = \sin 2x, \quad y_3(x) = \sin 3x, \quad \dots,$$

²Jacques C.F. Sturm (1803-1855), matematico svizzero. Joseph Liouville (1809-1882), matematico francese. Questi due matematici, insieme con Augustin Luis Cauchy (11789-1857), svilupparono la maggior parte della teoria collegata a questi sistemi.



Le autofunzioni $\sin x$, $\sin 2x$ e $\sin 3x$

Vedi Fig. (??). In generale scriveremo

$$y_n(x) = \sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

dove le costanti arbitrarie c_2 sono state poste uguali ad uno, poiché le autofunzioni sono uniche a meno di una costante moltiplicativa.

ESEMPIO 28. Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ y'(0) &= 0, & y'(\pi) = 0. \end{aligned}$$

SOLUZIONE 28. Si ha che $r(x) = 1$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1$, $a_1 = b_1 = 0$, $a_2 = b_2 = 1$. la soluzione dell'equazione differenziale è ancora

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

da questa si ottiene che

$$y'(x) = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

la condizione $y'(0) = 0$ implica che $c_2 = 0$ o $\lambda = 0$. ne segue che si ha

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) \quad e \quad y'(x) = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

la seconda condizione $y'(\pi) = 0$ implica che $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$, cioè $\lambda = n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$

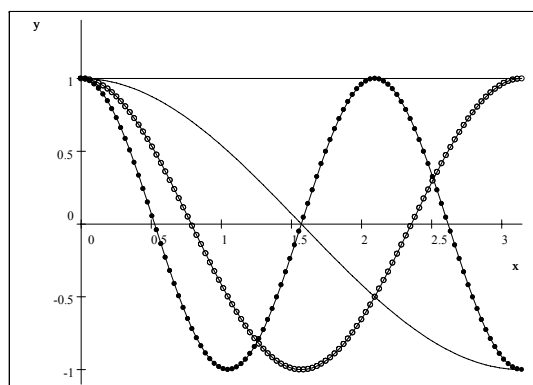
Il caso $\lambda = 0$ va considerato a parte, perché porta ad un problema diverso, cioè

$$y'' = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

Questo problema ammette soluzione costante che può essere assunta uguale ad uno.

ne segue che gli autovalori sono $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 9$, \dots e le autofunzioni sono $y_0(x) = 1$, $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \cos 2x$, $y_3(x) = \cos 3x$, \dots , dove, ancora una volta abbiamo posto le costanti uguali ad uno.

Come nell'esercizio precedente il caso $\lambda \leq 0$ porta solo alla soluzione nulla.

Le autofunzioni $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x$

ESEMPIO 29. Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) + y'(0) &= 0, & y(1) = 0. \end{aligned}$$

SOLUZIONE 29. Si ha che $r(x) = 1$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1$, $a_1 = a_2 = b_1 = 1$, $b_2 = 0$.

Se $\lambda < 0$ si ha solo la soluzione banale.

Se $\lambda = 0$, allora $y(x) = k_1 + k_2x$, e la soluzione che soddisfa le condizioni al bordo è $y_0(x) = 1 - x$.

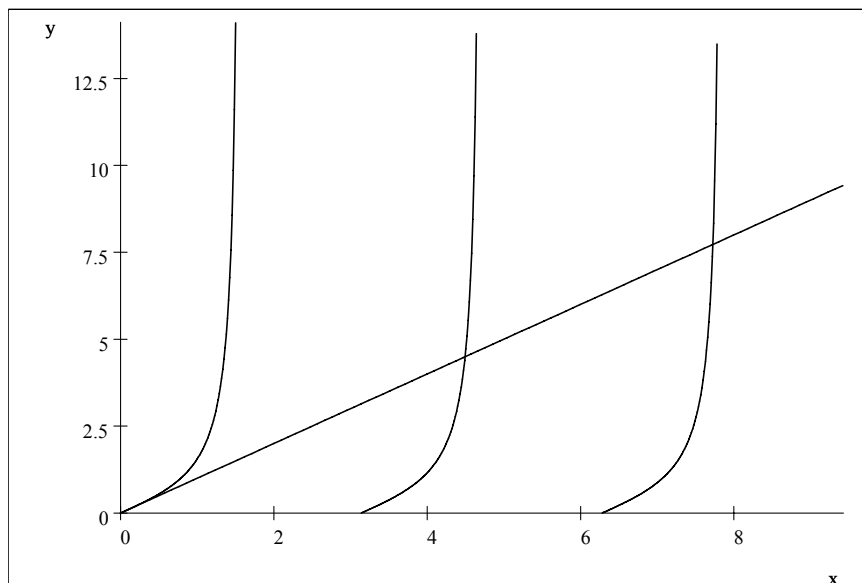
Se $\lambda > 0$ allora si ha la soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Le condizioni al bordo implicano

$$\begin{aligned} c_1 + c_2\sqrt{\lambda} &= 0 \\ c_1 \cos \sqrt{\lambda} + c_2 \sin \sqrt{\lambda} &= 0. \end{aligned}$$

Ne segue che $\sqrt{\lambda} = \tan \sqrt{\lambda}$. Gli autovalori sono, quindi, i quadrati delle soluzioni dell'equazione trascendente $t = \tan t$. Questa equazione non può essere risolta con metodi algebrici, così se tracciamo i grafici delle curve $u = t$ e $u = \tan t$ ed osserviamo i valori di t dove le due curve si intersecano



Soluzioni del sistema $u = t$ e $u = \tan t$

La Figura (??) mostra i primi due autovalori $\lambda_1 \simeq (4.5)^2$ e $\lambda_2 \simeq (7.7)^2$, insieme all'autovalore $\lambda = 0$ che avevamo già trovato. Ci sono una infinità di autovalori ed il loro valore si avvicina al quadrato dei multipli dispari di $\pi/2$. In altre parole,

$$\lambda_n \simeq \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4},$$

con l'approssimazione che diventa migliore all'aumentare di n .

Le autofunzioni corrispondenti agli autovalori λ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ sono

$$y_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x) - \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n}x).$$

Fino ad adesso tutti gli esempi erano relativi ad equazioni differenziali del secondo ordine, molto semplici. Possiamo, tuttavia, dimostrare che ogni equazione differenziale del secondo ordine, lineare omogenea può essere trasformata nella forma mostrata nell'Eq. (2.6).

Consideriamo l'equazione differenziale

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \quad (2.8)$$

con $A'(x) \neq B(x)$. Da notare che se non si impone questa restrizione, l'equazione ha già la forma voluta.

Se moltiplichiamo l'Eq. (2.8) per

$$\frac{1}{A(x)} \exp\left(\int_0^x \frac{B(t)}{A(t)} dt\right) = \mu(x)/A(x),$$

possiamo scrivere il risultato come

$$\frac{d}{dx} \left[\mu(x) \frac{dy}{dx} \right] + \frac{C(x)}{A(x)} \mu(x) y = 0,$$

che è la forma richiesta per il sistema di S-L.

Possiamo semplificare la notazione definendo l'**operatore differenziale lineare** L ,

$$L \equiv \frac{d}{dx} \left[r(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) , \quad (2.9)$$

cioè

$$Ly = \frac{d}{dx} \left[r(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y (ry')' + qy ,$$

dove gli apici indicano la derivazione rispetto ad x . Con questa notazione, l'Eq. (2.6) può essere scritta come

$$Ly = -\lambda y \quad (2.10)$$

Abbiamo parlato di problemi di S-L *regolari*. Un problema di S-L è detto **singolare** se (1) $r(a) = 0$ e $a_1 = a_2 = 0$ oppure (2) $r(b) = 0$ e $b_1 = b_2 = 0$. problemi singolari si hanno anche quando le funzioni $r(x)$ o $w(x)$ si annullano agli estremi $x = a$ o $x = b$, quando $q(x)$ è discontinua in questi punti, o quando l'intervallo $a \leq x \leq b$ è illimitato.

Tratteremo i problemi di S-L singolari saranno trattati nel Par. 2.7. Nel prossimo paragrafo studieremo la proprietà di ortogonalità delle autofunzioni.

2.1. Esercizi.

- (1) Ottenere gli autovalori e le autofunzioni del problema di S-L regolare

$$y'' + \lambda y = 0 , \quad y'(0) = 0 , \quad y(\pi) = 0 .$$

- (2) Trovare gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni di ogni problema

(a) $y'' + \lambda y = 0 , \quad y'(-\pi) = 0 , \quad y'(\pi) = 0 .$

(b) $y'' + \lambda y = 0 , \quad y(0) = 0 , \quad y'(\pi) = 0 .$

(c) $y'' + (1 + \lambda)y = 0 , \quad y(0) = 0 , \quad y(\pi) = 0 .$

(d) $y'' + 2y' + (1 - \lambda)y = 0 , \quad y(0) = 0 , \quad y(1) = 0 .$

(e) $y'' + 2y' + (1 - \lambda)y = 0 , \quad y'(0) = 0 , \quad y'(\pi) = 0 .$

- (3) Trasformare l'equazione dell'Es. (2.e) nella forma (2.6) (**Sugg:** Trovare $\mu(x)$ come mostrato nel testo).

- (4) Mostrare che il problema

$$y'' - 4\lambda y' - 4\lambda^2 y = 0 , \quad y(0) = 0 , \quad y(1) + y'(1) = 0 ,$$

ha solo un autovalore, e trovare la corrispondente autofunzione.

- (5) Risolvere il problema non omogeneo

$$y'' = 1 , \quad y(-1) = 0 , \quad y(1) - 2y'(1) = 0 .$$

- (6) L'equazione di Laguerre

$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0 ,$$

è importante in meccanica quantistica.

- (a) Trasformare l'equazione nella forma (2.6).
 (b) Qual'è la funzione peso $w(x)$?
 (7) L'equazione differenziale di Hermite

$$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$$

interviene nella teoria dell'**oscillatore lineare** in meccanica quantistica

- (a) Trasformare l'equazione nella forma (2.6).
 (b) Qual'è la funzione peso $w(x)$?
 (8) Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due soluzioni linearmente indipendenti dell'Eq. (2.6). provare che il problema di S-L (2.6)-(2.7) ha una soluzione non banale se e solo se il determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 y_1(a) + a_2 y_1'(a) & b_1 y_1(a) + b_2 y_1'(a) \\ a_1 y_2(a) + a_2 y_2'(a) & b_1 y_2(a) + b_2 y_2'(a) \end{vmatrix}$$

è zero. (**Sugg:** Ricordare che un sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \alpha c_1 + \beta c_2 = 0 \\ \gamma c_1 + \delta c_2 = 0 \end{cases}$$

ha soluzione non nulla se e solo se il determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0 .$$

3. Ortogonalità delle autofunzioni

Nel paragrafo 2.2 abbiamo introdotto l'operatore differenziale

$$L \equiv \frac{d}{dx} \left[r(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) , \quad (3.1)$$

cioè

$$Ly = L \equiv \frac{d}{dx} \left[r(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x) y = (ry')' + qy ,$$

con gli apici che indicano la derivazione rispetto ad x . Usando questa notazione, il problema di S-L può essere scritto come

$$Ly = -\lambda wy . \quad (3.2)$$

in questo paragrafo studieremo alcune proprietà delle autofunzioni y dell'operatore differenziale L dell'Eq. (3.2). Prima, tuttavia, abbiamo bisogno di alcune definizioni.

DEFINIZIONE 4. *L'insieme di funzioni $\{\phi_i(x) , i = 1, 2, 3, \dots\}$, ognuna delle quali è continua su (a, b) , è **ortogonale** su (a, b) rispetto alla funzione peso $w(x)$ ³ se*

$$\int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) w(x) dx = 0 \quad \text{se } n \neq m ,$$

³Chiamata anche *funzione densità*

e

$$\int_a^b [\phi_n(x)]^2 w(x) dx \neq 0 .$$

l'ortogonalità delle funzioni, così come data nella definizione sopra, è una generalizzazione della ortogonalità dei vettori. Notare che la *somma* dei prodotti nel prodotto scalare dei vettori è stato sostituito con l'integrale dei prodotti.

Che le autofunzioni dell'Es. (51) formino un *insieme ortogonale* sull'intervallo $0 \leq x \leq \pi$ con funzione peso $w(x) = 1$ è dimostrato parzialmente dal fatto che

$$\int_0^\pi \sin nx \sin mx dx = \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} - \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} \Big|_0^\pi = 0 ,$$

se $n \neq m$. L'ortogonalità di queste autofunzioni è di primaria importanza nello sviluppo in serie di Fourier, come vedremo al Capitolo 4. In modo analogo, l'ortogonalità delle autofunzioni dell'Es. (52) è legata al fatto che

$$\int_0^\pi \cos nx \cos mx dx = \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} - \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} \Big|_0^\pi = 0 ,$$

se $n \neq m$. Quindi, l'insieme

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots\}$$

è un insieme ortonormale nell'intervallo $[0, \pi]$ con funzione peso $w(x) = 1$. Anche questa proprietà tornerà utile nello sviluppo di Fourier.

DEFINIZIONE 5. *L'insieme di funzioni* $\{\phi_i(x) , \quad i = 1, 2, 3, \dots\}$, *ognuna delle quali è continua su* (a, b) , *è* **ortonormale** *su* (a, b) *rispetto alla funzione peso* $w(x)$ *se*

$$\int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) w(x) dx = 0 \quad \text{se } n \neq m ,$$

e

$$\int_a^b [\phi_n(x)]^2 w(x) dx = 1 .$$

Le funzioni ortonormali, come è ovvio, non sono altro che funzioni ortogonali, che sono anche state *normalizzate*. Ancora, abbiamo una analogia con i *versori*.

Introducendo il **delta di Kronecker**⁴

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n , \\ 1, & \text{se } m = n . \end{cases} \quad (3.3)$$

⁴Leopold Kronecker (1823-1891), matematico tedesco.

usando questo simbolo, possiamo scrivere che le funzioni ortonormali soddisfano la proprietà

$$\int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) w(x) dx = \delta_{mn} .$$

E' semplice costruire un insieme ortonormale da un dato insieme ortogonale. Per esempio, l'insieme

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi/2}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi/2}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi/2}}, \dots \right\}$$

è un insieme di autofunzioni ortonormali per il problema nell'Es. (52). L'insieme ortonormale si ottiene dividendo ogni funzione ϕ , dell'insieme ortonormale, per la **norma** della funzione, definita da

$$\|\phi\| = \left(\int_a^b [\phi_n(x)]^2 w(x) dx \right)^{1/2} . \quad (3.4)$$

Da notare ancora, in questo caso, l'analogia con i vettori, dove si ottiene un vettore unitario dividendo un vettore per la sua norma., cioè per la radice quadrata della *somma* dei quadrati delle componenti.

Vogliamo studiare sotto quali condizioni le autofunzioni dell'operatore differenziale L , definito nell'Eq. (3.1), formano un insieme ortonormale. Se y_1 e y_2 sono funzioni due volte differenziabili su (a, b) , si ha

$$\begin{aligned} y_1 Ly_2 - y_2 Ly_1 &= y_1 (ry_2)' - y_2 (ry_1)' \\ &= y_1 (ry_2'' + r'y_2') - y_2 (ry_1'' + r'y_1') \\ &= r' (y_1 y_2' - y_2 y_1') + r (y_1 y_2'' - y_2 y_1'') \\ &= [r (y_1 y_2' - y_2 y_1')]'. \end{aligned}$$

Questo ultimo risultato è noto come **identità di Lagrange**⁵. D'altra parte, se λ_n è l'autovalore appartenente a y_1 mentre λ_2 è un autovalore corrispondente a y_2 , allora, dall'Eq. (3.2) si ha che

$$y_1 Ly_2 - y_2 Ly_1 = (\lambda_1 - \lambda_2) w y_1 y_2 .$$

Quindi, uguagliando queste due quantità, si ha

$$(\lambda_1 - \lambda_2) w y_1 y_2 = [r (y_1 y_2' - y_2 y_1')]'. \quad (3.5)$$

Integrando tra a e b si ottiene

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b w(x) y_1(x) y_2(x) dx = [r (y_1 y_2' - y_2 y_1')]_a^b . \quad (3.5)$$

Si ha, quindi, che se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono ortogonali nell'intervallo (a, b) , con funzione peso $w(x)$, se le condizioni al bordo

⁵Joseph L. Lagrange (1736-1813), matematico di estrazione frances, educato in Italia.

sono tali che il lato destro dell'Eq. (3.5) si annulla. Per un problema di S-L regolare, con $r(x) > 0$ su (a, b) e

$$\begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) &= 0, \end{aligned}$$

si ha

$$[r(y_1 y_2' - y_2 y_1')] \Big|_a^b = 0, \quad (3.6)$$

come è facile da dimostrare.

Abbiamo così provato il seguente teorema.

THEOREM 5. *In un problema di S-L regolare,*

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[r(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda w(x)] y = 0, & -\infty < a \leq x \leq b < +\infty, \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

autofunzioni appartenenti ad autovalori diversi sono ortogonali su (a, b) con funzione peso $w(x)$.

Il Teorema (5) implica che le autofunzioni di un problema di S-L regolare possono essere usate per formare un insieme ortonormale di funzioni. Queste funzioni, a loro volta, sono utili per approssimare altre funzioni, come mostreremo nel Par. 2.4. Nel Par.2.7 vedremo che, sotto certe altre condizioni, l'Eq. (3.6) può essere soddisfatta in modo da ottenere autofunzioni ortogonali anche per problemi non regolari.

3.1. Esercizi.

- (1) Stabilire la relazione di ortogonalità per le autofunzioni del problema

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) + y'(0) &= 0, & y(1) = 0. \end{aligned}$$

- (2) Trovare l'insieme delle funzioni ortonormali per il problema

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ y'(0) &= 0, & y(\pi) = 0. \end{aligned}$$

- (3) Determinare l'insieme delle funzioni ortonormali per ognuno dei seguenti problemi. Notare che in alcuni casi lo zero può essere un autovalore.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y'' + \lambda y &= 0, & y(0) = 0, & y'(\pi) = 0 \\ \text{(b)} \quad y'' + (1 + \lambda) y &= 0, & y(0) = 0, & y(\pi) = 0 \\ \text{(c)} \quad y'' + \lambda y &= 0, & y'(0) = 0, & y'(c) = 0 \\ \text{(d)} \quad y'' + \lambda y &= 0, & y(0) = 0, & y(\pi) = 0 \end{aligned}$$

- (4) Dato il problema

$$y'' + 2y' + (1 - \lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

(a) Verificare che le autofunzioni sono

$$y_n(x) = \exp(-x) \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(b) Trasformare il problema in modo da dargli la forma (3.7).

(c) verificare che le autofunzioni in (a) sono ortonormali su $[0, 1]$ usando l'appropriata funzione peso.

(5) Dato il problema

$$y'' + 2y' + (1 - \lambda)y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

(a) Verificare che le autofunzioni sono $y_0 = 1$ e $y_n(x) = \exp(-x)(n \cos nx + \sin n\pi x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

(b) Ottenere un insieme di autofunzioni ortonormali partendo dalle autofunzioni in (a)

(6) Dato il problema

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(-\pi) = y'(\pi) = 0$$

(a) Verificare che le autofunzioni del problema sono $y_n(x) = \cos \frac{n}{2}(x + \pi)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

(b) Ottenere un insieme di autofunzioni ortonormali partendo dalle autofunzioni in (a)

(7) Mostrare che l'identità di Lagrange implica che $\int_a^b y_1 L y_2 dx = \int_a^b y_2 L y_1 dx$ se le funzioni y_1 e y_2 soddisfano le equazioni (2.6)-(2.7). Questo mostra che L è un operatore bilineare simmetrico nello spazio delle funzioni reali differenziabili due volte su (a, b) che soddisfano le condizioni al bordo (2.7).

4. Serie ortonormali di funzioni

L'insieme di vettori di \mathbb{R}^n

$$S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$$

dove,

$$\mathbf{e}_i = (e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in}), \quad \text{con } e_{ij} = \delta_{ij},$$

forma una **base naturale** per \mathbb{R}^n . Dalla definizione si vede che i vettori sono a due a due ortogonali, cioè che il **prodotto scalare** di due qualunque di questi vettori è dato da

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}.$$

Come è ben noto, un importante conseguenza di questo fatto è che qualsiasi vettore \mathbf{v} di \mathbb{R}^n può essere scritto in uno ed in un solo modo come

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{e}_i$$

dove i c_i sono scalari. Inoltre, i c_i sono determinati da

$$c_k = (\mathbf{v}, \mathbf{e}_k)$$

e quindi l'espressione di \mathbf{v} diventa:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i .$$

Definiamo adesso il prodotto scalare, rispetto alla funzione peso $w(x)$ di due funzioni, definite nello stesso intervallo (a, b) , come

$$(f, g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx \quad (4.1)$$

Perché la definizione si utile, deve essere $w(x) \geq 0$ su (a, b) . Assumeremo anche, per semplificare la teoria, che le funzioni siano **continue a tratti** nell'intervallo (a, b) . Questo significa che l'intervallo può essere partito in un numero finito di sotto-intervalli tali che:

- (1) f è continua su ognuno dei sotto-intervalli
- (2) f ammette limiti sinistro e destro finiti agli estremi di ogni intervallo della partizione.

Diamo un esempio per chiarire il concetto.

La funzione f definita da

$$\begin{cases} 2t, & \text{per } 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{per } 1 \leq t \leq 2, \\ -1, & \text{per } 2 \leq t \leq 3, \end{cases}$$

è continua a tratti nell'intervallo $[0, 3]$. Nel punto $t = 1$, il limite sinistro è $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 2$ mentre il limite destro è $\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = 1$.

La figura sotto mostra il grafico della funzione

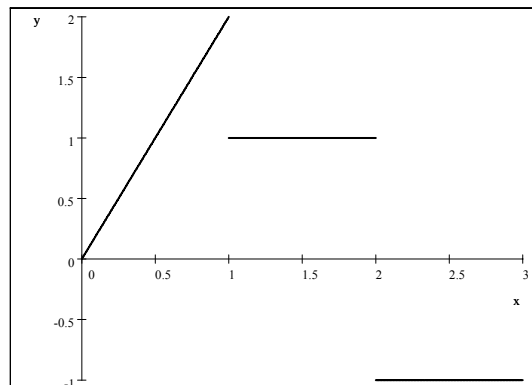


Grafico della funzione

Vogliamo notare che le funzioni continue appartengono alla classe delle funzioni continue a tratti e che i punti di continuità sono caratterizzati dal fatto che limite destro e sinistro sono uguali ed uguali al valore della funzione nel punto. Il tipo di discontinuità ammesso viene anche chiamata **discontinuità a salto** (finito).

Osserviamo che il prodotto scalare definito in Eq. (4.1) ha tutte le proprietà che definiscono un prodotto scalare. Per esempio, se f, g e h sono funzioni continue a tratti su (a, b) e c è una costante, si ha

- a) $(f, g) = (g, f)$
- b) $(f, g + h) = (f, g) + (f, h)$
- c) $(f, c g) = c (f, g)$.

Definiamo la norma di una funzione come

$$\|f\| = (f, f)^{1/2} = \left(\int_a^b w(x) f^2(x) dx \right)^{1/2} . \quad (4.2)$$

Dalla definizione segue che $\|f\| = 0$ se e solo se $f(x) = 0$ eccetto al più un numero finito di punti. Noi considereremo uguali due funzioni che differiscano solo in un numero finito di punti del comune intervallo di definizione. Con questa convenzione, possiamo dire che $\|f\| = 0$ se e solo se $f(x) \equiv 0$. Inoltre si ha che

$$\|c f\| = |c| \|f\| \quad \text{per ogni costante } c \in \mathbb{R} .$$

Possiamo adesso tracciare una analogia all'espressione dei vettori, esprimendo una funzione f in termini di una **base infinito dimensionale** di funzioni ortonormali. Supponiamo che l'insieme di funzioni

$$\{\phi_i(x) , \quad i = 1, 2, \dots\}$$

sia ortogonale su (a, b) . Sia f una funzione continua a tratti su (a, b) e $w(x) > 0$ la funzione peso relativa alla famiglia $\{\phi_i\}$. Si può, allora, scrivere

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x) \quad (4.3)$$

dove le c_i sono appropriate costanti.

Perché la serie sopra scritta, abbia un senso, bisogna dare un significato alle costanti c_i e determinare quale tipo di convergenza soddisfa la serie, in modo da un'idea di *come* la serie converge ad f .

Per il momento definiamo i coefficienti c_i . Chiariremo la questione della convergenza nel Paragrafo 2.5 .

Definiamo i coefficienti come segue

$$c_i = (f, \phi_i) = \int_a^b w(x) f(x) \phi_i(x) dx \quad (4.4)$$

4.1. Esercizi.

- (1) Sia $w(x) = 1$. calcolare il prodotto scalare delle seguenti funzioni

- (a) $f(x) = 1$, $g(x) = x$
- (b) $f(x) = 1$, $g(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$
- (c) $f(x) = x$, $g(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

- (2) Verificare che l'insieme di funzioni $\{1, x, 1 - 3x^2\}$ forma un insieme ortogonale nell'intervallo $[-1, 1]$ con funzione peso $w(x) = 1$
- (3) Trasformare l'insieme dell'Es.2 in un insieme ortonormale.
- (4) Verificare che l'insieme di funzioni $\{1, x, 5x^2 - 1\}$ forma un insieme ortogonale nell'intervallo $[-1, 1]$ con funzione peso $w(x) = 1 - x^2$.
- (5) Trasformare l'insieme dell'Es.4 in un insieme ortonormale.
- (6) Esprimere la funzione $1 + x^2$ in termini delle funzioni ortogonali dell'Es. 2, cioè

$$1 + x^2 = c_1 + c_2x + c_3(1 - 3x^2).$$

Notare che in questo caso l'uguaglianza vale.

- (7) Ripetere l'Es. 6 per la funzione x^3 . Il risultato mostra che non tutte le funzioni possono essere rappresentate in termini delle funzioni dell'Es. 2.
- (8) Mostrare che tutti i polinomi di grado due possono essere rappresentati come combinazioni lineari delle funzioni dell'Es. 2.
- (9) Mostrare che l'insieme di funzioni $\{1, x, x^2\}$ non è ortogonale su $[-1, 1]$ rispetto alla funzione peso $w(x) = 1$
- (10) Trovare il valore delle costanti a_i in modo che l'insieme di funzioni $\{a_1, a_2x, a_3x^2 + a_4x + a_5\}$ formi un insieme ortogonale su $[-1, 1]$ rispetto alla funzione peso $w(x) = 1$.
- (11) Riferendosi all'Es. 11, costruire un insieme di funzioni ortogonali su $[-1, 1]$ rispetto alla funzione peso $w(x) = 1$ che sia diverso da quello dato nell'Es.2

5. Convergenza e completezza

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato la rappresentazione di funzioni continue a tratti $f(x)$ in serie di funzioni ortonormali

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \phi_i) \phi_i(x) \quad (5.1)$$

dove le funzioni $\phi_i(x)$ appartengono ad un insieme di funzioni ortonormali sull'intervallo (a, b) , con funzione peso $w(x)$. Il prodotto scalare tra le funzioni essendo definito da

$$(f, \phi_i) = \int_a^b w(x) f(x) \phi_i(x) dx \quad (5.2)$$

Il problema che ci vogliamo porre è quello della **convergenza** della serie alla funzione f .

Per questo scopo, introduciamo la **somma parziale**

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n (f, \phi_i) \phi_i(x) . \quad (5.3)$$

Ricordiamo che la funzione $S_n(x)$ è sempre ben definita come combinazione lineare finita di funzioni. Questo ci permette di considerare la differenza

$$|S_n(x) - f(x)| \quad (5.4)$$

al variare di n e di x . Come abbiamo ricordato nel Par. 1.6, se per $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste un $N(\varepsilon)$ tale che

$$|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in (a, b), \quad \forall n > N(\varepsilon),$$

allora la serie **converge uniformemente** ad $f(x)$ per tutti gli $x \in (a, b)$. Se d'altra parte si ha che $N = N(\varepsilon, x)$ allora la serie **converge puntualmente** a $f(x)$.

Entrambi questi criteri sono troppo stringenti per le situazioni che vogliamo considerare, dobbiamo, quindi introdurre un criterio più lasco, tenendo conto che abbiamo a che fare con funzioni continue a tratti.

il criterio che useremo è quello di *minimizzare* la norma della differenza

$$\|S_n(x) - f(x)\|.$$

A questo scopo, consideriamo la somma

$$\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$$

e cerchiamo di determinare i coefficienti c_i in modo tale da minimizzare

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) - f(x) \right\|.$$

Usando la definizione di norma, si ha che

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) - f(x) \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) - f(x), \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) - f(x) \right) \quad (5.5)$$

$$= \sum_{i=1}^n c_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n c_i (f, \phi_i) + (f, f) \quad (5.6)$$

$$= \sum_{i=1}^n [c_i^2 - (f, \phi_i)]^2 - \sum_{i=1}^n (f, \phi_i)^2 + \|f\|^2 \quad (5.7)$$

che si ottiene sommando e sottraendo lo stesso termine $\sum_{i=1}^n (f, \phi_i)^2$. Quest'ultima espressione è, ovviamente, minima quando

$$\sum_{i=1}^n [c_i^2 - (f, \phi_i)]^2 = 0,$$

quando, cioè, si ha

$$c_i = (f, \phi_i). \quad (5.8)$$

I coefficienti c_i definiti nell'Eq. (5.8) sono chiamati **coefficienti generalizzati di Fourier**⁶ di f o coefficienti di Fourier di f rispetto all'insieme ortonormale $\{\phi_i\}$. Sostituendo i coefficienti (5.8) nell'Eq. (5.5) si ottiene

$$\left\| \sum_{i=1}^n (f, \phi_i) \phi_i(x) - f(x) \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n (f, \phi_i)^2, \quad (5.9)$$

nota come **identità di Bessel**⁷. Poiché il lato sinistro dell'Eq. (5.9) è positivo, ne segue che

$$\sum_{i=1}^n (f, \phi_i)^2 \leq \|f\|^2, \quad (5.10)$$

relazione nota come **disuguaglianza di Bessel**. Questa, a sua volta, implica che la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \sum_{i=1}^n (f, \phi_i)^2$$

è convergente. Ne discende che

$$\lim_{i \rightarrow \infty} c_i = 0.$$

Questo importante risultato, che useremo nel Par. 4.5 può essere enunciato, come nel seguente teorema

THEOREM 6. (Teorema di Riemann-Lebesgue⁸) *La successione dei coefficienti generalizzati di Fourier è una successione convergente a zero, cioè*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} c_i = \lim_{i \rightarrow \infty} (f, \phi_i) = 0.$$

Vorremmo anche che potesse essere

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} (f, \phi_i) \phi_i - f \right\|^2 = 0 \quad (5.11)$$

e, di conseguenza

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \phi_i) \phi_i.$$

Questa conclusione, purtroppo, non è sempre vera, a meno di non porre ulteriori restrizioni alla funzione f ed all'insieme ortonormale $\{\phi_i\}$. da

⁶Jean B.J. Fourier (1768-1830), matematico e fisico francese.

⁷Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), matematico e fisico tedesco, fondatore della moderna astronomia.

⁸Il risultato fu dapprima dimostrato da George F.B. Riemann (1826-1866), matematico tedesco, per le funzioni continue, ed esteso poi da Henry L. Lebesgue (1875-1941) per classi di funzioni più generali.

notare che poiché,

$$\|f\|^2 = \int_a^b w(x) f^2(x) dx ,$$

si richiede che non solo f ma anche f^2 sia integrabile in (a, b) . la funzione f deve allora appartenere alla classe delle **funzioni a quadrato sommabile**, funzioni, cioè che soddisfano la condizione

$$\int_a^b w(x) f^2(x) dx < +\infty .$$

Inoltre,, poiché

$$\int_a^b w(x) \phi_i^2(x) dx = 1 ,$$

anche le funzioni ϕ_i devono essere a quadrato integrabile. Infine, il sistema ortonormale deve essere **completo** rispetto ad una data classe di funzioni⁹, secondo la seguente definizione

DEFINIZIONE 6. *la famiglia ortonormale di funzioni $\{\phi_i\}$ è completa, rispetto ad una data classe di funzioni, se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b w(x) [S_n(x) - f(x)]^2 dx = 0 \quad (5.12)$$

per ogni funzione f della classe. L'Eq. (5.12) viene anche scritta nella forma

$$l.i.m. S_n(x) = f(x) ,$$

dove *l.i.m.* sta per *limite in media*. Questo tipo di convergenza è chiamata **convergenza in media quadratica**.

osserviamo che la proprietà di completezza di un sistema ortonormale di funzioni $\{\phi_i\}$ è legato ad una certa classe di funzioni. Una conseguenza della definizione è che nessuna funzione non nulla della classe data, può essere ortogonale a *tutte le funzioni* ϕ_i . Questa proprietà è chiamata **chiusura** ed è definita come

DEFINIZIONE 7. *Il sistema ortonormale $\{\phi_i\}$ è **chiuso** su (a, b) se, l'unica funzione f , continua a tratti su (a, b) , che soddisfa l'equazione*

$$(f, \phi_i) = \int_a^b w(x) \phi_i(x) f(x) dx = 0 \quad \forall i$$

è la funzione nulla su (a, b) .

⁹Esempi di "classi di funzioni" sono: le funzioni continue, funzioni continue a tratti, funzioni integrabili, funzioni a quadrato integrabile, funzioni periodiche, ...

Si può dimostrare che un sistema ortonormale è chiuso se e solo se è completo. La disuguaglianza di Bessel (5.10), può anche essere scritta nella forma

$$\sum_{i=1}^{\infty} (f, \phi_i)^2 \leq \|f\|^2, \quad (5.13)$$

Si può dimostrare che l'uguaglianza vale solo se il sistema è completo. L'equazione risultante

$$\sum_{i=1}^{\infty} (f, \phi_i)^2 = \|f\|^2 \quad (5.14)$$

è chiamata **identità di Parseval**¹⁰.

Vogliamo sottolineare come la convergenza in media, definita dall'Eq. 5.12) non implica la convergenza puntuale, né la convergenza puntuale implica la convergenza in media. In altre parole, quest'ultima è uno speciale tipo di convergenza che, come vedremo, è intimamente correlata con i problemi al bordo.

5.1. Esercizi.

- (1) Dire perché una funzione continua a tratti su (a, b) è a quadrato sommabile.
- (2) Mostrare che l'insieme delle funzioni

$$\left\{ \phi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin ix, \quad i = 1, 2, \dots \right\}$$

è ortonormale nell'intervallo $[0, 2\pi]$ con funzione peso $w(x) = 1$.

- (3) Mostrare che l'insieme dell'esercizio precedente non è completo nella classe delle funzioni continue in $[0, 2\pi]$. (**Sugg:** cercare una funzione non nulla che è ortogonale a tutte le funzioni date).
- (4) Partendo da

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i \phi_i - f \right\|^2$$

considerare le c_i come variabili e scrivere la condizione necessaria per l'esistenza di un massimo o minimo.

- (5) Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente perché

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i \phi_i - f \right\|^2$$

sia minimo, è che $c_i = (f, \phi_i)$.

¹⁰Marc-Antoine Parseval de Chênes (1755-1836), matematico francese.

- (6) Provare che se un insieme è completo, allora è chiuso. (**Sugg.:** Usare la contraddizione; assumere che esista una funzione normalizzata $\psi(x)$ tale che

$$c_i = \int_a^b w(x) \phi_i(x) \psi(x) dx = 0 \quad \forall i .$$

Mostrare allora che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| \sum_{i=1}^n c_i \phi_i - \psi \right|^2 = 1 ,$$

contraddicendo l'ipotesi di completezza.

- (7) Dimostrare che

$$\|f - g\| \geq \| \|f\| - \|g\| \| .$$

- (8) Dimostrare che se un insieme di funzioni è chiuso, allora è completo. (**Sugg.:** Assumere che esista una funzione f tale che

$$\int_a^b w(x) f^2(x) dx - \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 > 0 ,$$

dove $c_i = (f, \phi_i)$. Considerare quindi

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$$

che converge in media a $g(x)$ dove $c_i = (g, \phi_i) = (f, \phi_i)$. Ne segue che $\psi = f - g$ è non nulla, ortogonale a tutte le ϕ_i e

$$\|\psi\| \geq \| \|g - g_n\| - \|f - g_n\| \| > 0$$

il che mostra che ψ non è nulla, può essere quindi normalizzata e quindi il sistema non è chiuso.

6. Equazioni auto-aggiunte

Problemi al bordo che coinvolgono equazioni differenziali aventi una forma speciale, sono di particolare importanza nelle applicazioni. E' di queste equazioni e problemi di cui ci occuperemo in questo paragrafo.

iniziamo considerando un'equazione differenziale lineare, omogenea del secondo ordine

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0 . \quad (6.1)$$

la sostituzione $u_1 = y$ e $u_2 = y'$, trasforma l'Eq. (6.1) nel sistema di due equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} u_1' = & u_2 , \\ u_2' = -a_2(x) u_1 - a_1(x) u_2 . \end{cases} \quad (6.2)$$

Questo sistema può essere scritto in forma matriciale, come segue

$$\mathbf{u}' = A(x) \mathbf{u} \quad (6.3)$$

dove

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(x) & -a_1(x) \end{pmatrix}.$$

L'equazione

$$\mathbf{v}' = -A^T(x) \mathbf{v} \quad (6.4)$$

dove A^T indica la matrice trasposta della matrice A , è chiamata **equazione aggiunta** dell'Eq. (6.3). Se scriviamo esplicitamente l'equazione vettoriale (6.4) si ha

$$\begin{cases} v_1' = a_2(x) v_2, \\ v_2' = -v_1 - a_1(x) v_2. \end{cases}$$

e l'equazione del secondo ordine, equivalente è

$$w'' - (a_1(x) w)' + a_2(x) w = 0. \quad (6.5)$$

Chiamiamo l'Eq. (6.5) la **aggiunta** dell'Eq. (6.1). La relazione è, ovviamente, simmetrica.

Di particolare importanza sono le **equazioni auto-aggiunte**, cioè quelle equazioni che sono uguali alla loro aggiunta. Possiamo notare dall'Eq. (6.5) che ogni equazione in cui $a_1(x) \equiv 0$ è necessariamente auto-aggiunta. Più in generale, la relazione di "aggiuntezza" è definita nel seguente modo. Se un'equazione differenziale, lineare omogenea è data da

$$a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0 \quad (6.6)$$

allora, la sua equazione aggiunta è

$$[a_2(x) y]'' - [a_1(x) y]' + a_0(x) y = 0. \quad (6.7)$$

Allora, l'Eq. (6.6) è auto-aggiunta se e solo se

$$a_1(x) = a_2'(x). \quad (6.8)$$

La relazione (6.8) mostra che ogni equazione differenziale del secondo ordine, della forma

$$\frac{d}{dx} \left[a_2(x) \frac{dy}{dx} \right] + a_0(x) y = 0$$

è necessariamente auto-aggiunta. In particolare, i problemi di S-L, esaminati nel Par. 2.2, sono problemi al bordo che coinvolgono equazioni auto-aggiunte. Inoltre, nel Par. 2.2 abbiamo mostrato che ogni equazione differenziale omogenea può essere messa in forma autoaggiunta moltiplicandola per il termine $\mu(x)/a_2(x)$, dove

$$\mu(x) = \exp \left(\int^x \frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt \right). \quad (6.9)$$

Nella Definizione (4) si è definita l'ortogonalità delle **funzioni a valori reali**. Quella definizione può essere generalizzata alle funzioni di **variabile complessa** nel modo seguente. L'insieme di funzioni complesse

$$\{\phi_i(x), i = 1, 2, \dots\},$$

ognuna delle quali è continua nell'intervallo $[a, b]$ è **ortogonale in senso hermitiano**¹¹ con funzione peso reale $w(x)$ se

$$\int_a^b \phi_n(x) \overline{\phi_m(x)} w(x) dx = 0, \quad n \neq m,$$

e

$$\int_a^b \phi_n(x) \overline{\phi_n(x)} w(x) dx \neq 0,$$

dove la barra indica il *complesso coniugato*. Osservare che la definizione di ortogonalità hermitiana si riduce all'ortogonalità data nella Definizione (4) quando le funzioni $\phi_i(x)$ siano funzioni reali.

ESEMPIO 30. *Mostrare che le funzioni*

$$\exp(ix), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

sono ortogonali, in senso hermitiano nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ con funzione peso $w(x) = 1$.

SOLUZIONE 30. *Si ha*

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx \\ &= \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \text{se } n \neq m, \end{aligned}$$

mentre il risultato è 2π se $n = m$.

Ricordiamo che nell'Es. (26) il problema aveva autovalori complessi e autofunzioni complesse. In generale un problema di S-L regolare

$$\frac{dy}{dx} \left[r(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda w(x)] y = 0, \quad a \leq x \leq b \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) &= 0, \end{aligned}$$

è tale che $r(x)$, $q(x)$, e $w(x)$ sono funzioni reali e i coefficienti a_i e b_i sono reali.

Se $y(x)$ è una funzione a valori complessi e λ è un numero complesso, possiamo prendere i complessi coniugati dei termini dell'Eq.

¹¹Charles hermite (1822-1901), matematico francese.

(6.10) per ottenere

$$\frac{dy}{dx} \left[r(x) \frac{d\bar{y}}{dx} \right] + [q(x) + \bar{\lambda}w(x)] \bar{y} = 0, \quad a \leq x \leq b$$

$$a_1 \bar{y}(a) + a_2 \bar{y}'(a) = 0$$

$$b_1 \bar{y}(b) + b_2 \bar{y}'(b) = 0 .$$
(6.11)

Se moltiplichiamo l'equazione differenziale ((6.10) per $\bar{y}'(x)$ e l'equazione differenziale in (6.11) per $y(x)$ e sottraiamo, si ha

$$\frac{dy}{dx} [r(x) (\bar{y}y' - \bar{y}'y)] = w(x) \bar{y}y (\bar{\lambda} - \lambda) .$$
(6.12)

Integrando tra a e b si ha

$$(\bar{\lambda} - \lambda) \int_a^b w(x) |y(x)|^2 dx = 0 ,$$
(6.13)

dalla quale si conclude che $\bar{\lambda} = \lambda$. Abbiamo dimostrato il seguente teorema

THEOREM 7. *Gli autovalori di un sistema di Sturm Liouville regolare sono reali.*

Un'altra proprietà importante degli autovalori di un problema di Sturm Liouville regolare è molto più difficile da provare. Enunciamo il teorema.

THEOREM 8. *Gli autovalori λ_k di un problema di Sturm Liouville regolare possono essere ordinati,*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_k < \dots$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty .$$

Il teorema precedente implica che l'insieme degli autovalori $\{\lambda_k\}$ è inferiormente limitato. E' anche vero che ad ogni autovalore corrisponde un solo autovettore che è unico a meno di un fattore costante.

6.1. Esercizi.

- (1) Determinare la matrice $A(x)$ descritta in (6.3) per ognuna delle seguenti equazioni differenziali,, nelle quali n è un intero non negativo e λ è una costante

(a) $y'' + \lambda^2 y = 0$

(b) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0$

(c) $y'' + y' - \lambda y = 0$

(d) $\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n + 1) y = 0$

- (2) Usando i risultati dell'Es. 1, trovare la matrice trasposta $A^T(x)$ e scrivere l'equazione aggiunta di ognuna delle equazioni precedenti.

- (3) Combinare ogni coppia di equazioni, trovate nell'Es.2, per scrivere un'equazione del secondo ordine.
- (4) Quale delle equazioni dell'Es. 1 è autoaggiunta?
- (5) Trasformare ciascuna delle equazioni seguenti nella forma di S-L

$$\frac{d}{dx} \left[r(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda w(x)] y = 0.$$

(a) $y'' + 2xy' + (x + \lambda)y = 0$

(b) $x^2y'' + xy' + \lambda xy = 0$

(c) $(x + 2)y'' + 4y' + (x + \lambda e^x)y = 0$

- (6) Supposto che u e \tilde{u} siano le soluzioni dell'Eq. (6.3), così che la matrice fondamentale Φ di soluzioni del sistema (6.2) è data da

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} u_1 & \tilde{u}_1 \\ u_2 & \tilde{u}_2 \end{pmatrix},$$

mostrare che $(\Phi^T)^{-1}$ è la matrice fondamentale di soluzione del sistema (6.4).

- (7) mettere la seguente equazione in forma autoaggiunta:

$$xy'' - 2x^2y' + y = 0.$$

- (8) Mostrare che l'identità di Lagrange (Par. 2.3) può essere scritta come:

$$\int_a^b (y_1 L y_2 - y_2 M y_1) dx = a_2 y_2' y_1 - y_2 (a_2 y_1)' + y_2 a_1 y_1 \Big|_a^b$$

dove L e M sono operatori aggiunti e a_2 ed a_1 sono quelli dell'Eq. (6.6).

- (9) Sia L l'**operatore integrale** definito da

$$(Lx)(t) = \int_a^b K(t, s) x(s) ds$$

dove la funzione $x(t)$ appartiene alla classe delle funzioni integrabili in $[a, b]$. Definito il prodotto scalare di due funzioni come

$$(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt,$$

(a) mostrare che L è un operatore lineare.

(b) mostrare che se il **nucleo** $K(t, s)$ è simmetrico ($K(t, s) = K(s, t)$), allora $(Lx, y) = (y, Lx)$, cioè L è un operatore autoaggiunto.

- (10) verificare che la **trasformata di Laplace**

$$\mathcal{L}[x(t)] = \int_0^\infty x(t) \exp(-st) dt$$

è un operatore autoaggiunto.

(11) Data l'equazione differenziale di Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$

(a) scriverla nella forma

$$Ly = - [(1 - x^2)y']' - \lambda y .$$

(b) Mostrare che l'operatore differenziale di Legendre è autoaggiunto.

7. Altri sistemi tipo Sturm-Liouville

Sebbene ogni equazione differenziale possa essere scritta in forma autoaggiunta, non tutte le equazioni danno luogo ad un problema di S-L regolare. Può accadere che nell'equazione

$$\frac{d}{dx} \left[r(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda w(x)] y = 0 , \quad a \leq x \leq b \quad (7.1)$$

le funzioni $r(x)$, $q(x)$, $w(x)$ non abbiano le necessarie proprietà; oppure che il problema al bordo non sia della forma

$$\begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) &= 0 , \end{aligned} \quad (7.2)$$

richiesta perché il problema sia regolare.

Poiché alcuni importanti problemi appartengono ai casi eccezionali sopra citati, abbiamo necessità di estendere i metodi, indicati in questo capitolo, in modo da includere anche alcuni casi speciali. Per esempio, l'equazione di Bessel di ordine n definita nell'intervallo $0 < t < \lambda c$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \left(1 - \frac{n^2}{t^2} \right) y = 0 , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.3a)$$

con il cambiamento di variabile $t = \lambda x$ diventa

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\lambda^2 x^2 - n^2) y = 0 , \quad (7.4)$$

che in forma autoaggiunta viene scritta come:

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(\lambda^2 x - \frac{n^2}{x} \right) y = 0 \quad (7.5)$$

definita nell'intervallo $0 < x < c$.

L'Eq. (7.5), tuttavia, non è un problema di S-L regolare. Un problema simile si ha per l'equazione di Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

che è nella forma autoaggiunta è

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n+1)y = 0 \quad (7.6)$$

dove $\lambda = n(n+1)$, e dove siamo interessati in soluzioni definite nell'intervallo $(-1, 1)$.

Ricordiamo che, per un problema di S-L regolare, le condizioni poste sono le seguenti:

- (1) (a) $r(x)$ continua con derivata continua e $r(x) > 0$.
- (b) $q(x)$ continua.
- (c) $w(x)$ continua e $w(x) > 0$.

Se una di queste condizioni non vale, o se l'intervallo $a \leq x \leq b$ non è limitato, allora l'equazione differenziale di S-L (7.1) è chiamata **singolare**. Ne segue che le equazioni (7.5) e (7.6) sono singolari.

Può anche accadere che sebbene l'equazione di S-L sia non singolare, le condizioni al bordo non siano della forma (7.2). Consideriamo il seguente esempio.

ESEMPIO 31. *Trovare gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni del seguente problema*

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, & -c \leq x \leq c, \\ y(-c) &= y(c), & y'(-c) = y'(c). \end{aligned}$$

SOLUZIONE 31. *Questo tipo di condizioni al bordo sono chiamate **condizioni al bordo periodiche**. Le ritroveremo più avanti, quando considereremo problemi al bordo definiti su regioni circolari.*

Lasciamo per esercizio, dimostrare che per $\lambda < 0$ si ha solo la soluzione nulla. Per $\lambda > 0$ si ha

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x \\ y'(x) &= -c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x. \end{aligned}$$

La condizione $y(-c) = y(c)$ implica che

$$2c_2 \sin \sqrt{\lambda}c = 0,$$

che può essere soddisfatta o da $c_2 = 0$ o da $\sqrt{\lambda} = n\pi/c$, $n = 1, 2, \dots$

La condizione $y'(-c) = y'(c)$ implica che

$$2c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}c = 0,$$

che può essere soddisfatta o da $c_1 = 0$ o da $\sqrt{\lambda} = n\pi/c$.

Ne segue che gli autovalori sono

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

le autofunzioni corrispondenti sono

$$y_n(x) = a_n \cos \frac{n\pi}{c}x + b_n \sin \frac{n\pi}{c}x, \quad (7.7)$$

dove gli a_n e i b_n sono costanti arbitrarie non nulle.

$\lambda = 0$ è un autovalore con autofunzione

$$y_0(x) = \frac{1}{2}a_0,$$

dove a_0 è una costante arbitraria.

L'ortogonalità delle autofunzioni dell'Es. (31) risulterà utile quando studieremo le serie di Fourier. Da notare che in questo caso si ha che ad ogni autovalore λ_n corrispondono le due autofunzioni linearmente indipendenti $\cos \frac{n\pi}{c}x$ e $\sin \frac{n\pi}{c}x$.

Nel caso di condizioni al bordo periodiche è possibile dimostrare un teorema simile al Teorema (5).

THEOREM 9. *Dato un problema di S-L regolare con condizioni al bordo periodiche e tale che $r(a) = r(b)$, autofunzioni appartenenti ad autovalori diversi sono ortogonali su $[a, b]$ con funzione peso $w(x)$.*

PROOF. Le condizioni al bordo periodiche sono

$$y(a) = y(b) \quad , \quad y'(a) = y'(b) \quad .$$

Dall'Eq. (3.5) si ha

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b w(x) y_1(x) y_2(x) dx = [r(y_1 y_2' - y_2 y_1')] \Big|_a^b . \quad (7.8)$$

e il lato destro dell'equazione diventa

$$\begin{aligned} & r(b) [y_1(b) y_2'(b) - y_2(b) y_1'(b)] - r(a) [y_1(a) y_2'(a) - y_2(a) y_1'(a)] \\ &= r(a) [y_1(a) y_2'(a) - y_2(a) y_1'(a)] - r(a) [y_1(a) y_2'(a) - y_2(a) y_1'(a)] = 0 . \end{aligned}$$

□

E' importante notare che se $r(x)$ è costante su $[a, b]$, allora $r(a) = r(b)$ e quindi le condizioni al bordo periodiche portano ad autofunzioni ortogonali. Dall'Eq. (7.8) possiamo notare che la condizione $r(a) = r(b) = 0$ è sufficiente per dimostrare che autofunzioni corrispondenti ad autovalori differenti sono ortogonali. Ne segue che le funzioni $y_n(x)$ che sono continue su $[-1, 1]$ e soddisfano l'Eq. (7.6) formano un sistema ortogonale con funzione peso $w(x) = 1$. Queste funzioni sono chiamate **polinomi di Legendre** e saranno studiati nel Par. 7-3.

Vediamo inoltre dall'Eq. (7.8) che le condizioni

$$r(a) = 0 \quad , \quad y_1(b) y_2'(b) - y_2(b) y_1'(b) = 0 \quad , \quad (7.9)$$

o

$$r(b) = 0 \quad , \quad y_1(a) y_2'(a) - y_2(a) y_1'(a) = 0 \quad , \quad (7.10)$$

sono sufficienti a assicurare l'ortogonalità delle autofunzioni.

Il seguente teorema copre, in generale, di autofunzioni di un **sistema di S-L singolare**.

THEOREM 10. *Le autofunzioni di un problema di S-L singolare su $[a, b]$ sono ortogonali su $[a, b]$, con funzione peso $w(x)$, se esse sono a quadrato integrabile e se*

$$[r(x) (y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x))] \Big|_a^b = 0$$

per ogni coppia distinta di autofunzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

7.1. Esercizi.(1) L'equazione di Mathieu¹²

$$\ddot{y} + (\lambda + 16d \cos 2t) y = 0, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

$$y(0) = y(\pi), \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(\pi)$$

è un caso speciale dell'equazione di Hill¹³

$$\ddot{y} + a(t) y = 0,$$

dove $a(t)$ è una funzione periodica. Mostrare che se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono soluzioni periodiche, di periodo π , dell'equazione di Mathieu corrispondenti ad autovalori distinti, esse sono ortogonali su $[0, \pi]$ con funzione peso unitaria.

(2) Risolvere il seguente problema

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$y(0) + y(\pi) = 0, \quad y'(0) + y'(\pi) = 0.$$

(3) Ottenere la soluzione di ognuno dei seguenti problemi singolari di S-L

$$(a) \quad y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad y(0) = 0, \quad |y(x)| < M$$

$$(b) \quad y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad y'(0) = 0, \quad |y(x)| < M$$

$$(c) \quad y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad |y(x)| < M$$

(4) Mostrare che $\lambda = 0$ non è un autovalore per alcuno dei problemi dell'Es. 3(5) Le soluzioni dell'equazione differenziale di Tchebycheff¹⁴

$$(1 - x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.11)$$

sono i *polinomi di Tchebycheff* definiti da

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (7.12)$$

(a) Mostrare che $x = \pm 1$ sono punti singolari regolari dell'Eq. (7.11).(b) Risolvere l'Eq. (7.11) per serie e notare che la restrizione su n è necessaria perché la soluzione converga per $x = \pm 1$.

(c) Scrivere i primi sei polinomi di Tchebycheff.

(d) Mostrare che i $T_n(x)$ sono ortogonali su $(-1, 1)$ con funzione peso $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ (**Sugg:** Fare la sostituzione $t = \arccos x$ in (7.12)).

(e) Spiegare come l'Eq. (7.11) porta ad un problema di S-L singolare.

(f) Mostrare che il quadrato della norma è dato da

$$\|T_0\|^2 = \pi, \quad \|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2} \quad \text{per } n > 0.$$

¹²Émile L. Mathieu (1835-1890) matematico applicato francese.

¹³George W. Hille (1838-1914), astronomo americano.

¹⁴Pafnuti L. Tchebycheff (1821-1894), matematico russo.

CHAPTER 3

Equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine

1. Introduzione

Le equazioni differenziali ordinarie occupano un ruolo importante in matematica applicata, poiché una grande varietà di problemi fisici, ingegneristici e provenienti da altre aree della scienza, possono essere formulate in termini delle e.d.o. Ma così come non è sempre possibile semplificare i problemi trascurando l'attrito, la resistenza dell'aria, la forza di Coriolis, etc., non si può sempre trascurare la presenza di altre variabili indipendenti. Spesso, insieme alla variabile tempo t vanno considerate una o più variabili spaziali.

Tutte le volte che bisogna considerare fenomeni fisici che implicano più di una variabile, è possibile modellare il problema nei termini di *equazioni differenziali alle derivate parziali* (e.d.p.). Il resto di queste note tratta di queste equazioni e di come ottenere soluzioni di tali equazioni. La maggior parte della terminologia usata per le e.d.o. si estende in modo naturale alle e.d.p. . Per esempio, l'ordine di un'equazione è anche in questo caso, l'ordine della derivata di ordine maggiore. Ci occuperemo essenzialmente delle e.d.p. del primo e del secondo ordine. Nello studio delle e.d.p. conviene, per semplificare la notazione, usare le seguenti notazioni:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}, \quad \text{etc.}$$

2. Equazioni lineari e quasi-lineari

Nel caso di e.d.p. del primo ordine, considereremo, per semplicità, solo il caso di equazioni in due variabili indipendenti, x, y . Le equazioni della forma,

$$P(x, y, u(x, y)) + u_x(x, y) + Q(x, y, u(x, y)) u_y(x, y) = R(x, y, u(x, y)) \quad (2.1)$$

sono dette quasi-lineari. P, Q, R sono funzioni di classe C^1 definite su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Equazioni della forma

$$A(x, y) u_x(x, y) + B(x, y) u_y(x, y) + C(x, y) u(x, y) = D(x, y) \quad (2.2)$$

dove, A, B, C, D sono funzioni C^1 definite su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, sono dette *lineari*.

Osserviamo subito il seguente fatto. Sia $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^1 tale che $\text{grad } G \neq 0$. L'equazione

$$G(x, y, z) = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

definisce, al variare di c , una famiglia di superfici. Sia ora $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie descritta dall'equazione $z = u(x, y)$ ortogonale alla famiglia di superfici descritte dalla funzione G . Posto, $F(x, y, z) = u(x, y) - z$, si ha che i gradienti di F e di G sono ortogonali tra loro nei punti di intersezione delle due superfici, $\nabla F \cdot \nabla G = 0$.

Quindi, se $\nabla G(x, y, z) = (G_x(x, y, z), G_y(x, y, z), G_z(x, y, z))$ e $\nabla F(x, y, z) = (u_x(x, y), u_y(x, y), -1)$ si ottiene che

$$G_x(x, y, u(x, y))u_x(x, y) + G_y(x, y, u(x, y))u_y(x, y) = G_z(x, y, u(x, y))$$

che, come si può osservare ha la stessa struttura dell'equazione quasi-lineare (2.1).

3. Il problema di Cauchy

Nel caso di e.d.o. del primo ordine, il problema di Cauchy rappresentava la ricerca di una soluzione dell'equazione che passasse per un punto assegnato (x_0, y_0) , cioè, $y(x_0) = y_0$. nel caso di e.d.p. esso consiste nel cercare, tra tutte le superfici $z = u(x, y)$ che risolvono l'equazione data, quella che contiene una curva assegnata.

Più precisamente, siano dati $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ su cui sono definite le funzioni P, Q, R , ed una curva $\Gamma : I \rightarrow \Omega$, di classe C^1 , $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, definita da $\tau \rightarrow (\varphi(\tau), \chi(\tau), \psi(\tau))$. Consideriamo, inoltre, la curva in \mathbb{R}^2 definita da $\gamma(\tau) = (\varphi(\tau), \chi(\tau))$, la proiezione ortogonale di Γ sul piano xy .

DEFINIZIONE 8. Diremo che $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, di classe C^1 , definita da $(x, y) \rightarrow u(x, y)$ è una soluzione (locale) del problema di Cauchy:

$$P(x, y, u(x, y)) + u_x(x, y) + Q(x, y, u(x, y))u_y(x, y) = R(x, y, u(x, y)) \quad (3.1)$$

$$u(\varphi(\tau), \chi(\tau)) = \psi(\tau), \quad \forall \tau \in I \quad (3.2)$$

se esiste un intorno U di $\gamma(\tau)$ tale che $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ è una soluzione di (3.1), che soddisfa identicamente la condizione (3.2).

In altre parole, la condizione (3.2) richiede che la soluzione dell'equazione (3.1) assuma i valori $\psi(\tau)$ lungo la curva $\gamma(\tau) = (\varphi(\tau), \chi(\tau))$.

4. Esistenza ed unicità delle soluzioni

Per cercare di trovare una soluzione del problema dato, riconduciamoci all'osservazione fatta alla fine del primo paragrafo. Se $(u_x, u_y, -1)$ è ortogonale alla superficie $z = u(x, y)$, cioè ortogonale al piano tangente alla superficie, nel punto $(x, y, u(x, y))$, allora in quello stesso punto il campo (P, Q, R) che è ortogonale a $(u_x, u_y, -1)$, appartiene

sempre al piano tangente alla superficie. Quindi, se fissato $\tau \in I$, consideriamo il problema di Cauchy per il seguente sistema di e.d.o.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = R(x, y, z) \\ (x(0), y(0), z(0)) = (\varphi(\tau), \chi(\tau), \psi(\tau)) \end{cases} \quad (4.1)$$

si ha che esso (data la regolarità delle equazioni) ammette una unica soluzione locale, per ogni valore di τ . Le soluzioni di (1.3), al variare di t , sono curve che appartengono alla superficie soluzione della e.d.p. Esse sono chiamate *curve caratteristiche* dell'equazione. L'idea è quella di "incollare" insieme le diverse soluzioni, al variare di τ in modo da ottenere una superficie parametrizzata dalla coppia (τ, t) . Perché tale superficie sia effettivamente il grafico di una soluzione del problema (3.1)-(3.2) è necessario che il suo vettore normale non appartenga al piano xy . Inoltre, affinché la soluzione sia univocamente determinata occorre che la curva Γ assegnata non sia essa stessa una caratteristica, cioè che il vettore $F = (P, Q, R)$, valutato sui punti di Γ non sia tangente a Γ stessa. Una condizione che assicura l'esistenza di una superficie, come sopra determinata, è che sia non nulla la componente lungo l'asse z del prodotto vettoriale

$$F(\varphi(\tau), \chi(\tau), \psi(\tau)) \times (\varphi'(\tau), \chi'(\tau), \psi'(\tau))$$

cioè che

$$P(\varphi(\tau), \chi(\tau), \psi(\tau))\chi'(\tau) - Q(\varphi(\tau), \chi(\tau), \psi(\tau))\varphi'(\tau) \neq 0, \quad (4.2)$$

il che equivale a dire che le proiezioni di (P, Q, R) e di Γ sul piano xy non devono essere parallele.

OSSERVAZIONE 3. *Nel caso delle equazioni lineari,, cioè della forma (2.2), la condizione (4.2) assume la forma*

$$A(\gamma(\tau))\chi'(\tau) - B(\gamma(\tau))\varphi'(\tau) \neq 0. \quad (4.3)$$

Le curve del piano xy che soddisfano la condizione complementare

$$A(\gamma(\tau))\chi'(\tau) - B(\gamma(\tau))\varphi'(\tau) = 0$$

*per ogni τ sono dette linee caratteristiche. Nel caso delle equazioni lineari, la condizione (4.3) può essere espressa dicendo che **la curva γ su cui sono assegnati i dati iniziali non deve essere tangente in alcun punto ad una linea caratteristica.** Osserviamo inoltre che, nel caso di equazioni lineari, la condizione (4.3) non dipende dai dati assegnati lungo la curva γ .*

Si può dimostrare il seguente teorema

THEOREM 11. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $I \subset \mathbb{R}$ e $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiti come sopra. Supponiamo che P, Q, R siano C^1 in Ω . Se per $\tau_0 \in I$

$$P(\varphi(\tau_0), \chi(\tau_0), \psi(\tau_0)) \chi'(\tau_0) - Q(\varphi(\tau_0), \chi(\tau_0), \psi(\tau_0)) \varphi'(\tau_0) \neq 0, \quad (4.4)$$

allora esiste un intorno U di $(\varphi(\tau_0), \chi(\tau_0))$ in \mathbb{R}^2 , un intorno $I(\tau_0) \subset I$ di τ_0 ed un'unica funzione $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ che risolve (3.1)-(3.2) con $I(\tau_0)$ al posto di I^1 .

ESEMPIO 32. Trovare una soluzione locale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (y+u)u_x + yu_y = x-y \\ u(x,1) = 1+x. \end{cases}$$

SOLUZIONE 32. In questo esempio il problema di Cauchy non è dato nella forma (3.1)-(3.2). Per metterlo nella forma richiesta basta porre $\Gamma(\tau) = (\tau, 1, 1+\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Il campo vettoriale (P, Q, R) è dato da $(y+z, y, x-y)$. Per ogni $\tau \in \mathbb{R}$ si ha

$$P(\Gamma(\tau)) \chi'(\tau) - Q(\Gamma(\tau)) \varphi'(\tau) = -1 \neq 0,$$

dunque il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione locale. Cerchiamo adesso la soluzione. Per trovare le curve caratteristiche dobbiamo risolvere il problema di Cauchy del seguente sistema di e.d.o.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y+z, \\ \frac{dy}{dt} = y, \\ \frac{dz}{dt} = x-y, \\ (x(0), y(0), z(0)) = (\tau, 1, 1+\tau). \end{cases}$$

La seconda equazione ci dice che $y(t) = k_1(\tau) e^t$ dove la costante $k_1 = k_1(\tau)$ dipende dalla scelta del punto sulla curva assegnata, cioè dalla scelta di τ . Derivando la prima equazione, sostituendovi la seconda e la terza e l'espressione di $y(t)$ si ottiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x,$$

da cui segue $x(t) = k_2(\tau) e^t + k_3(\tau) e^{-t}$. Sostituendo infine nella terza equazione si ha $z(t) = (k_2(\tau) - k_1(\tau)) e^t - k_3(\tau) e^{-t} + k_4(\tau)$. Le costanti di integrazione sono quattro perché abbiamo derivato la prima equazione. Per trovare la soluzione del problema dato, sostituiamo le funzioni trovate nella prima equazione. Si ottiene:

$$k_2(\tau) e^t - k_3(\tau) e^{-t} = k_1(\tau) e^t + (k_2(\tau) - k_1(\tau)) e^t - k_3(\tau) e^{-t} + k_4(\tau)$$

¹Ovviamente dovrà essere $U \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in \Omega\}$ ed inoltre $(\varphi(\tau), \chi(\tau)) \in U$ per ogni $\tau \in I(\tau_0)$.

da cui si ottiene $k_4(\tau) \equiv 0$.

La condizione iniziale ci permette, adesso di determinare i coefficienti k_i ; bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} x(0) = k_2 + k_3 = s, \\ y(0) = k_1 = 1, \\ z(0) = k_2 - k_3 - 1 = 1 + s. \end{cases}$$

Si ottiene $k_1(\tau) = 1$, $k_2(\tau) = 1 + s$, $k_3(\tau) = -1$. Si ottiene la seguente rappresentazione parametrica della superficie soluzione

$$(t, \tau) \rightarrow ((1 + \tau)e^t - e^{-t}, e^t, \tau e^t + e^{-t}).$$

Eliminando i parametri t e τ si ottiene l'espressione $z = x - y + \frac{2}{y}$. La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$u(x, y) = x - y + \frac{2}{y}.$$

Esaminiamo, adesso, le condizioni che permettono di escludere l'esistenza di una soluzione locale del problema di Cauchy.

Consideriamo le ipotesi del Teorema (11). Se la condizione (4.4) è violata, se cioè

$$P(\varphi(\tau_0), \chi(\tau_0), \psi(\tau_0))\chi'(\tau_0) - Q(\varphi(\tau_0), \chi(\tau_0), \psi(\tau_0))\varphi'(\tau_0) = 0, \quad (4.5)$$

allora, supponendo che P, Q non siano entrambi nulli, allora la (4.5) implica che esiste $\mu \neq 0$ tale che

$$\begin{aligned} \mu P(\varphi(\tau_0), \chi(\tau_0), \psi(\tau_0)) &= \varphi'(\tau_0) \\ \mu Q(\varphi(\tau_0), \chi(\tau_0), \psi(\tau_0)) &= \chi'(\tau_0). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Supponiamo, inoltre, che

$$\mu R(\varphi(\tau_0), \chi(\tau_0), \psi(\tau_0)) \neq \psi'(\tau_0). \quad (4.7)$$

Se sono soddisfatte le condizioni (4.6)-(4.7) allora non può esistere una soluzione locale. La ragione è che, in questo caso, la condizione iniziale e l'equazione forniscono informazioni discordanti sulla derivata della restrizione della soluzione u alla curva $\tau \rightarrow (\varphi(\tau), \chi(\tau))$. Infatti, sia $v(\tau) = u(\varphi(\tau), \chi(\tau))$, allora $v'(\tau_0) = \psi'(\tau_0)$. Dalle condizioni (4.6) e (3.1) si ottiene

$$\begin{aligned} v'(\tau_0) &= u_x(\varphi(\tau_0), \chi(\tau_0))\varphi'(\tau_0) + u_y(\varphi(\tau_0), \chi(\tau_0))\chi'(\tau_0) \\ &= \mu \{P(\varphi(\tau_0), \chi(\tau_0), \psi(\tau_0))\varphi'(\tau_0) + Q(\varphi(\tau_0), \chi(\tau_0), \psi(\tau_0))\chi'(\tau_0)\} \\ &= \mu R(\varphi(\tau_0), \chi(\tau_0), \psi(\tau_0)) \end{aligned}$$

che contraddice la (4.7). Abbiamo dimostrato, quindi, il seguente teorema

THEOREM 12. *Se sono verificate le condizioni (4.5)-(4.7) allora il problema (3.1)-(3.2) non ammette soluzione locale in nessun intorno del punto $(x_0, y_0) = (\varphi(\tau_0), \chi(\tau_0))$.*

Si può inoltre provare il seguente teorema

THEOREM 13. *Supponiamo che esista $\mu \neq 0$ tale che le (4.6) siano verificate e che*

$$\mu R(\varphi(\tau_0), \chi(\tau_0), \psi(\tau_0)) = \psi'(\tau_0) ,$$

allora il problema (3.1)-(3.2) ammette infinite soluzioni.

4.1. Esercizi.

- (1) Determinare la soluzione di ognuna delle seguenti equazioni nel dominio indicato:
 - (a) $xu_x + 2yu_y = 0$, $x > 0$, $y > 0$.
 - (b) $xu_x - 2yu_y = e^x$, $x > 0$.
 - (c) $xu_x - xyu_y - u = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 - (d) $yu_x - 4xu_y = 2xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (2) Determinare la soluzione dell'Es. 1 che soddisfano, rispettivamente, la seguente condizione iniziale:
 - (a) $u\left(x, \frac{1}{x}\right) = x$, $(x > 0)$.
 - (b) $u(1, y) = y^2$.
 - (c) $u(x, x) = x^2 e^x$.
 - (d) $u(x, 0) = x^4$.
- (3) Determinare la soluzione dell'Es. 1 che soddisfano, rispettivamente, la seguente condizione iniziale date in forma parametrica:
 - (a) $u(s, e^s) = \sin s$, $s > 0$.
 - (b) $u(s, \sinh s) = 0$, $s > 0$.
 - (c) $u(s^2, s) = s^3$.
 - (d) $u(s, s^3) = 1$.
- (4) Spiegare perché l'equazione nell'Es. 1 (d) non ha soluzioni che soddisfano la condizione $u(x, 0) = x^3$. Spiegare il risultato in termini di curve caratteristiche.
- (5) Mostrare che le uniche soluzioni dell'equazione nell'Es. 1 (c) che siano di classe C^1 e definite su tutto \mathbb{R}^2 sono le funzioni costanti (Esempio, $u(x, y) = 5$). (**Sugg.:** osservare che tutte le curve caratteristiche escono dall'origine).
- (6) Trovare la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (y + u)u_x + yu_y = x - y , \\ u(x, 1) = x . \end{cases}$$

- (7) Trovare la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (y + u)u_x + yu_y = 1 - y , \\ u(x, 1) = 1 + x . \end{cases}$$

(8) Consideriamo l'equazione

$$u u_x + y u_y = x ,$$

con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} 1) \Gamma_1(\tau) &= (\tau, \tau, 2\tau) , \\ 2) \Gamma_1(\tau) &= (\tau, \tau, \tau) , \\ 3) \Gamma_1(\tau) &= \left(\tau, \tau, \frac{\sqrt{2}}{2\tau} \right) . \end{aligned}$$

Stabilire quante soluzioni hanno i problemi di Cauchy relativi ad ogni singola condizione iniziale e trovarle, se esistono.

(9) Dedurre il seguente Corollario del Teorema (11)

COROLLARIO 1. *Il Problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} P(x, y, u) u_x + u_y &= R(x, y, u) , \\ u(x, 0) &= h(x) , \end{aligned}$$

dove P, Q, h sono di classe C^1 ed h è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, ammette sempre una soluzione.

5. Leggi di conservazione

Partiamo da un approccio fisico. Supponiamo che $u(x, y)$ sia la densità di massa di un fluido contenuto in un tubo disposto lungo l'asse x (l'assunto è fatto per comodità, quello che è importante è che il fenomeno sia unidimensionale).

Fissiamo un tratto di tubo $I = [x_1, x_2]$. Se non vi è dispersione di fluido in questo tratto, la massa contenuta in I al tempo t è data da

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx .$$

Il fluido può entrare od uscire dal tubo solo agli estremi x_1 e x_2 , supponiamo che la quantità in ingresso (o uscita) sia una funzione della sola densità ed indichiamo con $f(u(x, t))$ la funzione che modella il passaggio del fluido. Si ha che

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = f(u(x_1, t)) - f(u(x_2, t)) . \quad (5.1)$$

Se u è sufficientemente regolare, per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} u_t(x, t) dx = f(u(x_2, t)) - f(u(x_1, t)) .$$

Se f è di classe C^1 si ha:

$$\begin{aligned} u_t(x_1, t) &= \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \int_{x_1}^{x_2} u_t(x, t) dx \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(u(x_1, t)) - f(u(x_2, t))}{x_2 - x_1} = -f'(u(x_1, t)) u_x(x_1, t) . \end{aligned}$$

per l'arbitrarietà del punto x_1 si ottiene l'equazione

$$u_t(x, t) + f'(u(x_1, t)) u_x(x_1, t) = 0 .$$

Chiameremo, perciò, *leggi di conservazione* quelle particolari e.d.p. del primo ordine della forma

$$a(u) u_x + u_t = 0 . \quad (5.2)$$

Questo tipo di equazioni, come ipotizzabile dalla loro derivazione, si incontrano in molte applicazioni. esse, infatti, modellano il flusso attraverso una superficie di una qualche grandezza fisica che non possa venire creata o distrutta (da cui il nome).

Noi studieremo solo il caso unidimensionale, questo significa che prenderemo in considerazione solo fenomeni che possono venire modellati da una sola variabile spaziale. Il problema di Cauchy, per tale equazione, assume la forma

$$a(u) u_x + u_t = 0 , \quad (5.3)$$

$$u(x, 0) = h(x) \quad (5.4)$$

dove a e h sono funzione assegnate di classe C^1 .

Il problema ammette sempre soluzione locale per il Corollario (1). Per determinarla procediamo usando il metodo delle caratteristiche (cambieremo il nome della variabile di derivazione per non confonderla con la variabile tempo t).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{d\eta} = a(z) , \\ \frac{dt}{d\eta} = 1 , \\ \frac{dz}{d\eta} = 0 , \\ (x(0), t(0), z(0)) = (\tau, 0, h(\tau)) . \end{array} \right.$$

Risolvendo il sistema, otteniamo la seguente rappresentazione parametrica della soluzione

$$x(\eta) = a(h(\tau)) \eta + \tau ,$$

$$t(\eta) = \eta ,$$

$$z(\eta) = h(\tau) .$$

Ne segue che z deve soddisfare l'equazione implicita, non lineare

$$z = h(x - a(z)t) . \quad (5.5)$$

Risolvendo questa rispetto a z (quando possibile) otteniamo la soluzione locale $z = u(x, t)$ del problema di Cauchy. Il problema è: questa equazione è sempre risolvibile (esplicitabile)?

Per rispondere a questo quesito, bisogna applicare il teorema della funzione implicita (Teorema del Dini), relativamente al punto di coordinate $(x_0, 0, h(x_0))$, alla funzione

$$F(x, t, z) = z - h(x - a(z)t) . \quad (5.6)$$

Poiché

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, t, z) = 1 + h'(x - a(z)t) a'(z)t , \quad (5.7)$$

si ha: $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, 0, h(x_0)) = 1 \neq 0$. Quindi, il teorema della funzione implicita implica l'esistenza di un intorno U di $(x_0, 0)$ ed una funzione u definita in tale intorno, tal che, posto $z = u(x, t)$, si ha $F(x, t, u(x, t)) \equiv 0$ per ogni $(x, t) \in U$.

Quindi, chiamata:

$$g(x, t) \stackrel{def}{=} F(x, t, u(x, t)) \equiv 0$$

dalle relazioni

$$0 = g_x(x, t) = F_x(x, t, u(x, t)) + F_z(x, t, u(x, t)) u_x(x, t)$$

e

$$0 = g_t(x, t) = F_t(x, t, u(x, t)) + F_z(x, t, u(x, t)) u_t(x, t)$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \frac{h'(x - a(z)t)}{1 + h'(x - a(z)t) a'(z)t} , \\ u_t(x, t) &= \frac{a(z) h'(x - a(z)t)}{1 + h'(x - a(z)t) a'(z)t} . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Quindi u_x ed u_t tendono a diventare infinite quando (5.7) tende a zero.

In realtà, quando la (5.7) diventa nulla la soluzione u ha una discontinuità chiamata *shock* (o *wrto*)². Notiamo che la (5.7) è sempre positiva per $|t|$ sufficientemente piccolo. Per capire cosa significa un punto di shock, osserviamo che le soluzioni dell'Eq. (5.5) sono costanti lungo le linee caratteristiche³ (vedi Osservazione (3) che sono curve nel piano xt .

²Quindi in tali punti u non rappresenta una soluzione, almeno nel senso classico in cui l'abbiamo definita. Lo è in un senso più ampio che non tratteremo in questo corso.

³Non si devono confondere le curve caratteristiche, che sono curve in \mathbb{R}^3 , con le linee caratteristiche. Le curve caratteristiche, in quanto soluzioni di un problema di Cauchy di classe C^1 non si possono intersecare, perchè nel punto di intersecazione passerebbero due soluzioni e non una sola.

Fissiamo il punto x_0 e chiamiamo $z_0 = h(x_0)$. Tutti i punti della retta

$$r = \left\{ (x, t, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x - a(z_0)t = x_0 \\ z = z_0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^3 ,$$

soddisfano l'Eq. (5.5). In altre parole, lungo la retta

$$x - a(z_0)t = x_0 \tag{5.9}$$

del piano xt la soluzione vale costantemente $h(x_0)$.

OSSERVAZIONE 4. *Osservare che, fissato x_0 , la retta r è una curva caratteristica e che la retta (nel piano xt) (5.9) è una linea caratteristica.*

Poiché la variabile t sta ad indicare il tempo, siamo interessati essenzialmente ad analizzare ciò che accade nel semipiano $t > 0$ (cioè il futuro). Si può mostrare che se nessuna coppia di rette della forma (5.9) si incontra nel semipiano $t > 0$, allora, per ogni $t > 0$ la soluzione esiste ed è differenziabile (non ci sono shocks). Se, viceversa, due rette della forma (5.9) si incontrano per qualche $t > 0$, allora nel punto di intersezione c'è una incompatibilità dovuta al fatto che la soluzione dovrebbe assumere due valori distinti.

Fissati, per esempio, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$, poniamo $z_1 = h(x_1)$ e $z_2 = h(x_2)$. Se $a(z_1) > a(z_2)$ allora le due rette

$$x - a(z_1)t = x_1 \quad \text{e} \quad x - a(z_2)t = x_2 ,$$

si incontrano in un punto (x_0, t_0) con

$$0 < t_0 = \frac{x_2 - x_1}{a(z_1) - a(z_2)} ,$$

e nel punto (x_0, t_0) si ha una incompatibilità in quanto la soluzione in quel punto dovrebbe essere uguale, contemporaneamente, sia a z_1 che a z_2 .

ESEMPIO 33. *Dire se il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u u_x + u_t = 0 , \\ u(x, 0) = -x . \end{cases}$$

ammette shock e trovare le linee caratteristiche.

SOLUZIONE 33. *L'equazione (5.5) assume la forma*

$$z = -(x - zt) ,$$

per cui la soluzione esiste, ed è univocamente determinata se $1 - t \neq 0$. In tal caso si ha

$$u(x, t) = z = -\frac{x}{1 - t} .$$

Chiaramente, per $t = 1$ la soluzione perde validità ed è presente uno shock. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $z_0 = h(x_0) = -x_0$. L'Eq. (5.9) della retta diventa

$$x + x_0 t = x_0 ,$$

che passa per il punto $(0, 1)$ qualunque sia x_0 .

ESEMPIO 34. Dire se il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (u + 1) u_x + u_t = 0 , \\ u(x, 0) = x - 1 . \end{cases}$$

ammette shock.

SOLUZIONE 34. Scriviamo le linee caratteristiche. Fissato x_0 la (5.9) diventa $x - x_0 t = x_0$. per vedere se ci sono shocks per $t > 0$ facciamo l'intersezione tra due generiche linee caratteristiche corrispondenti a $x_0 \neq x_1$. Il sistema

$$\begin{cases} x - x_0 t = x_0 , \\ x - x_1 t = x_1 . \end{cases}$$

ha come unica soluzione $t = -1$, $x = 0$, pertanto non ci sono shocks per $t > 0$.

ESERCIZIO 1. Determinare la soluzione di

$$\begin{cases} u u_x + u_t = 0 , \\ u(x, 0) = x . \end{cases}$$

e dire se ci sono shocks.

Supponiamo, adesso, che il problema di Cauchy (5.3)-(5.4) ammetta uno shock. Allora, esiste una curva ω (possibilmente degenere) nel semipiano $t > 0$ in ogni punto della quale si intersecano più caratteristiche. Tale curva, in un certo senso, limita la possibilità di estendere al futuro le soluzioni classiche dell'Eq. (5.2). Vogliamo determinare tale curva ω . Chiaramente ogni punto di ω appartiene a qualche curva caratteristica, pertanto le sue coordinate (x, t) devono soddisfare la (5.9) per qualche x_0 . Consideriamo x_0 come un parametro ($x_0 = s$). Poniamo $F(s) = a(h(s))$ e $\Xi(x, t, s) = x - tF(s) - s$. Allora, la (5.9), con $x_0 = s$ può essere scritta nella forma

$$\Xi(x, t, s) = x - tF(s) - s = 0 . \quad (5.10)$$

Inoltre, nell'intorno del generico punto (x, t) di ω non deve essere possibile risolvere in modo univoco l'Eq. (5.10) rispetto a (x, t) . Quindi deve essere

$$\frac{\partial \Xi(x, t, s)}{\partial s} = 0$$

altrimenti, per il teorema della funzione implicita, esisterebbe una soluzione locale. Si ha

$$\frac{\partial \Xi(x, t, s)}{\partial s} = 1 + tF'(s) = 0. \quad (5.11)$$

tenuto conto della (5.7), della definizione di F e del fatto che $z = h(s)$ in (x, t) , si osserva che la (5.11) è equivalente a

$$\frac{\partial F}{\partial s}(x, t, s) = 0.$$

Infatti, l'Eq. (5.5) non deve essere risolubile (rispetto ad (x, t)) nei punti di ω . La curva ω è l'*inviluppo delle linee caratteristiche*. Risolvendo le (5.10)-(5.11) rispetto ad s si ottiene una rappresentazione parametrica della curva ω . Cioè

$$s \rightarrow (x(s), t(s)) = \left(s - \frac{F(s)}{F'(s)}, -\frac{1}{F'(s)} \right),$$

valida per ogni s tale che $F'(s) \neq 0$.

Poniamo, adesso, la domanda se esista un tempo T tale che la soluzione del problema (5.3)-(5.4) sia definita almeno in una striscia $\mathbb{R} \times [0, T)$. Per rispondere a questa domanda, osserviamo che se esistono (x, t) dove la soluzione perde regolarità, allora deve essere $\frac{\partial \Xi(x, t, s)}{\partial s} = 1 + tF'(s) = 0$ cioè $t = -1/F'(s)$. Allora, definendo

$$t_c = \begin{cases} +\infty & \text{se } F'(s) \geq 0 \text{ per ogni } s, \\ \frac{1}{\max_{\{s:F'(s)<0\}} |F'(s)|} & \text{se } \{s : F'(s) < 0\} \neq \emptyset, \end{cases}$$

si ha che la soluzione è sicuramente definita nella striscia $\mathbb{R} \times [0, t_c)$. L'istante t_c è detto *tempo critico* o anche *istante di rottura dell'onda*.

OSSERVAZIONE 5. *La curva ω relativa al problema di Cauchy dell'Esempio (33) è degenera: si riduce al solo punto $(0, 1)$. Il tempo critico è 1.*

OSSERVAZIONE 6. *La curva ω relativa al problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u u_x + u_t = 0, \\ u(x, 0) = x^2, \end{cases}$$

è rappresentato parametricamente dalla curva

$$(x(s), t(s)) = \left(-\frac{1}{s}, \frac{s}{2} \right)$$

Il tempo critico è quindi 0, non esiste nessuna striscia della forma $\mathbb{R} \times [0, \delta)$ per qualche $\delta > 0$ in cui l'equazione sia risolubile.

5.1. Flusso di automobili su di un'autostrada. Trattiamo un problema ideale, semplificato, supponendo che le automobili non abbiano dimensione e che il flusso di traffico sia equivalente a quello di un fluido in un tubo di diametro costante.

Sia $\rho(x, t)$ la densità di traffico all'istante t nel punto di ascissa x (cioè il numero di auto per unità di lunghezza), e sia $q(x, t)$ il flusso all'istante t nel punto x (cioè il numero di auto per unità di tempo che all'istante t attraversano il punto x). Assumiamo, infine, che nel tratto considerato non vi siano entrate o uscite.

Fissato un segmento di estremi x_1 e x_2 con $x_1 < x_2$ il numero di auto in esso contenuto è

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx .$$

la variazione di questo numero, è uguale al numero di auto che entrano in questo segmento meno quello delle auto che lo lasciano, cioè

$$\begin{aligned} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) dx &= q(x_1, t) - q(x_2, t) = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) dx . \end{aligned}$$

Pertanto si ha

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial q}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) \right) dx = 0 .$$

per l'arbitrarietà del segmento $[x_1, x_2]$ questo implica che

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) = 0 . \quad (5.12)$$

Introduciamo ora l'ipotesi, ragionevole, che il flusso dipenda in qualche modo dalla densità del traffico; cioè che $q(x, t) = G(\rho(x, t))$ per una qualche funzione G . L'Eq. (5.12) diventa

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + G'(\rho(x, t)) \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) = 0 . \quad (5.13)$$

Quindi il modello per il flusso di traffico lungo un'autostrada, che abbiamo costruito, si riduce ad una legge di conservazione.

la funzione G dipende dalle caratteristiche della strada. Una legge empirica è la seguente.

$$G(\rho) = c \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_1} \right) ,$$

dove c è la velocità libera (cioè quella di un' auto che viaggia sola ed indisturbata) e corrisponde, nei casi normali, ai limiti di velocità, e ρ_1 è la densità massima di auto (quando, cioè, le macchine sono una a

toccare l'altra). Con questa scelta di G e ponendo $u = \rho/\rho_1$ (densità normalizzata), l'Eq. (5.13) diventa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(1 - 2u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 . \quad (5.14)$$

Sia $h(x)$ la densità iniziale sul tratto di strada considerato. Lo studio dell'evoluzione del traffico è ricondotta allo studio di un problema di Cauchy per l'Eq. (5.14) con condizione iniziale $u(x, 0) = h(x)$. Si può dimostrare che se h è decrescente non si verificano shocks. Tuttavia, se h è crescente in qualche tratto, allora, prima o poi, si verificherà uno shock (la densità della derivata diventa infinita).

5.1.1. *Esercizi.*

- (1) Studiare l'Eq. (5.14) e trovare eventualmente l'esistenza di shock, ponendo $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- (2) Studiare l'Eq. (5.14) e trovare eventualmente l'esistenza di shock, ponendo $h(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$.
- (3) Studiare l'Eq. (5.14) e trovare eventualmente l'esistenza di shock, ponendo $h(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

Equazioni alle derivate parziali del secondo ordine

1. Introduzione

Per le equazioni del secondo ordine considereremo solo e.d.p. di tipo lineare, della forma

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G . \quad (1.1)$$

I coefficienti A, B, \dots sono, in generale, funzioni delle variabili indipendenti x e y ma non di u . Se $G = 0$ l'equazione si dice *omogenea*, altrimenti *non omogenea*. E' spesso conveniente scrivere l'Eq.(1.1) nella forma $Lu = G$, dove L indica l'operatore differenziale lineare.

Per *soluzione* dell'Eq.(1.1) si intende una funzione $u(x, y)$ che soddisfa l'equazione identicamente.. Per esempio, la funzione

$$u(x, y) = \exp(3x + 4y)$$

soddisfa identicamente l'equazione

$$16u_{xx} - 9u_{yy} = 0 .$$

Per **soluzione generale** dell'Eq.(1.1) si intende l'insieme di tutte le possibili soluzioni. Noi saremo interessati ad ottenere **soluzioni specifiche** dell'Eq.(1.1), soluzioni, cioè, che soddisfano non solo l'equazione ma anche condizioni aggiuntive.

Le equazioni lineari della forma (1.1) vengono catalogate in modo interessante.

Ricordiamo dalla geometria analitica, che l'equazione di secondo grado più generale è della forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 ,$$

dove A, B, \dots sono costanti. Equazioni di questo genere rappresentano sezioni coniche (eventualmente degeneri) come segue:

- ellisse, se $B^2 - 4AC < 0$;
- parabola, se $B^2 - 4AC = 0$;
- iperbole, se $B^2 - 4AC > 0$.

In modo analogo, le e.d.p. lineari (1.1) sono chiamate **ellittiche**, **paraboliche**, **iperboliche** dipendentemente che $B^2 - 4AC$ sia negativo, nullo o positivo. Poiché A, B, \dots sono, in generale, funzioni, è possibile che una e.d.p. sia di tipo misto. Per esempio, l'equazione

$$xu_{xx} + yu_{yy} + 2yu_x - xu_y = 0$$

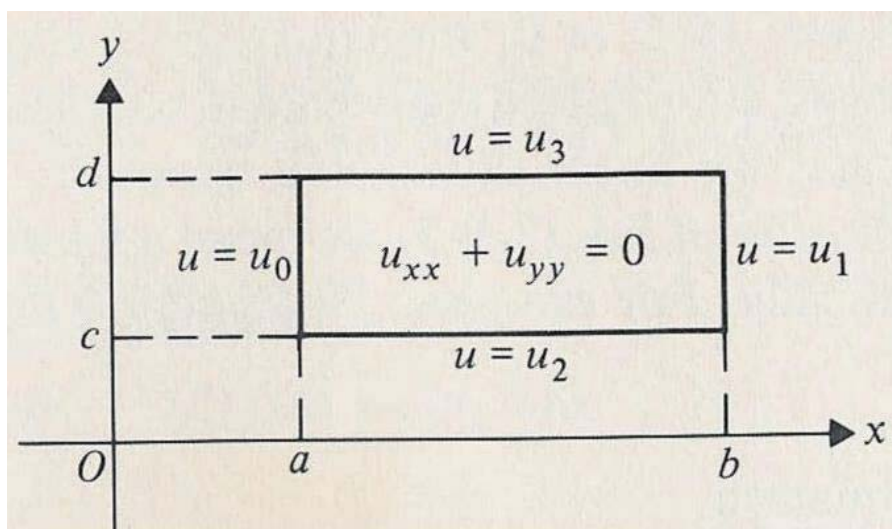
è ellittica se $xy > 0$, iperbolica se $xy < 0$, e parabolica se $xy = 0$. Se x e y sono coordinate spaziali, allora l'equazione è ellittica nel primo e terzo quadrante, iperbolica nel secondo e quarto e parabolica lungo gli assi coordinati. La teoria delle equazioni di **tipo misto** è stata studiata, per primo, da Tricomi¹ nel 1923. Nello studio dei fluidi transonici, si studia la cosiddetta **equazione di Tricomi**

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0 .$$

Questa equazione è ellittica per $y > 0$ ed iperbolica per $y < 0$. Nello studio dell'aerodinamica, la regione ellittica corrisponde ad un flusso subsonico, la regione parabolica alla barriera del suono e la regione iperbolica alla propagazione supersonica delle onde di shocks.

Sebbene x e y siano in generale usate per indicare coordinate spaziali, non è sempre detto che sia questo il caso. Una di queste potrebbe essere la coordinata temporale, per esempio. L'unica restrizione è che le due variabili siano indipendenti tra di loro. Chiameremo **condizioni al bordo** i valori fissati della variabile dipendente sul contorno dell'insieme di definizione, nel piano, dell'equazione. Se, d'altra parte, una delle variabili è il tempo, allora specificheremo le **condizioni iniziali** per poter ottenere una soluzione specifica. Problemi nei quali sono specificate condizioni al bordo e/o condizioni iniziali vengono chiamati **problemi al bordo**.

Vogliamo dare adesso esempi per illustrare i tre tipi di equazioni del secondo ordine. Soluzioni specifiche di questi problemi saranno ottenute nei capitoli successivi.



(Fig.1)

Equazione di Laplace

¹Francesco G. Tricomi (1897- 1986), matematico italiano.

PROBLEMA 1. *Problema al bordo per l'equazione ellittica:*

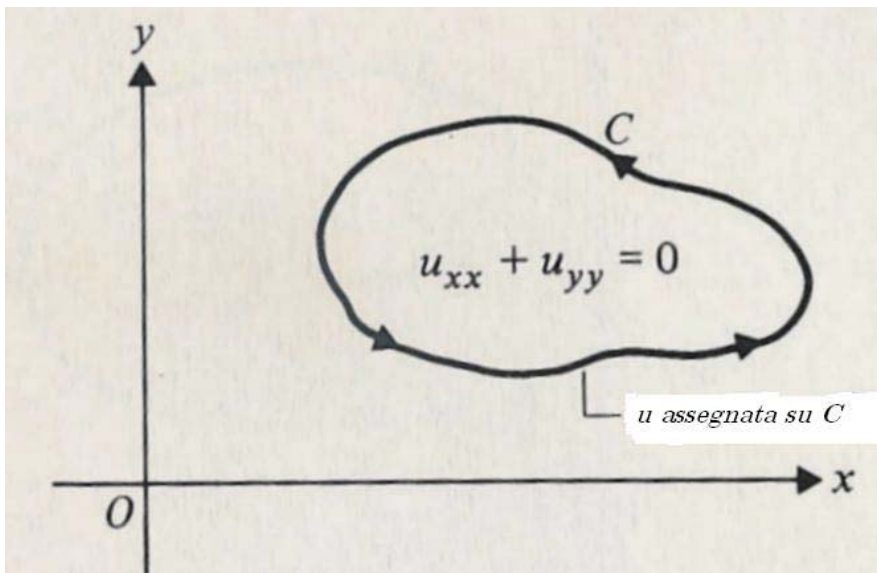
$$E.D.P. : u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad a < x < b, \quad c < y < d;$$

$$C.B. : u(a, x) = u_0, \quad u(b, y) = u_1, \quad c < y < d,$$

$$u(x, c) = u_2, \quad u(x, d) = u_3, \quad a < x < b,$$

dove $a, b, c, d, u_0, u_1, u_2, u_3$ sono costanti. Questa equazione ellittica è chiamata **equazione di Laplace**² e verrà studiata in dettaglio. Le condizioni al bordo (C.B.) mostrano che $a \leq x \leq b$ e $c \leq y \leq d$; quindi i valori della funzione incognita $u(x, y)$ sono noti sul bordo di un rettangolo nel piano xy (vedi Fig.(Fig.1)). L'equazione alle derivate parziali (E.D.P.) scritta, indica che $u(x, y)$ deve soddisfare l'equazione ovunque all'interno del rettangolo aperto $(a, b) \times (c, d)$.

Vogliamo rimarcare che il termine "regione" può avere vari significati in letteratura. Con il termine regione nel piano xy intendiamo un insieme R del piano tale che ogni coppia di punti distinti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) possono essere uniti con una poligonale i cui punti stanno in R . Quindi una regione è un *insieme connesso*. Una regione del piano può essere aperta o chiusa.



(Fig.2)

Problema di Dirichlet in due dimensioni.

Problemi al bordo nei quali u deve soddisfare l'equazione di Laplace in una regione aperta e assume valori assegnati sul bordo di tale regione (vedi Fig.(Fig.2)) sono chiamati **problemi di Dirichlet**³. Se le

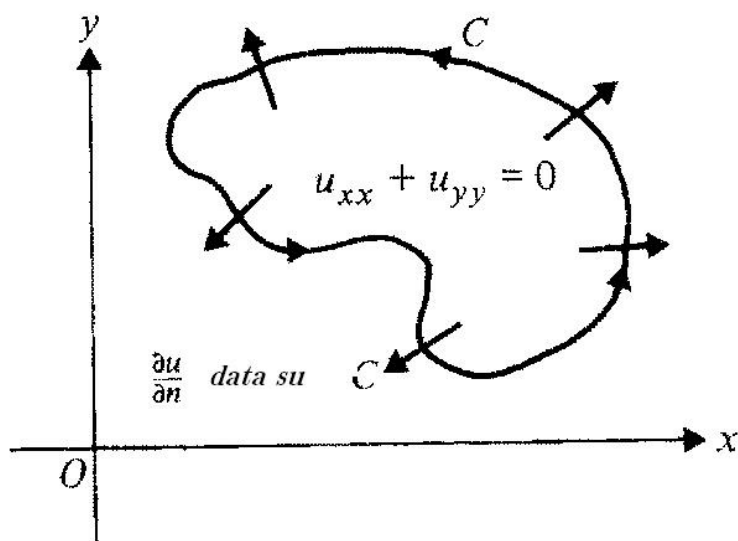
²Pierre S. de Laplace (1749-1827), matematico ed astronomo francese.

³Peter G.K.L. Dirichlet (1805-1859), matematico tedesco.

condizioni al bordo dell'Esempio precedente sono sostituite da

$$\begin{aligned} u_x(a, y) = u_0, \quad u_x(b, y) = u_1, \quad c < y < d, \\ u_y(x, c) = u_2, \quad u_y(x, d) = u_3, \quad a < x < b, \end{aligned}$$

dove sono assegnati i valori delle derivate normali u_x e u_y al bordo, viene chiamato **problema di Neumann**⁴.



Problema di Neumann. E' assegnato $\frac{\partial u}{\partial n}$ sul bordo C

(Fig.3)

In questo caso viene specificata la normale esterna $\partial u / \partial n$, cioè la derivata direzionale di u nella direzione normale al bordo (vedi Fig. (Fig.3)). I problemi al bordo possono, ovviamente anche essere di **tipo misto**, come vedremo.

PROBLEMA 2. *Problema al bordo per equazione iperbolica.*

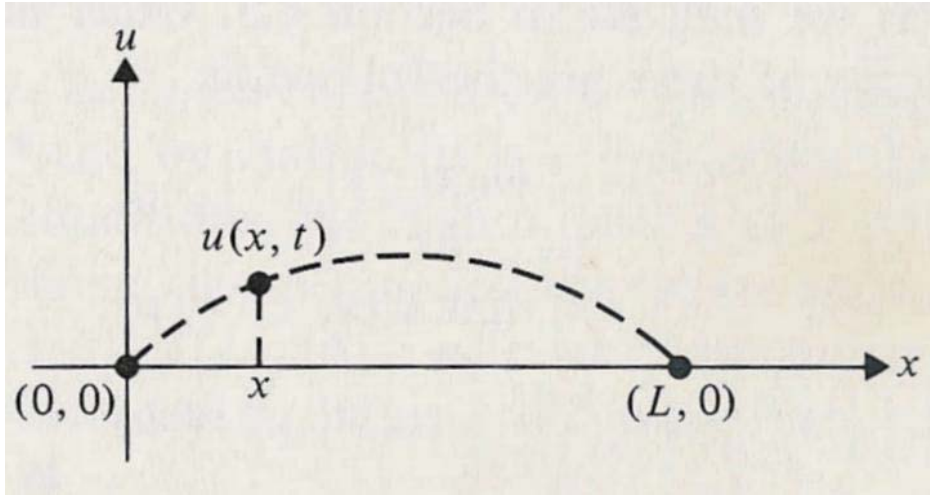
$$E.D.P. : \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L;$$

$$C.B. : \quad u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$C.I. : \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L.$$

⁴Carl G. Neumann (1832-1925), matematico tedesco.

Qui, a è una costante, u è lo spostamento verticale, e si hanno sia condizioni al bordo che condizioni iniziali (C.I.)



(Fig.4)

Equazione d'onda unidimensionale

In questo caso si richiede che u soddisfi l'equazione data per valori positivi della variabile t (tempo) e per tutti gli x nell'intervallo aperto $0 < x < L$, (vedi Fig.(Fig.4)). Le condizioni al bordo affermano che si ha $u = 0$, per valori positivi di t , quando $x = 0$ e $x = L$, mentre le condizioni iniziali danno il valore iniziale dello spostamento e la velocità iniziale come $f(x)$ e $g(x)$, rispettivamente. L'equazione differenziale deve essere dimensionalmente corretta, quindi la costante a deve avere la dimensione di una velocità.

La e.d.p. nell'Es.(2) è l'**equazione d'onda** unidimensionale.

PROBLEMA 3. *Problema al bordo di tipo parabolico.*

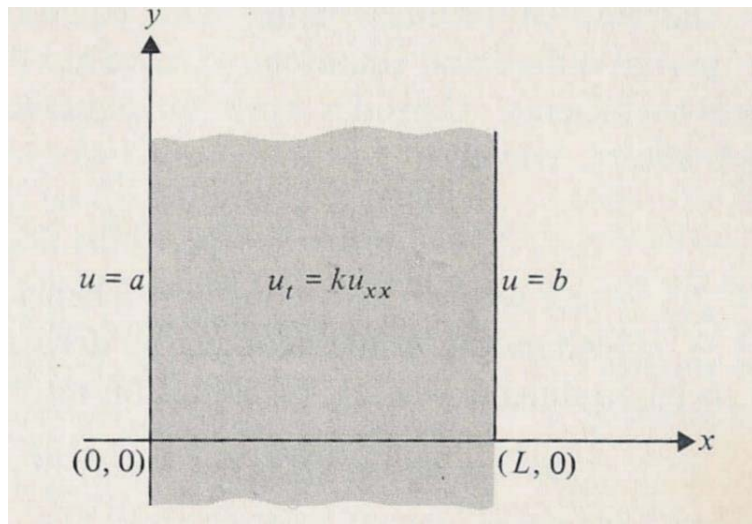
$$E.D.P.: \quad u_t = k u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \quad k > 0,$$

$$C.B.: \quad u(0, t) = a, \quad u(L, t) = b, \quad t > 0,$$

$$C.I.: \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

Anche in questo caso la funzione $u(x, t)$ soddisfa una e.d.p. in un intervallo aperto per tutti i valori positivi di t . La condizione al bordo prescrive il valore di u agli estremi dell'intervallo dato, vedi Fig. (Fig.5), mentre la condizione iniziale specifica il valore di u al tempo $t = 0$. In

questo problema l'equazione è l'**equazione di diffusione unidimensionale**.



(Fig.5)

Equazione di diffusione

L'esistenza di funzioni arbitrarie nella soluzione generale di una e.d.p. lineare significa che l'insieme delle funzioni che soddisfano tale equazione è molto ampio. Per esempio, le funzioni $u(x, y)$ qui sotto

$$\arctan \frac{y}{x}, \quad e^x \sin y, \quad \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin x \sinh y$$

sono molto diverse tra di loro, ma ognuna di loro soddisfa l'equazione $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (verificate). Nella applicazione delle e.d.p., tuttavia, si hanno informazioni dal sistema fisico che si intende modellare che permettono di trovare soluzioni specifiche. La maggior parte dello studio di problemi al bordo si concentreranno su questo punto.

Come nel caso delle e.d.o., le e.d.p. del secondo ordine più semplici sono quelle omogenee a coefficienti costanti. Consideriamo un'equazione di questo tipo nel quale mancano le derivate del primo ordine

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = 0. \quad (1.2)$$

Supponiamo che la soluzione sia della forma $u(x, y) = f(y + rx)$ dove r è una costante. Allora $u_x = r f'(y + rx)$ e $u_{xx} = r^2 f''(y + rx)$, dove gli apici indicano la derivata di f rispetto al suo argomento $y + rx$. Sostituendo nell'Eq.(1.2) si ottiene

$$(ar^2 + br + c) f''(y + rx) = 0$$

da cui si ottiene l'**equazione caratteristica**

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (1.3)$$

Se le **radici** dell'Eq.(1.2) sono **reali e distinte**, r_1 e r_2 , la soluzione generale dell'Eq.(1.2) può essere scritta nella forma

$$u(x, y) = f(y + r_1 x) + g(y + r_2 x)$$

dove f e g sono due funzioni arbitrarie di classe C^2 .

ESEMPIO 35. *Risolvere l'equazione iperbolica*

$$a^2 u_{xx} - b^2 u_{yy} = 0$$

dove a e b sono costanti reali.

SOLUZIONE 35. *L'equazione caratteristica è*

$$a^2 r^2 - b^2 = 0 ,$$

e la soluzione generale è

$$u(x, y) = f\left(y + \frac{b}{a}x\right) + g\left(y - \frac{b}{a}x\right) . \quad (1.4)$$

Voglio far presente che nel caso di **radici coincidenti**, la soluzione generale ha la forma

$$u(x, y) = f(y + rx) + xg(y + rx) . \quad (1.5)$$

Il caso delle radici complesse verrà considerato negli esercizi.

1.1. Esercizi.

- (1) Mostrare che la costante q ha le dimensioni di una velocità.
- (2) Verificare che ognuna delle seguenti funzioni soddisfa l'equazione di Laplace

$$\arctan \frac{y}{x} , \quad e^x \sin y , \quad \sqrt{x^2 + y^2} , \quad \sin x \sinh y .$$

- (3) Verificare che

$$u(x, y) = c_1 f(y + r_1 x) + c_2 g(y + r_2 x) ,$$

dove r_1 e r_2 soddisfa l'equazione $ar^2 + br + c = 0$ è la soluzione generale dell'Eq.(1.2), dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie e f, g sono funzioni arbitrarie di classe C^2 .

- (4) Classificare ciascuna delle seguenti equazioni del secondo ordine, come ellittiche, paraboliche o iperboliche.
 - (a) $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + 4u_x - 3u = xy$,
 - (b) $xu_{xx} + u_{yy} - 2x^2 u_y = 0$,
 - (c) $u_{xy} - u_x = x \sin y$,
 - (d) $(y^2 - 1)u_{xx} - 2xyu_{xy} + (x^2 - 1)u_{yy} + e^x u_x + u_y = 0$.
- (5) Se f e g sono due funzioni arbitrarie, due volte differenziabili, verificare che $f(x + at)$, $g(x - at)$ e $f(x + at) + g(x - at)$ sono soluzioni dell'equazione

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} .$$

- (6) Verificare che

$$u(x, t) = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x) (c_3 \sin \lambda at + c_4 \cos \lambda at)$$

è una soluzione dell'equazione d'onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ dove c_1, c_2, c_3, c_4 e λ sono costanti arbitrarie.

- (7) Mostrare che la soluzione dell'Esercizio 6 diventa $c_5 \cos \lambda at \sin \lambda x$ se vengono imposte le condizioni al bordo

$$u(0, t) = 0, \quad e \quad u_t(x, 0) = 0.$$

- (8) Verificare che $u = e^{-k\lambda^2 t} (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x)$ è una soluzione dell'equazione di diffusione $u_t = k u_{xx}$ dove c_1, c_2 e λ sono costanti arbitrarie.

- (9) Verificare che

$$u(x, t) = \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds$$

è una soluzione dell'equazione d'onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ che soddisfa le condizioni al bordo $u(x, 0) = 0$, e $u_t(x, 0) = g(x)$. (Usare la regola di derivazione di funzioni dipendenti da un parametro (regola di Liebnitz): Se

$$u(x, t) = \int_{a(x,t)}^{b(x,t)} f(x, s, t) ds,$$

allora

$$u_x(x, t) = \int_{a(x,t)}^{b(x,t)} \frac{\partial f(x, s, t)}{\partial x} ds + f(x, b, t) \frac{\partial b(x, t)}{\partial x} - f(x, a, t) \frac{\partial a(x, t)}{\partial x},$$

con una formula simile per $u_t(x, t)$.

- (10) Per ognuna delle seguenti e.d.p., (i) dire di che ordine è; (ii) dire se l'equazione è lineare o meno.

- (a) $xu_x + yu_y = u$,
 (b) $u u_{xx} + u_y^2 = 0$,
 (c) $u_{xx} - u_{xy} - 2u_{yy} = 1$,
 (d) $u_{xx} - 2u_y = 2x - e^u$,
 (e) $u_x^2 - xu_{xy} = \sin y$.

- (11) Data l'Eq.(1.2) mostrare che:

- (a) Se $a = 0$ il metodo dato nel testo fallisce. Mostrare, tuttavia, che in questo caso la sostituzione $u = f(x + ry)$ fornisce la soluzione generale.
 (b) Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$u_{xy} - 3u_{yy} = 0.$$

- (c) Usare la sostituzione $u = f(x + ry)$ per risolvere l'equazione

$$u_{xx} + u_{xy} - 6u_{yy} = 0.$$

- (12) Verificare che la soluzione generale dell'Eq.(1.2) è data dalla (1.5) quando l'equazione caratteristica ha due radici coincidenti.

- (13) Trovare una soluzione di

$$u_{xx} + u_{xy} - 6u_{yy} = 0.$$

- (14) Trovare la soluzione generale di ciascuna delle seguenti equazioni:

(a) $u_{xx} - 9u_{yy} = 0$,
 (b) $u_{xx} + 4u_{yy} = 0$,
 (c) $6u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0$.

- (15) Classificare ciascuna delle seguenti equazioni come: ellittica, iperbolica o parabolica.

(a) $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 4x^2$,
 (b) $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$,
 (c) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = xy$,
 (d) $4u_{xx} - 8u_{xy} + 4u_{yy} = 3$.

- (16) Verificare che

$$u(x, y) = f_1(x + iy) + f_2(x - iy)$$

è una soluzione di $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

- (17) Generalizzare il risultato dell'Es. 16 al caso in cui l'equazione caratteristica (1.3) ha radici complesse

- (18) Mostrare che

$$u(x, y) = f_1(y - ix) + xf_2(y - ix) + f_3(y + ix) + xf_4(y + ix)$$

è soluzione di

$$u_{xxxx} + 2u_{yyxx} + u_{yyyy} = 0 .$$

- (19) Il metodo spiegato nel testo può essere esteso ad alcune e.d.p. omogenee di ordine quattro. Trovare la soluzione generale di ognuna delle seguenti equazioni.

(a) $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$,⁵
 (b) $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$,
 (c) $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$.

- (20) Mostrare che se ϕ_1 e ϕ_2 sono due funzioni armoniche di x e y , allora la funzione

$$\psi(x, y) = x\phi_1(x, y) + \phi_2(x, y)$$

soddisfa l'equazione bi-armonica.

- (21) Considerare l'Eq.(1.1) con $G = 0$. Mostrare che su $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$ sono soluzioni di questa equazione, allora

$$c_1u_1(x, y) + c_2u_2(x, y)$$

è anch'essa una soluzione qualunque sia il valore delle costanti c_1 e c_2 .

⁵Questa equazione, chiamata *equazione biarmonica*) compare nello studio dell'elasticità ed in idrodinamica.

2. Separazione delle variabili

L'equazione di Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 , \quad (2.1)$$

è una delle più classiche equazioni della fisica matematica.

per esempio, nello studio dell'*elettrostatica*, si mostra che il vettore intensità elettrica \mathbf{E} dovuto ad un insieme di cariche stazionarie è dato da

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -(\Phi_x \mathbf{i}, \Phi_y \mathbf{j}, \Phi_z \mathbf{k}) ,$$

dove Φ è la funzione *potenziale elettrico* e $\nabla\Phi$ rappresenta il gradiente della funzione potenziale.

Inoltre, la legge di Gauss afferma che

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot (\nabla\Phi) = -(\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}) = 4\pi\rho(x, y, z) ,$$

dove $4\pi\rho(x, y, z)$ è la densità di carica.

Quindi il potenziale Φ soddisfa l'equazione

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = -4\pi\rho(x, y, z) , \quad (2.2)$$

nota come **equazione di Poisson**⁶. in una regione priva di cariche è $\rho(x, y, z) = 0$ e quindi l'Eq.(2.2) si riduce all'equazione di Laplace

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0 . \quad (2.3)$$

In questa situazione si ha che il potenziale elettrico è dovuto a cariche che si trovano all'esterno o sul bordo di una regione priva di cariche.

In maniera del tutto analoga, il *potenziale magnetico* dovuto alla presenza di polarità soddisfa l'Eq.(2.3) in una regione priva di poli. Ancora, il *potenziale gravitazionale* dovuto alla presenza di materia, soddisfa l'Eq.(2.3) in una regione priva di materia. In *aerodinamica* e *idrodinamica* il *potenziale di velocità* Φ ha la proprietà che $\nabla\Phi = \mathbf{v}$, dove \mathbf{v} rappresenta il campo di velocità. per un fluido ideale, cioè incompressibile ed irrotazionale, il potenziale di velocità soddisfa l'Eq.(2.3) in una regione priva di sorgenti o pozzi..

Ne segue, che l'equazione di Laplace gioca un ruolo fondamentale nella *teoria del potenziale*. per questa ragione è spesso chiamata **equazione del potenziale** e le funzione che la soddisfano sono chiamate **funzioni potenziali** o **funzioni armoniche**.

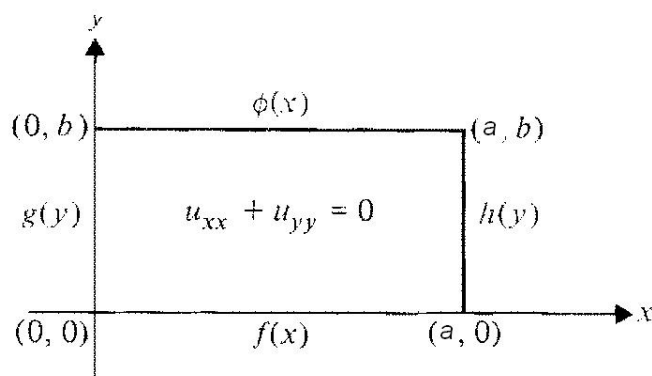
Iniziamo a studiare un semplice problema al bordo relativo all'equazione di Laplace in due variabili.

ESEMPIO 36. *Risolvere il seguente problema al bordo.*

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad & u_{xx} + u_{yy} = 0 , \quad 0 < x < a , \quad 0 < y < b , \\ C.B. \quad & u(0, y) = g(y) , \quad u(a, y) = h(y) , \quad 0 < y < b , \\ & u(x, 0) = f(x) , \quad u(x, b) = \phi(x) , \quad 0 < x < a . \end{aligned}$$

⁶Siméon D. Poisson (1781-1840), matematico e fisico francese.

SOLUZIONE 36. Vogliamo trovare una funzione $u(x, y)$ che soddisfa la e.d.p. nella regione rettangolare $0 < x < a$, $0 < y < b$ e che assume valori preassegnati $f(x)$, $\phi(x)$, $g(y)$, $h(y)$ sul bordo della regione (il rettangolo $\{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$).



(Fig.6)

Problema al bordo

Da notare che ogni vertice del rettangolo ha due segmenti che lo determinano, questo pone un problema di continuità delle soluzioni sui vertici, che esamineremo nel Capitolo 4. Per il momento non ci curiamo di ciò che accade nei vertici, ma solo sugli intervalli aperti $0 < x < a$, $0 < y < b$.

Il problema posto può essere notevolmente semplificato applicando il **principio di sovrapposizione**, poiché l'equazione di Laplace è lineare ed omogenea.

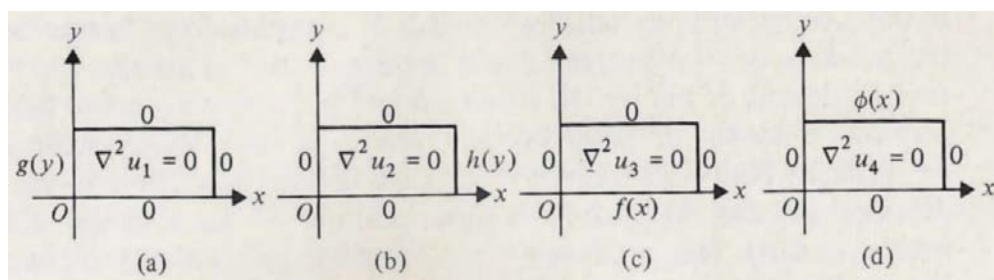
Ne segue che se u_1, u_2, u_3, u_4 sono soluzioni dei seguenti problemi al bordo

$$u_1(0, y) = g(y), \quad u_1(a, y) = u_1(x, 0) = u_1(x, b) = 0,$$

$$u_2(a, y) = h(y), \quad u_2(0, y) = u_2(x, 0) = u_2(x, b) = 0,$$

$$u_3(x, 0) = f(x), \quad u_3(0, y) = u_3(a, y) = u_3(x, b) = 0,$$

$$u_4(x, b) = \phi(x), \quad u_4(0, y) = u_4(a, y) = u_4(x, 0) = 0.$$



Il principio di sovrapposizione

(Fig.7)

allora la funzione $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ sarà soluzione del problema dato nell'Esempio (51). Questo fatto, d'altra parte ci suggerisce che ci dobbiamo preoccupare solo di saper risolvere uno dei problemi al bordo precedenti, essendo gli altri del tutto simili.

Per questo motivo ci occupiamo quindi del seguente problema.

ESEMPIO 37. *Risolvere il seguente problema al bordo.*

$$\begin{aligned} \text{E.D.P.} \quad & u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, & \quad 0 < y < b, \\ \text{C.B.} \quad & u(0, y) = u(a, y) = 0 & & \quad 0 < y < b, \\ & u(x, 0) = f(x), & u(x, b) = 0, & \quad 0 < x < a. \end{aligned}$$

SOLUZIONE 37. *In questo caso si hanno tre condizioni omogenee, ed u è prescritta nell'intervallo aperto da $f(x)$ come da condizione (c). Come detto, discuteremo la natura di $f(x)$ ed i valori di $f(0)$ e $f(a)$ nel Capitolo 4.*

*Non sappiamo a priori che forma possa avere la funzione soluzione. Vista la semplicità geometrica del problema, useremo un metodo noto col nome di **separazione delle variabili**. Come vedremo più avanti questo metodo è particolarmente utile quando la maggior parte delle condizioni al bordo sono di tipo omogeneo. Un altro vantaggio del metodo è quello di trasformare le e.d.p. in e.d.o. omogenee a coefficienti costanti, che sono semplici da risolvere.*

Assumiamo che $u(x, y)$ possa essere espressa come il prodotto di due funzioni, una che dipende solo da x , l'altra solo da y . Si pone quindi

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (2.4)$$

Ne segue che

$$u_{xx} = X''Y, \quad u_{yy} = XY'',$$

dove gli apici indicano le derivate delle funzioni rispetto alla proprie variabili. Sostituendo nella e.d.p. si ha

$$X''Y + XY'' = 0.$$

*Osserviamo inoltre che, sebbene $u(x, y) = 0$ soddisfi l'equazione, noi non siamo interessati alla **soluzione banale**. Vogliamo, quindi, che né $X(x)$ né $Y(y)$ siano identicamente nulli, quindi possiamo dividere per il prodotto XY , ottenendo*

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}. \quad (2.5)$$

Osserviamo adesso che il primo membro dell' Eq.(2.5) dipende solo da x mentre il secondo solo da y . variando x nel primo membro, ma non y , varieremmo il primo membro, ma non il secondo, analogamente, variando y ma non x , varierebbe il secondo, ma non il primo. Ne segue, che essendo x ed y variabili indipendenti, l'unica possibilità perché i due rapporti siano uguali è che siano costanti, cioè

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = k. \quad (2.6)$$

Per determinare il valore della costante k , osserviamo che le condizioni $u(0, y) = u(a, y) = 0$ diventano $X(0)Y(y) = X(a)Y(y) = 0$. Se non

vogliamo che la soluzione sia identicamente nulla, ciò implica che deve essere $X(0) = X(a) = 0$, che conduce al seguente problema al bordo:

$$X'' - kX = 0, \quad X(0) = X(a) = 0. \quad (2.7a)$$

Distinguiamo adesso i tre possibili casi $k = 0$, $k > 0$ e $k < 0$. I primi due casi, come è facile vedere, ammettono solo la soluzione nulla $X(x) \equiv 0$. Il terzo caso si riconosce subito come un problema di Sturm-Liouville regolare, che abbiamo già risolto (vedi cap. 2) e dove abbiamo trovato che gli autovalori sono $-k = n^2\pi^2/a^2$, mentre la corrispondenti autofunzioni sono:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a}x, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.8)$$

ne segue che le corrispondenti funzioni Y_n devono essere soluzione del problema

$$Y_n - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y = 0, \quad Y_n(b) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

Abbiamo, nel fare ciò, traslato la condizione $u(x, b) = 0$ nella condizione $Y_n(b) = 0$, mentre la condizione $u(x, 0) = f(x)$ non può essere cambiata in una condizione su $Y_n(0)$ perché $f(x)$ non è zero.

Le soluzioni dell'Eq.(2.9) sono

$$Y_n(y) = A_n \sinh \frac{n\pi}{a}y + B_n \cosh \frac{n\pi}{a}y,$$

e, la condizione al bordo $Y_n(b) = 0$ implica che

$$A_n \sinh \frac{n\pi}{a}b + B_n \cosh \frac{n\pi}{a}b = 0.$$

Ne segue che

$$A_n = -\frac{B_n \cosh \frac{n\pi}{a}b}{\sinh \frac{n\pi}{a}b} = -B_n \coth \frac{n\pi}{a}b$$

e quindi la Y_n diventa

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= B_n \left(\cosh \frac{n\pi}{a}y - \cosh \frac{n\pi}{a}b \sinh \frac{n\pi}{a}y \right) \\ &= B_n \frac{\sinh \frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh \frac{n\pi}{a}b}. \end{aligned}$$

Tornando all'Eq.(2.4), si ha

$$u_n(x, y) = B_n \frac{\sinh \frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh \frac{n\pi}{a}b} \sin \frac{n\pi}{a}x, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

Rimane da soddisfare la condizione al bordo non-omogenea $u(x, 0) = f(x)$. Dall'espressione di u_n si ricava che

$$u_n(x, 0) = b_n \sin \frac{n\pi}{a} x = f(x) . \quad (2.11)$$

Questa condizione non può essere soddisfatta a meno che non si possa esprimere $f(x)$ nella forma $C_n \sin \frac{n\pi}{a} x$ per qualche valore della costante C_n .

D'altra parte, abbiamo visto nel Cap. 2, che le funzioni $\sin \frac{n\pi}{a} x$ formano un insieme ortogonale su $(0, a)$ con funzione peso $w(x) = 1$. Abbiamo inoltre visto che una funzione $f(x)$ a quadrato integrabile può essere rappresentata con la serie

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{a} x ,$$

dove i coefficienti B_n sono dati da

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx , \quad (2.12)$$

dove $2/a$ è il quadrato della norma delle funzioni $\sin \frac{n\pi}{a} x$ su $(0, a)$.

Ne segue che il risultato del problema dell'Es.(52) può essere scritto come

$$u(x, y) \sim \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx \frac{\sinh \frac{n\pi}{a} (b-y)}{\sinh \frac{n\pi}{a} b} \sin \frac{n\pi}{a} x . \quad (2.13)$$

A questo livello della nostra analisi la soluzione scritta nell'Eq. è di tipo *formale*, poiché ci sono ancora questioni non risolte come la completezza dello sviluppo e la convergenza della serie. Affronteremo queste questioni nel Capitolo 4.

Lasciamo, per esercizio, mostrare che la soluzione trovata (1.10) soddisfa le tre condizioni omogenee al bordo.

Cerchiamo di dare una interpretazione fisica al risultato con il seguente esempio.

ESEMPIO 38. Risolvere il problema dell'Es.(52) nel caso in cui $f(x) = 100$.

SOLUZIONE 38. Una possibile interpretazione del problema è che stiamo cercando il potenziale in un rettangolo, sapendo che il potenziale su un bordo è 100 Volt e sugli altri tre bordi è zero. Usando la (2.8) si

ha

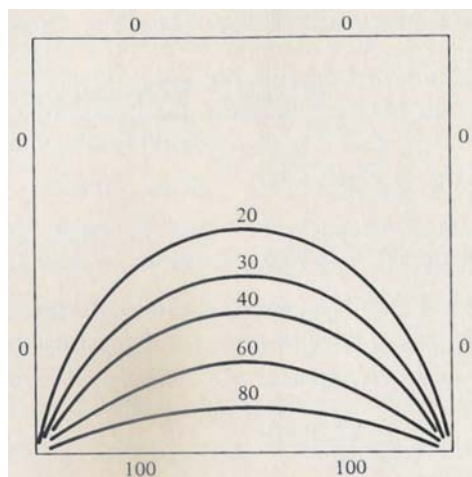
$$\begin{aligned} B_n &= \frac{200}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx = -\frac{200}{a} \frac{a}{\pi n} \left[\cos \frac{n\pi}{a} x \right]_0^a \\ &= \frac{200}{\pi n} (1 - \cos n\pi) = \frac{200}{\pi n} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{400}{\pi n}, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ne segue che la soluzione (1.10) diventa

$$u(x, y) \sim \frac{400}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{a} x \frac{\sinh \frac{(2n+1)\pi}{a} (b-y)}{\sinh \frac{(2n+1)\pi}{a} b}, \quad (2.14)$$

dove abbiamo rimpiazzato n con $2n+1$ avendo solo termini dispari. Prendendo, per convenienza di calcolo $b=1$ nella (2.14), per calcolare alcuni valori del potenziale, si ha:

$$\begin{aligned} u\left(\frac{a}{2}, 0\right) &= \frac{400}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{a} \frac{a}{2} \\ &= \frac{400}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = \frac{400}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \\ &= \frac{400}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots\right) = \frac{400}{\pi} \frac{\pi}{4} = 100. \end{aligned}$$



(Fig.8)

Curve Equipotenziali

2.1. Esercizi.

- (1) Mostrare che la (2.5) è effettivamente costante, derivando rispetto ad x o ad y .
- (2) Mostrare che:

- (a) Scegliendo $k = 0$, l'unica soluzione del problema (2.7a) è la soluzione nulla.
- (b) Scegliendo $k > 0$, l'unica soluzione del problema (2.7a) è la soluzione nulla.
- (3) Verificare che ognuna delle soluzioni $u_n(x, y)$ dell'Eq. (2.10) soddisfa l'e.d.p. e le condizioni al bordo omogenee dell'Es.(52).
- (4) Risolvere completamente l'Es.(52) in ognuno dei seguenti casi:
- (a) $f(x) = 2 \sin 3x$,
- (b) $f(x) = 3 \sin 2x + 2 \sin 3x$,
- (c) $f(x) = \sin 2x \cos x$ (**Sugg.:** ricordare che $2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$).
- (5) Verificare che l'Eq.(1.10) soddisfa le condizioni omogenee al bordo dell'Es.(52).
- (6) Spiegare le difficoltà che si incontrano cercando di risolvere, col metodo di separazione delle variabili, l'equazione

$$u_{xx} - u_{xy} + u_{yy} = 0 .$$

- (7) Mostrare che ognuna delle seguenti funzioni è una funzione potenziale:
- (a) $u = c/r$, dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e c è una costante
- (b) $u = c \log r + k$ dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, c e k sono costanti.
- (c) $u = \arctan \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.
- (8) Determinare la soluzione del seguente problema al bordo:

$$E.D.P. \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 , \quad 0 < x < \pi , \quad 0 < y < b ,$$

$$C.B. \quad u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \quad 0 < y < b ,$$

$$u(x, 0) = 3 \sin x , \quad u(x, b) = 0 , \quad 0 < x < \pi .$$

- (9) Calcolare il valore di $u(x, y)$ dell'esercizio 8 in ognuno dei seguenti punti:

$$(\pi/2, 0) , \quad (\pi, 1) , \quad (\pi/2, 2) , \quad (\pi/2, 1) .$$

Usare il metodo di separazione delle variabili per ottenere due e.d.o. in ognuno degli Esercizi 10-14. Non risolvere le equazioni ottenute.

10. $u_t = k u_{xx}$, k costante.
11. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, c costante.
12. $u_t = k u_{xx} + a u$, a, k costanti.
13. $u_t = k u_{xx} + b u_x$, b, k costanti.
14. $u_t = k u_{xx} + b u_x + a$, a, b, k costanti.
15. Determinare la soluzione del seguente problema al bordo:

$$E.D.P. \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 , \quad 0 < x < \pi , \quad 0 < y < b ,$$

$$C.B. \quad u(0, y) = g(y) \quad u(\pi, y) = 0 \quad 0 < y < b ,$$

$$u(x, 0) = u(x, b) = 0, \quad 0 < x < \pi .$$

16. Determinare la soluzione del seguente problema al bordo:

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad & u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, & \quad 0 < y < b, \\ C.B. \quad & u(0, y) = 0 & u(\pi, y) = h(y) & \quad 0 < y < b, \\ & u(x, 0) = u(x, b) = 0, & & \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

17. Determinare la soluzione del seguente problema al bordo:

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad & u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, & \quad 0 < y < b, \\ C.B. \quad & u(0, y) = u(\pi, y) = 0 & & \quad 0 < y < b, \\ & u(x, 0) = 0 & u(x, b) = \phi(x), & \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

18. Sia L l'operatore lineare dell'Eq.(1.1) e siano u_1, u_2, \dots, u_n soluzioni di $Lu = 0$.

- Mostrare che $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$ è anch'essa una soluzione, qualunque siano i coefficienti c_1, c_2, \dots, c_n .
- Mostrare che se v è una qualsiasi soluzione di $Lu = G$, allora $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n + v$ è anch'essa una soluzione.
- Mostrare che se v è una qualsiasi soluzione di $Lu = G$, e u_1 ed u_2 sono soluzioni linearmente indipendenti di $Lu = 0$, allora $c_1 u_1 + c_2 u_2 + v$ è la soluzione generale di $Lu = G$.

19. Nell'Esercizio 12 operare la sostituzione

$$u(x, t) = e^{bt} v(x, t), \quad a, b \text{ costanti.}$$

Mostrare che con una opportuna scelta di b le variabili possono essere separate nell'equazione risultante per $v(x, t)$.

20. Spiegare le difficoltà che si incontrano tentando di risolvere l'equazione

$$u_t = k u_{xx} + g(t),$$

con il metodo di separazione delle variabili.

21. Ottenere le due e.d.o. separando le variabili nell'Equazione di Tricomi

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

22. sia R una regione limitata del piano xy con frontiera C e siano u_1 ed u_2 soluzioni dei problemi di Dirichlet

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_1 &= 0 \text{ in } R, & u_1 &= g_1 \text{ su } C, \\ \nabla^2 u_2 &= 0 \text{ in } R, & u_2 &= g_2 \text{ su } C. \end{aligned}$$

Mostrare che $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ è una soluzione del problema di Dirichlet

$$\nabla^2 U = 0, \quad u = g_1 + g_2 \text{ su } C,$$

dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie.

23. Indicare in quale regione, ognuna delle funzioni dell'Esercizio 7, è una funzione potenziale.

3. L'equazione d'onda

Sebbene l'obiettivo delle note sia quello di presentare i vari metodi di soluzione dei problemi al bordo, può essere istruttivo, in un corso per ingegneri, vedere quale è la genesi fisica del problema. Iniziamo, quindi, discutendo quali siano le ipotesi fisiche e le semplificazioni necessarie per ottenere l'equazione delle corde nella sua forma più semplice, per trovarne poi la soluzione.

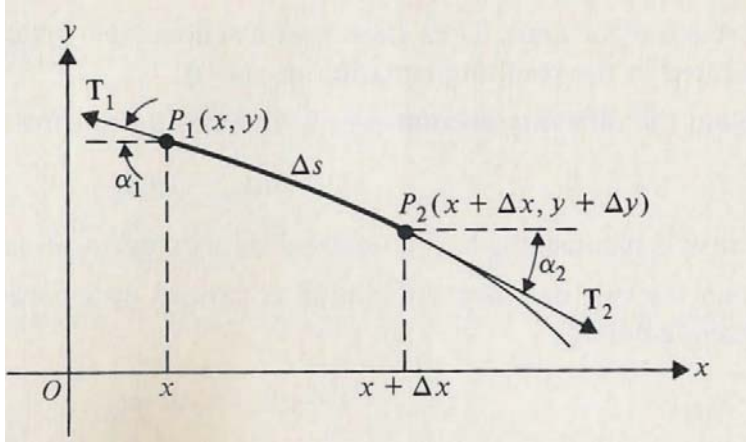
Consideriamo una corda, di lunghezza L , fissata agli estremi. Assumiamo l'asse x come la posizione della corda quando non è soggetta a forze esterne. Indichiamo con $x = 0$ e $x = L$ gli estremi della corda. Quando la corda vibra, un punto della corda, al tempo t , assume una posizione sul piano x, y . Ciò che vogliamo determinare è l'equazione a cui soddisfa y come funzione di x e t . In altre parole, se $y(x, t)$ rappresenta lo spostamento verticale della corda, nel punto di ascissa x al tempo t , quale equazione differenziale soddisfa la funzione $y(x, t)$?

Per poter impostare correttamente il problema semplificato dobbiamo fare le seguenti ipotesi:

- (1) La corda è omogenea, cioè, la sua sezione trasversale e la densità sono costanti;
- (2) Ogni punto della corda si muove su una retta perpendicolare all'asse x ;
- (3) Il massimo spostamento verticale è "piccolo" rispetto alla lunghezza L ;
- (4) La corda è perfettamente flessibile e sottoposta a tensione uniforme (costante) su tutta la sua lunghezza;
- (5) Si ignora la presenza di forze esterne quali il peso della corda o la resistenza dell'aria.

Consideriamo adesso una porzione della corda compresa tra i punti P_1 e P_2 di coordinate (x, y) e $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ rispettivamente. Indichiamo con T_1 e T_2 il valore della tensione della corda nei due punti. Queste due forze agiscono, ovviamente, lungo la tangente alla curva nei due punti, con le tangenti che formano un angolo α_1 e α_2 con l'orizzontale. Indichiamo con Δs la lunghezza della porzione di corda considerata ed indichiamo con ρ la densità di massa della corda, per

unità di lunghezza, vedi Fig.(Fig.9).



(Fig.9)

Porzione della corda vibrante

Le componenti orizzontali delle due forze T_1 e T_2 devono essere uguali, altrimenti l'ipotesi (2) sarebbe violata. Ne segue che

$$-T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 = 0$$

o, che è lo stesso

$$T_1 \cos \alpha_1 = T_2 \cos \alpha_2 = T_0, \quad \text{costante.}$$

La componente verticale della corda è data da

$$T_1 \sin \alpha_1 - T_2 \sin \alpha_2 .$$

Poiché $T_1 = T_0 / \cos \alpha_1$ e $T_2 = T_0 / \cos \alpha_2$, si ottiene

$$T_0 (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) = T_0 \left[-\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x + \Delta x, t)}{\partial x} \right],$$

dove l'uguaglianza si ha ricordando il significato di derivata.

Nel scrivere le forze agenti sul sistema, abbiamo ignorato il peso della corda e la resistenza dell'aria al movimento. La legge di Newton (seconda legge della dinamica) ci dice che

$$T_0 \left[-\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x + \Delta x, t)}{\partial x} \right] = \rho \Delta s \frac{\partial^2 y(\bar{x}, t)}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

dove \bar{x} rappresenta la coordinata del centro di massa dell'elemento Δs . l'ipotesi (3) ci permette di confondere Δs con Δx così che, dividendo entrambi i membri dell'Eq.(3.1) per Δs e prendendo il limite per $\Delta x \rightarrow 0$, si ottiene

$$T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

o

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}. \quad (3.2)$$

L'Eq.(3.2) è l'equazione della corda vibrante, o equazione d'onda unidimensionale. Poiché l'equazione è iperbolica, la sua soluzione generale è, come mostrato nell'Es.(35), data da

$$y(x, t) = \phi(x + at) + \psi(x - at) , \quad (3.3)$$

dove ϕ e ψ sono due funzioni di classe C^2 arbitrarie.

Assumiamo adesso la corda di lunghezza infinita⁷, ed imponiamo le condizioni iniziali

$$y(x, 0) = f(x) , \quad y_t(x, 0) = 0 , \quad -\infty < x < \infty , \quad (3.4)$$

riusciamo ad avere ulteriori informazioni su ϕ e ψ . Dall'Eq.(3.3) si ottiene

$$y_t(x, t) = a\phi'(x + at) - a\psi'(x - at) ,$$

dove gli apici indicano la derivazione rispetto agli argomenti. Si ottiene quindi

$$y_t(x, t) = 0 = a\phi'(x) - a\psi'(x) ,$$

che ci dice che $\phi'(x) = \psi'(x)$. Quindi ϕ e ψ differiscono tra di loro al più per una costante, $\phi(x) = \psi(x) + C$. Ne segue che

$$y(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = 2\psi(x) + C ,$$

da cui

$$\psi(x) = \frac{1}{2} [f(x) - C]$$

e

$$\phi(x) = \frac{1}{2} [f(x) + C] .$$

Ne segue che la soluzione dell'Eq.(3.2) con le condizioni iniziali date nella (3.4) è data da

$$y(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - at) + f(x + at)] . \quad (3.5)$$

Riassumiamo il risultato trovato.

CONCLUSIONE 1. *Il problema al bordo*

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad & y_{xx} = a^2 y_{yy}, & -\infty < x < +\infty , \quad t > 0 , \\ C.I. \quad & y(x, 0) = f(x) , & -\infty < x < +\infty , \\ & y_t(x, 0) = 0, & -\infty < x < +\infty , \end{aligned}$$

ha come soluzione la funzione

$$y(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - at) + f(x + at)] .$$

■

⁷In questo caso non ci sono più condizioni al bordo.

ESEMPIO 39.

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad & y_{xx} = a^2 y_{yy}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ C.I. \quad & y(x, 0) = 0, & -\infty < x < +\infty, \\ & y_t(x, 0) = g(x), & -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

SOLUZIONE 39. *Il nostro punto di partenza è ancora una volta la soluzione generale data nell'Eq.(3.3):*

$$y(x, t) = \phi(x + at) + \psi(x - at) .$$

la condizione iniziale $y(x, 0) = 0$ implica $\phi(x) = -\psi(x)$, quindi

$$y(x, t) = \phi(x + at) - \phi(x - at) ,$$

e

$$y_t(x, t) = a\phi'(x + at) + a\phi'(x - at) .$$

Ne segue che $y_t(x, 0) = g(x)$ implica

$$\phi'(x) = \frac{1}{2a}g(x) ,$$

da cui

$$\phi(x) - \phi(a) = \frac{1}{2a} \int_a^x g(s) ds .$$

la soluzione generale del problema è quindi

$$y(x, t) = \frac{1}{2a} \left[\int_a^{x+at} g(s) ds - \int_a^{x-at} g(s) ds \right] = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds .$$

CONCLUSIONE 2. *dato il problema*

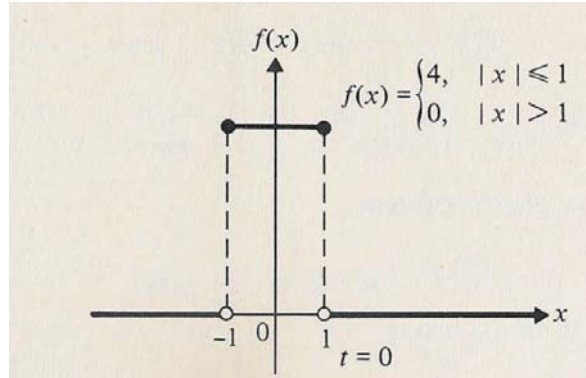
$$\begin{aligned} E.D.P. \quad & y_{xx} = a^2 y_{yy}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ C.I. \quad & y(x, 0) = f(x), & -\infty < x < +\infty, \\ & y_t(x, 0) = g(x), & -\infty < x < +\infty, \end{aligned}$$

usando il principio di sovrapposizione, possiamo affermare che esso ha come soluzione

$$y(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - at) + f(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds . \quad (3.6)$$

Questa soluzione è chiamata **soluzione di D'Alambert**.

Per capire meglio l'essenza della soluzione data dall'Eq.(3.6) consideriamo la posizione iniziale della corda $f(x)$ come in Fig.(Fig.10).

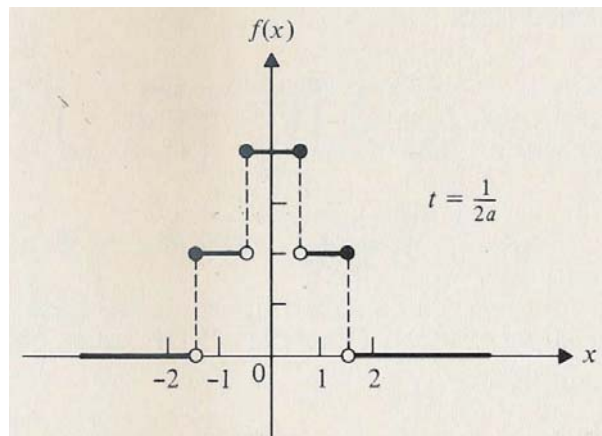


(Fig.10)

Posizione iniziale

Se la corda ha velocità iniziale nulla e la posizione iniziale è quello indicato in figura, allora questa mostra la corda al tempo $t = 0$. La posizione della corda al tempo $t = 1/2a$ ha il grafico dato da

$$y\left(\frac{1}{2a}, x\right) = \frac{1}{2} \left[f\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) \right].$$



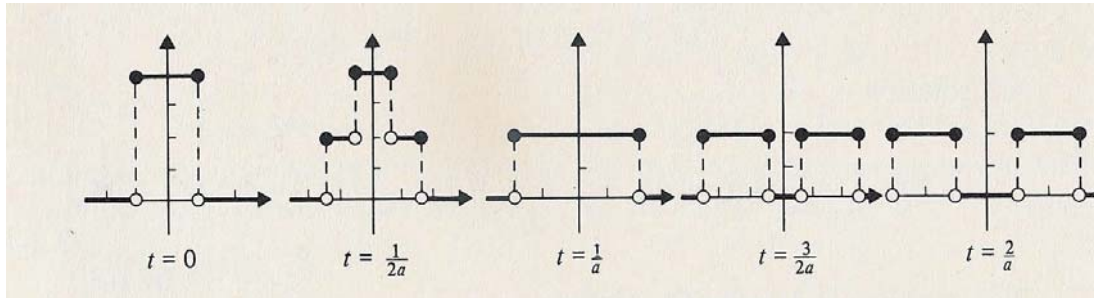
(Fig.11)

Posizione al tempo $t = \frac{1}{2}$.

Come si vede, la soluzione può essere interpretata come la propagazione della posizione iniziale della curva in due direzioni opposte, vedi Fig.(Fig.11).

Usando $t = 1/a, 3/2a$, e $2/a$ otteniamo i grafici che mostrano la propagazione della posizione iniziale della corda nelle due direzioni,

vedi Fig.(Fig.12).



La storia temporale della propagazione ondosa

(Fig.12)

Quando la corda ha lunghezza finita L la soluzione diventa più complicata a causa delle riflessioni che avvengono al bordo. Il prossimo esempio illustra questo caso.

ESEMPIO 40.

$$\begin{aligned}
 \text{E.D.P.} \quad & y_{xx} = a^2 y_{yy}, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\
 \text{C.B.} \quad & y(0, t) = y(L, t) = 0, & t > 0, \\
 \text{C.I.} \quad & y(x, 0) = f(x), & 0 < x < L, \\
 & y_t(x, 0) = 0, & 0 < x < L.
 \end{aligned}$$

SOLUZIONE 40. *In questo caso la lunghezza della corda è finita L , essa è fissata agli estremi ed è messa in moto da ferma ($y_t(x, 0) = 0$) avendo posizione iniziale $f(x)$. Per avere compatibilità delle condizioni al bordo ed al contorno, assumiamo che $f(0) = f(L) = 0$. Ripartiamo dalla soluzione generale dell'equazione d'onda*

$$y(x, t) = \phi(x + at) + \psi(x - at) . \tag{3.7}$$

Applicando le condizioni iniziali, come fatto nell'Es.39 si ha

$$\begin{aligned}
 y_t(x, t) &= a\phi'(x + at) - a\psi'(x - at) . \\
 y_t(x, 0) &= a\phi'(x) - a\psi'(x) = 0 ,
 \end{aligned}$$

cioè

$$\phi(x) = \psi(x)$$

e

$$y(x, 0) = 2\phi(x) = f(x) .$$

Ne segue che

$$\phi(x) = \psi(x) = \frac{1}{2}f(x) , \quad 0 \leq x \leq L .$$

Notiamo che la funzione $f(x)$ è definita solo nell'intervallo $[0, L]$, mentre il tempo t varia in $[0, +\infty)$.

Ne segue che la soluzione generale dell'Eq.(3.7) ha pieno significato solo se possiamo estendere $\phi(x)$ oltre l'intervallo $0 \leq x \leq L$.

Usiamo le condizioni al bordo per ottenere queste estensioni. Applicando le condizioni al bordo all'Eq.(3.7) si ottiene.

$$\phi(at) + \psi(-at) = 0 \quad (3.8)$$

e

$$\phi(L+at) + \psi(L-at) = 0 . \quad (3.9)$$

ponendo $x = -at$ nell'Eq.(3.8) si ottiene

$$\psi(x) = -\phi(-x) = -\frac{1}{2}f(-x) , \quad (3.10)$$

che ci permette di estendere la funzione $\psi(x)$ all'intervallo $[-L, 0]$. Si ha cioè

$$\psi(x) = -\frac{1}{2}f(-x) , \quad -L \leq x \leq 0 .$$

In modo del tutto analogo si ha che

$$\phi(x) = -\frac{1}{2}f(-x) , \quad -L \leq x \leq 0 .$$

Da notare che le funzioni $\phi(x)$ e $\psi(x)$, o che è lo stesso, la funzione $f(x)$, sono state estese all'intervallo $-L \leq x \leq 0$ per disparità.

La situazione a questo punto è che la funzione $f(x)$ è stata definita per disparità nell'intervallo $-L \leq x \leq L$.

Consideriamo adesso l'Eq.(3.9), si ottiene

$$\frac{1}{2}f(L+at) = -\frac{1}{2}f(L-at)$$

da cui, tenendo conto della disparità con cui è stata estesa $f(x)$

$$\frac{1}{2}f(L+at) = \frac{1}{2}f(-L+at) .$$

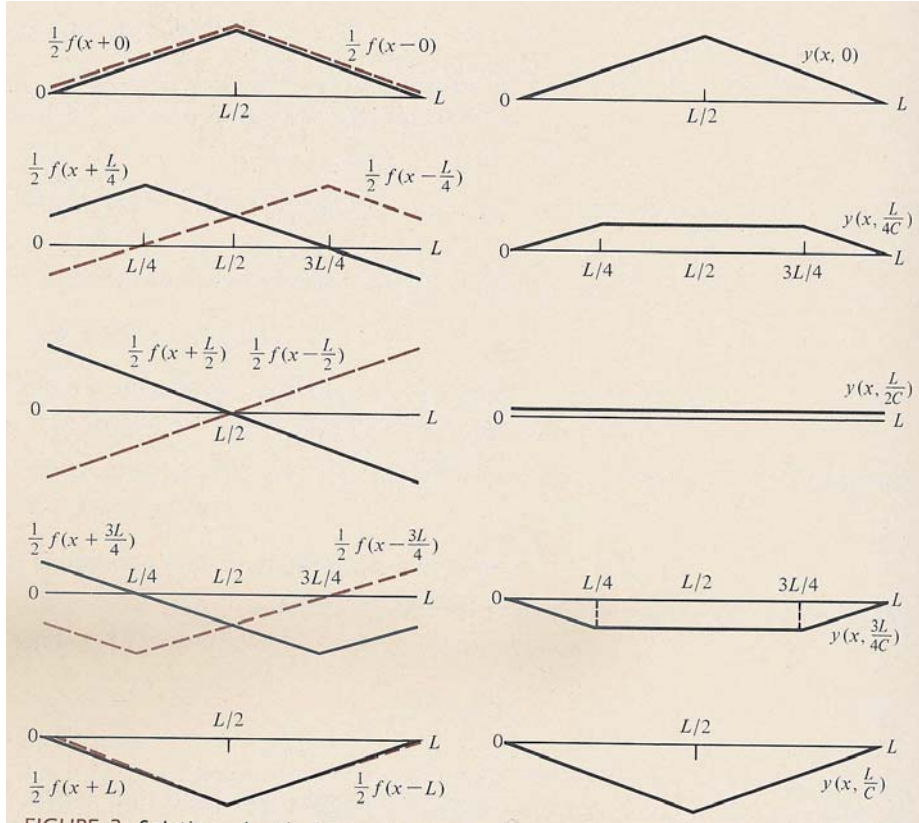
Questo ci dice che qualunque sia t , la funzione $f(x)$ deve avere lo stesso valore per valori della variabile distanti tra di loro della quantità $2L$, cioè la funzione $f(x)$ va estesa fuori dell'intervallo $[-L, L]$ come una funzione periodica di periodo $2L$.

Quindi, la soluzione è

$$y(x, t) = \frac{1}{2}[f(x-at) + f(x+at)] , \quad -\infty < x < +\infty , \quad t \geq 0 ,$$

dove la funzione $f(x)$ va intesa come una funzione estesa all'intervallo $[-L, L]$ per disparità ed estesa a tutto \mathbb{R} per periodicità, con periodo $2L$.

Le figure che seguono mostrano l'evolversi della posizione della corda, tenendo conto dei risultati trovati.



(Fig.13)

3.1. Esercizi.

- (1) Ottenere la soluzione di D'Alembert per l'equazione d'onda dell'Es.(2) senza usare il principio di sovrapposizione; applicando, cioè le condizioni al bordo alla soluzione generale.
- (2) Verificare che nell'Es.(40) si ha $\phi(x) = -\psi(2L - x)$ nell'intervallo $L \leq x \leq 3L$.
- (3) Risolvere l'Eq.(3.2) con le condizioni iniziali

$$y(x, 0) = \sin x, \quad y_t(x, 0) = 0.$$

- (4) Risolvere l'Eq.(3.2) con le condizioni iniziali

$$y(x, 0) = 0, \quad y_t(x, 0) = \cos x.$$

- (5) Risolvere l'Eq.(3.2) con le condizioni iniziali

$$y(x, 0) = \sin x, \quad y_t(x, 0) = \cos x.$$

- (6) Data una corda infinita, definiamo la posizione iniziale come:

$$f(x) = \begin{cases} a(ax+1), & -\frac{1}{a} \leq x \leq 0, \\ a(1-ax), & 0 \leq x \leq \frac{1}{a} \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

e velocità iniziale nulla, disegnare il grafico della soluzione per a) $t = 0$, b) $t = \frac{1}{2a}$, c) $t = \frac{1}{a}$, d) $t = \frac{3}{2a}$. (**Sugg:** Prendere $a = 1$).

- (7) Risolvere l'Eq.(3.2) con le condizioni iniziali $y(x, 0) = 0$ e $y_t(x, 0) = f(x)$, dove $f(x)$ è quella definita nell'Es.6.
 (8) Risolvere l'Eq.(3.2) per una corda finita di lunghezza L , con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= 0, & 0 < x < L, \\ y_t(x, 0) &= 2 \cos \frac{3\pi x}{L}, & 0 < x < L. \end{aligned}$$

- (9) Verificare che se $f \in C^2$ e $g \in C^1$, allora la soluzione (3.6) soddisfa l'Eq.(3.2).
 (10) Una variazione del metodo di separazione delle variabili consiste nell'operare la sostituzione

$$y(x, t) = X(x) e^{i\omega t}.$$

Risolvere il seguente problema con questo metodo:

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad y_{xx} &= a^2 y_{yy}, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ C.B. \quad y(0, t) &= y(L, t) = 0, & t > 0, \\ C.I. \quad y(x, 0) &= 3 \sin \frac{2\pi x}{L}, & 0 < x < L, \\ y_t(x, 0) &= 0, & 0 < x < L. \end{aligned}$$

Interpretare il problema fisicamente, e spiegare perché la costante di separazione sembra scomparire.

- (11) Mostrare che se viene applicata alla corda una forza esterna di grandezza \mathbf{F} per unità di lunghezza, allora la risultante equazione differenziale diventa

$$y_{tt}(x, t) = a^2 y_{xx}(x, t) + F/\rho.$$

- (12) Mostrare che se la forza esterna dell'esercizio precedente è il peso della corda, allora l'equazione diventa

$$y_{tt}(x, t) = a^2 y_{xx}(x, t) - g,$$

dove g è l'accelerazione di gravità.

- (13) Mostrare che, se la corda vibra in un mezzo con attrito con coefficiente d'attrito b ($b > 0$), l'equazione della vibrazione diventa

$$y_{tt}(x, t) = a^2 y_{xx}(x, t) - \frac{b}{\rho} y_t(x, t) .$$

- (14) Mostrare che nella soluzione generale dell'equazione d'onda si ha

$$y(x, t) = -y\left(L - x, t + \frac{L}{a}\right)$$

per qualche costante positiva L . Interpretare il risultato fisicamente.

- (15) Nell'equazione d'onda operare la sostituzione $\tau = at$, ed ottenere

$$y_{\tau\tau} = y_{xx} .$$

4. L'Equazione di Diffusione

Il processo di **diffusione** è familiare in chimica, fisica e nelle scienze biologiche. Se si mette un cristallo di sale in un bicchiere d'acqua, questo inizia a sciogliersi e l'alta concentrazione salina dell'acqua intorno al cristallo, si diffonde gradualmente finché, alla fine, la concentrazione salina è uniforme in tutto il bicchiere. Quando due gas inerti entrano in contatto, le loro molecole si diffondono fino a quando la miscela diventa omogenea. Quando mangiamo ed il cibo viene digerito, viene mutato chimicamente in una forma che permette agli elementi nutrienti di passare, attraverso le pareti intestinali (diffondersi), nel flusso sanguigno.

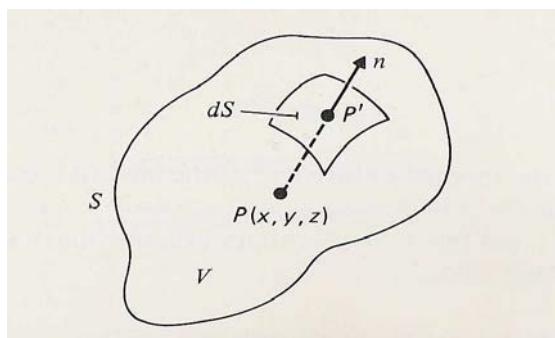
La diffusione della *materia* può essere un processo lento perché dipende dal moto casuale delle molecole. La diffusione dell'*energia*, d'altra parte, può essere alquanto differente. la propagazione delle onde elettromagnetiche in un buon conduttore, come è ben noto, è un esempio di diffusione di energia alla velocità di circa 3×10^8 m/sec. In questo paragrafo vogliamo determinare l'**equazione di diffusione**, cioè l'equazione che governa il processo di diffusione, sotto alcune ipotesi semplificative. L'obiettivo viene ancora semplificato se consideriamo la diffusione di energia sotto forma di calore, quindi la **diffusione di calore**.

Considereremo un materiale che *siatermicamente isotropo*, un materiale, cioè, la cui densità, calore specifico e conducibilità termica siano indipendenti dalla direzione. Assumiamo inoltre i seguenti fatti riguardanti la conducibilità termica, tutti riconducibili all'esperienza:

- (1) Il calore fluisce da una regione a temperatura più alta ad una a temperatura più bassa.

- (2) Il flusso di calore attraverso la superficie di un mezzo è proporzionale al gradiente di temperatura in direzione normale alla superficie stessa.
- (3) la variazione di calore in un corpo, quando la temperatura varia, è proporzionale alla sua massa ed alla variazione di temperatura.

Consideriamo adesso una regione V limitata da una superficie chiusa S (vedi Fig. (Fig.14)).



(Fig.14)

Flusso di calore attraverso una superficie.

Se indichiamo con $u(x, y, z, t)$ la temperatura nel punto $P(x, y, z)$, allora la variazione di quantità di calore attraverso la superficie S è data da

$$\frac{dQ}{dt} = -K \frac{du}{dn} dS = -K (\nabla u \cdot \mathbf{n}) dS ,$$

dove Q è la quantità di calore trasferito attraverso l'elemento di superficie dS , \mathbf{n} è la normale esterna all'elemento di superficie dS nel punto P' , K è il coefficiente di **conducibilità termica** del mezzo. du/dn rappresenta la **derivata direzionale** di u nella direzione del vettore n . Ne segue che la variazione complessiva della quantità di calore in V è data da

$$K \iint_S \nabla u \cdot \mathbf{n} dS ,$$

con l'integrale esteso, ovviamente a tutta la superficie.

Se non ci sono sorgenti o estrattori di calore, allora questa quantità di calore deve essere bilanciata da un'equivalente perdita di calore del corpo, cioè

$$c \rho \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dV ,$$

dove c , ρ sono, rispettivamente, il calore specifico e la densità del corpo, che abbiamo supposto costanti

Uguagliando i due integrali si ottiene

$$K \iint_S \nabla u \cdot \mathbf{n} dS = c \rho \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dV$$

ed applicando il teorema della divergenza all'integrale di superficie

$$\iint_S \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla^2 u \, dV$$

si ottiene

$$K \iiint_V \nabla^2 u \, dV = c \rho \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dV$$

o, equivalentemente

$$\iiint_V \left(K \nabla^2 u \, dV - c \rho \frac{\partial u}{\partial t} \right) dV = 0 ,$$

e poiché la regione V è arbitraria, questo implica che deve essere zero l'integrando, così si ottiene

$$K \nabla^2 u \, dV = c \rho \frac{\partial u}{\partial t}$$

o,

$$u_t = k \nabla^2 u , \quad k = \frac{K}{c\rho} , \quad (4.1)$$

dove il coefficiente k è chiamato anche coefficiente di **diffusività termica** (o *coefficiente di trasporto*) del materiale. L'Eq.(4.1) è l'**equazione del calore** o *equazione di diffusione*.

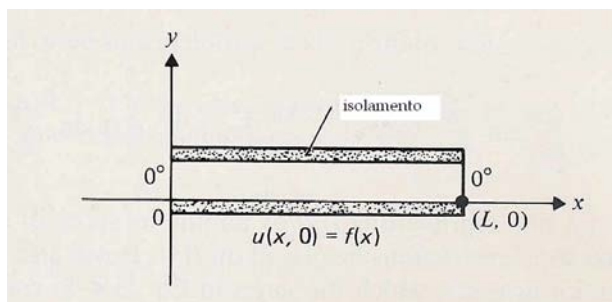
Vogliamo concludere questo paragrafo con alcuni esempi che illustrano l'equazione del calore unidimensionale.

ESEMPIO 41. *Gli estremi di una barra di lunghezza L sono tenuti a temperatura zero e la distribuzione iniziale di temperatura è data dalla funzione $f(x)$. Determinare la temperatura della barra in ogni punto ed ad ogni tempo.*

SOLUZIONE 41. *Traduciamo il problema dato in linguaggio matematico, si ha*

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad & u_t = k u_{xx} , & 0 < x < L , \quad t > 0 , \\ C.B. \quad & u(0, t) = u(L, t) = 0 & t > 0 , \\ C.I : \quad & u(x, 0) = f(x) , & 0 < x < L . \end{aligned}$$

Il problema è mostrato graficamente nella Fig.(??).



Flusso di calore.

Poiché l'equazione differenziale e le condizioni al bordo sono omogenee, possiamo usare il metodo di separazione delle variabili. Ponendo $u(x, t) = X(x)T(t)$ e sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2,$$

dove abbiamo scelto la costante negativa ($-\lambda^2$). Ci sono due ragioni per questa scelta, primo, il problema in $X(x)$ è un problema di Sturm-Liouville che ammette la sola soluzione nulla se la costante è positiva o nulla, secondo, la soluzione del problema in $T(t)$ deve tendere a zero quando $t \rightarrow +\infty$ per ovvie considerazioni fisiche.

Il problema di Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0,$$

ha autovalori n^2 , $n = 1, 2, \dots$, con corrispondenti autofunzioni

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

L'equazione differenziale

$$T' + \frac{kn^2\pi^2}{L^2} T = 0$$

ha soluzioni

$$T_n(t) = \exp\left(-\frac{kn^2\pi^2}{L^2} t\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Nelle Eq.(4.2) e (4.3) abbiamo messo, arbitrariamente i coefficienti arbitrari di integrazione uguale all'unità, poiché le funzioni $X_n(x)$ e $T_n(t)$ sono note a meno di una costante arbitraria.

Sebbene un prodotto della forma

$$u_n(x, t) = b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \exp\left(-\frac{kn^2\pi^2}{L^2} t\right),$$

soddisfa l'equazione di diffusione, essa, in generale, non soddisfa le condizioni iniziali. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti,

consideriamo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \exp \left(-\frac{kn^2\pi^2}{L^2} t \right) \quad (4.4)$$

e cerchiamo di trovare il valore dei coefficienti b_n .

Si ha,

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x) \quad , \quad (4.5)$$

e, si può vedere che, sotto ragionevoli restrizioni sulla funzione $f(x)$, si ha

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \quad . \quad (4.6)$$

Questo è possibile poiché l'insieme delle funzioni

$$\left\{ \sin \frac{n\pi}{L} x \quad , \quad n = 1, 2, \dots \right\}$$

è un insieme di funzioni ortogonali sull'intervallo $(0, L)$ con funzione peso $w(x) = 1$.

Ne segue che la soluzione del problema dato può essere scritta come

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \right) \sin \frac{n\pi}{L} x \exp \left(-\frac{kn^2\pi^2}{L^2} t \right) \quad . \quad (4.7)$$

Vogliamo ancora ricordare che rappresentare una funzione $f(x)$ come serie di funzioni seno può richiedere delle restrizioni su $f(x)$. Sarà necessario esaminare le condizioni sotto le quali la serie nell'Eq.(2.11) converge e può essere derivata. Questo problema sarà affrontato nel Capitolo 4.

Da notare che dall'Eq.(2.11) si ricava che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0$$

se i coefficienti b_n sono limitati. In questo caso, chiamiamo $u(x, t) = 0$ la **soluzione stazionaria** del problema dato. Infatti, questa è la soluzione del problema dopo che si sono dissipati gli effetti dovuti alla distribuzione iniziale di temperatura.. Poiché la soluzione stazionaria non dipende dal tempo, essa può essere ottenuta ponendo u_t uguale a zero nell'Eq.(4.1), risolvendo cioè

$$u''(x) = 0 \quad , \quad u(0) = 0 \quad , \quad u(L) = 0 \quad .$$

La soluzione dell'Eq.(2.11) è, invece, chiamata **soluzione del transitorio**.

4.1. Esercizi.

- (1) Con riferimento all'Eq.(4.1) mostrare che se c'è una sorgente uniformemente distribuita su V , data dalla funzione $f(x, y, z, t)$, allora l'equazione di diffusione diventa

$$k\nabla^2 u + \frac{f}{c\rho} = \frac{\partial u}{\partial t} .$$

- (2) Mostrare che l'equazione ottenuta nell'Esercizio 1 diventa una equazione di Poisson se u è indipendente da t e, in aggiunta, un'equazione di Laplace se non ci sono sorgenti di calore.
- (3) Nell'ottenere l'Eq.(4.1) si è assunto che K fosse costante. Mostrare che l'equazione di diffusione, se K è una funzione della posizione, diventa

$$\nabla \cdot K \nabla u = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} .$$

- (4) Mostrare che il problema di Sturm-Liouville

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 , \quad X(0) = 0 , \quad X(L) = 0 ,$$

ammette solo la soluzione nulla se λ è reale.

- (5) Trovare le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 , \quad X(0) = 0 , \quad X(L) = 0 .$$

- (6) Trovare le specifiche soluzioni del problema dell'Esempio (41) in ognuno dei seguenti casi:

(a) $f(x) = 3 \sin \frac{2\pi}{L} x ;$

(b) $f(x) = 2 \sin \frac{3\pi}{L} x ;$

(c) $f(x) = 2 \sin \frac{3\pi}{L} x + 3 \sin \frac{2\pi}{L} x .$

- (7) trovare la soluzione stazionaria del problema dell'Esempio (41) in ognuno dei seguenti casi:

(a) $u(0, t) = 0 , \quad u(L, t) = 100 ,$

(b) $u(0, t) = 100 , \quad u(L, t) = 0 ,$

(c) $u(0, t) = u(L, t) = 100 ,$

(d) $u(0, t) = 50 , \quad u(L, t) = 100 .$

- (8) Mostrare che l'equazione di diffusione unidimensionale è di tipo parabolico.

- (9) Sia $u(x, t) = f(ax + bt)$. Mostrare che in tal caso f deve essere della forma

$$\exp(ax + ka^2t) ,$$

dove $a \neq 0$ se si vuole soddisfare l'equazione $u_t = ku_{xx}$.

- (10) Nell'esercizio 9, porre $a = i\omega$, dove $i^2 = -1$ e ω è una costante reale positiva.. Mostrare che in questo caso la funzione

$$u(x, t) = (A \cos \omega x + B \sin \omega x) \exp(-k\omega^2 t)$$

soddisfa l'equazione del calore, ed ha inoltre la proprietà

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0 .$$

- (11) Mostrare che con la sostituzione $t = c\tau$ nell'Eq.(4.1), e mostrare che per una particolare scelta di c l'equazione diventa

$$u_\tau = \nabla^2 u .$$

- (12) Mostrare che l'insieme di funzioni

$$\{\sin nx , \quad n = 1, 2, \dots\}$$

è ortogonale nell'intervallo $(0, \pi)$ con funzione peso $w(x) = 1$. Operando il cambiamento di variabile

$$x = \frac{\pi}{L}s ,$$

mostrare che l'insieme di funzioni

$$\left\{ \sin \frac{\pi n}{L}s , \quad n = 1, 2, \dots \right\}$$

è ortogonale nell'intervallo $(0, L)$ con funzione peso $w(s) = 1$.

5. Forme canoniche

Nel Paragrafo 3.1. abbiamo discusso la classificazione delle equazioni lineari del secondo ordine, cioè di equazioni del tipo

$$\begin{aligned} A(x, y) u_{xx} + B(x, y) u_{xy} + C(x, y) u_{yy} \\ + D(x, y) u_x + E(x, y) u_y + F(x, y) u = G(x, y) \end{aligned} \quad (5.1)$$

la **parte principale** dell'Eq.(5.1) consiste della parte del secondo ordine

$$A(x, y) u_{xx} + B(x, y) u_{xy} + C(x, y) u_{yy} ,$$

ed il **discriminante** è la quantità $B^2 - 4AC$. Nelle regioni nelle quali $B^2 - 4AC < 0$ l'equazione ((5.1) è detta di **tipo ellittico**; dove $B^2 - 4AC > 0$ è detta di **tipo iperbolico** e dove $B^2 - 4AC = 0$ è detta di **tipo parabolico**.

Consideriamo adesso l'effetto, sull'equazione, del cambio di coordinate dato da

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) . \end{aligned} \quad (5.2)$$

Si ha

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x ,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} ,$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} ,$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} .$$

Con queste sostituzioni, l'Eq.(5.1) diventa

$$\begin{aligned} & \widehat{A}(x, y) u_{\xi\xi} + \widehat{B}(x, y) u_{\xi\eta} + \widehat{C}(x, y) u_{\eta\eta} \\ & + \widehat{D}(x, y) u_{\xi} + \widehat{E}(x, y) u_{\eta} + F(x, y) u = G(x, y) , \end{aligned} \quad (5.3)$$

dove

$$\widehat{A} = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 , \quad (5.4)$$

$$\widehat{B} = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y , \quad (5.5)$$

$$\widehat{C} = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 , \quad (5.6)$$

$$\widehat{D} = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y , \quad (5.7)$$

$$\widehat{E} = A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y . \quad (5.8)$$

Se $B \neq 0$, allora l'Eq.(5.1) può essere trasformata nell'Eq.(5.3) con $\widehat{B} = 0$ con una trasformazione di coordinate che coinvolge una rotazione d'assi. Sia

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \theta - \eta \sin \theta , \\ y &= \xi \sin \theta + \eta \cos \theta . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Con questa trasformazione, l'Eq.(5.5) diventa

$$-A \sin 2\theta + B \cos 2\theta + C \sin 2\theta = 0$$

o

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} . \quad (5.10)$$

ESEMPIO 42. Usare la rotazione d'assi per eliminare la derivata mista in

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0 .$$

SOLUZIONE 42. Prima di tutto, osserviamo che l'equazione è di tipo ellittico. Quindi, usando l'Eq.(5.10) si ha che $\cot 2\theta = 0$, cioè $\theta = \pi/4$ m. Usando questo valore nell'Eq.(5.9) si ha

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} .$$

Poiché questa matrice 2×2 è una **matrice ortogonale**, cioè una matrice la cui inversa è uguale alla trasposta, si ha

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} . \quad (5.11)$$

Possiamo usare l'Eq.(5.11) per calcolare \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} e \widehat{D} così come dati nell'Eq.(5.4)-(5.7). Si ottiene

$$\frac{3}{2}u_{\xi\xi} + \frac{1}{2}u_{\eta\eta} = -\frac{\sqrt{2}}{2}u_{\xi} . \quad (5.12)$$

Nell'Esempio (42) la parte principale dell'equazione, cioè

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy}$$

può essere confrontata ad una **forma quadratica** con matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

Eliminare il termine u_{xy} è equivalente alla diagonalizzazione della matrice M (vedi sotto). poiché M è una matrice simmetrica, può essere diagonalizzata con una matrice ortogonale. Gli elementi della diagonale, della risultante matrice diagonale, sono gli autovalori della matrice M . Lasciamo per esercizio la dimostrazione che gli autovalori di M sono $3/2$ e $1/2$.

OSSERVAZIONE 7. Ogni vettore non nullo \mathbf{x} nel piano, che soddisfa l'equazione $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ è un **autovettore** di M , ed il corrispondente scalare λ è chiamato **autovalore** di \mathbf{x} . Una matrice quadrata P con la proprietà che la sua inversa P^{-1} è uguale alla sua trasposta P^T (si ottiene scambiando le righe con le colonne) è chiamata **matrice ortogonale**. Una matrice simmetrica M (le righe sono uguali alle corrispondenti colonne) può essere **diagonalizzata**, il che significa che si può trovare una matrice ortogonale P tale che la matrice $P^T M P$ è una matrice diagonale.

Vogliamo notare che nella trasformazione di coordinate (5.9) si assume che le funzioni ξ e η sono funzioni di classe C^2 e che il determinante

$$J = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} ,$$

chiamato **Jacobiano**⁸ è diverso da zero nella regione di interesse. Si può mostrare che, sotto queste condizioni, il segno del discriminante è costante, poiché

$$\widehat{B}^2 - 4\widehat{A}\widehat{C} = J^2 (B^2 - 4AC) . \quad (5.13)$$

se un'equazione è di tipo *iperbolico*, può essere trasformata in forma particolarmente semplice, usando una trasformazione di coordinate che

⁸Carl G. Jacob (1804-1851), matematico tedesco.

porta a $\widehat{A} = \widehat{C} = 0$. Vogliamo notare che dalle Eq.(5.4) e (5.6) si ottiene che entrambe le equazioni avranno la forma

$$A\phi_x^2 + B\phi_x\phi_y + C\phi_y^2 = 0 .$$

Assumendo che $\phi_y \neq 0$, quest'ultima equazione può essere scritta come

$$A \left(\frac{\phi_x}{\phi_y} \right)^2 + B \left(\frac{\phi_x}{\phi_y} \right) + C = 0 . \quad (5.14)$$

Lungo ogni curva $\phi(x, y) = cost$, si ha

$$d\phi = \phi_x dx + \phi_y dy = 0 ,$$

cioè

$$\frac{\phi_x}{\phi_y} = -\frac{dy}{dx} .$$

ne segue che l'Eq.(5.14) diventa

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - B \left(\frac{dy}{dx} \right) + C = 0 ,$$

da cui si ricava

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} , \quad (5.15)$$

chiamata **equazione caratteristica** dell'Eq.(5.1). Le soluzioni di questa equazione sono chiamate **curve caratteristiche** (o **caratteristiche**) dell'Eq.(5.1). Lungo le caratteristiche le equazioni alle derivate parziali prendono la forma più semplice. Vogliamo studiare questa forma chiamata **forma canonica** (o forma normale) in dettaglio.

Equazioni paraboliche

In questo caso, $B^2 - 4AC = 0$, e l'Eq.(5.15) si riduce a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A} . \quad (5.16)$$

Ovviamente, A e C non possono essere entrambe nulle. Assumiamo $A \neq 0$. Ne segue che la soluzione dell'Eq.(5.16),

$$\psi(x, y) = costante$$

implica che da $\xi = \psi(x, y) = cost$ definisce una sola famiglia di caratteristiche. Il valore di η è arbitrario con l'unico vincolo che sia una funzione di classe C^2 e che lo Jacobiano J non sia zero.

ESEMPIO 43. *Trasformare l'equazione differenziale*

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 4x^2$$

in forma canonica, e risolvere l'equazione risultante.

SOLUZIONE 43. L'equazione data è di tipo parabolico su tutto \mathbb{R}^2 e l'Eq.(5.16) diventa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} .$$

Quest'ultima equazione ha soluzioni date da $y/x = \text{costante}$; ne segue che possiamo operare il seguente cambio di coordinate

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{y}{x} , \\ \eta &= y . \end{aligned}$$

ne segue che $\widehat{A} = \widehat{B} = 0$ e $\widehat{C} = \eta^2$, così l'equazione differenziale data diventa

$$\eta^2 u_{\eta\eta} = \frac{4\eta^2}{\xi^2} \quad \text{o} \quad u_{\eta\eta} = \frac{4}{\xi^2} .$$

Integrando rispetto a η , si ottiene

$$u_{\eta} = \frac{4\eta}{\xi^2} + f(\xi)$$

e

$$u(\xi, \eta) = \frac{2\eta^2}{\xi^2} + \eta f(\xi) + g(\xi) .$$

Ritornando nelle variabili originali si ottiene la soluzione generale

$$u(x, y) = 2x^2 + yf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right) .$$

Notiamo che l'Eq.(5.14) può essere riscritta come

$$A + B \left(\frac{\phi_y}{\phi_x} \right) + C \left(\frac{\phi_y}{\phi_x} \right)^2 = 0 .$$

che porta a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} \quad (5.17)$$

invece che all'Eq.(5.15). Se $A = 0$ e $C \neq 0$, allora si può usare l'equazione caratteristica (5.17). Ne segue che nel caso di equazioni paraboliche la loro forma canonica è data da

$$u_{\xi\xi} = H(u_{\xi}, u_{\eta}, u, \xi, \eta) \quad (5.18)$$

o

$$u_{\eta\eta} = H(u_{\xi}, u_{\eta}, u, \xi, \eta) , \quad (5.19)$$

dove H rappresenta una funzione lineare nelle variabili indicate.

Equazioni iperboliche

Nel caso delle equazioni iperboliche, le equazioni caratteristiche

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}$$

ha due radici reali e distinte se $A \neq 0$. Indichiamo queste soluzioni con

$$\psi_1(x, y) \quad \text{e} \quad \psi_2(x, y) .$$

Quindi, la trasformazione di coordinate

$$\begin{aligned} \xi &= \psi_1(x, y) \\ \eta &= \psi_2(x, y) \end{aligned}$$

conducono al risultato $\widehat{A} = \widehat{C} = 0$ ed alla forma canonica

$$u_{\xi\eta} = H(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) . \quad (5.20)$$

Risultato analogo si ottiene se $A = 0$, ma $C \neq 0$.

ESEMPIO 44. *Trasformare l'equazione differenziale*

$$u_{xx} - (2 \sin x) u_{xy} - (\cos^2 x) u_{yy} - (\cos x) u_y = 0$$

in forma canonica e risolvere poi l'equazione.

SOLUZIONE 44. *Qui si ha che $B^2 - 4AC = 4$, quindi l'equazione è ovunque iperbolica. Le soluzioni dell'equazione caratteristica*

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \pm 1$$

sono

$$\psi_1(x, y) = \cos x + x - y = c_1 \quad \text{e} \quad \psi_2(x, y) = \cos x - x - y = c_2 .$$

Operiamo quindi il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{aligned} \xi &= \cos x + x - y \\ \eta &= \cos x - x - y . \end{aligned}$$

Ne segue che $\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E} = 0$ e $\widehat{B} = -4$, quindi la forma canonica diventa $u_{\xi\eta} = 0$. Se ne ricava che $u_\xi = h(\xi)$ e $u = g(\xi) + f(\eta)$ da cui

$$u(x, y) = f(\cos x - x - y) + g(\cos x + x - y) ,$$

dove f e g sono due funzioni arbitrarie delle variabili indicate.

Il prossimo esempio illustra il caso di un'equazione iperbolica nella quale $B = 0$.

ESEMPIO 45. *Trasformare l'equazione differenziale*

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$$

in forma canonica e risolvere poi l'equazione.

SOLUZIONE 45. *In questo caso si ha $B^2 - 4AC = 4x^2y^2 > 0$ che mostra che l'equazione è iperbolica ovunque ma non lungo gli assi x e y . Consideriamo allora, per esempio, il primo quadrante. L'equazione caratteristica*

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{y}{x}$$

ha come soluzioni $y = c_1x$ e $y = c_2/x$. ne segue che la trasformazione di coordinate è data da

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{y}{x} \\ \eta &= xy .\end{aligned}$$

Ne segue che $\hat{A} = \hat{C} = \hat{E} = 0$ e $\hat{B} = -4y^2 = -4\xi\eta$ e $\hat{D} = 2y/x = 2\xi$. L'equazione differenziale diventa quindi

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\eta}u_{\xi} = 0 , \quad (5.21)$$

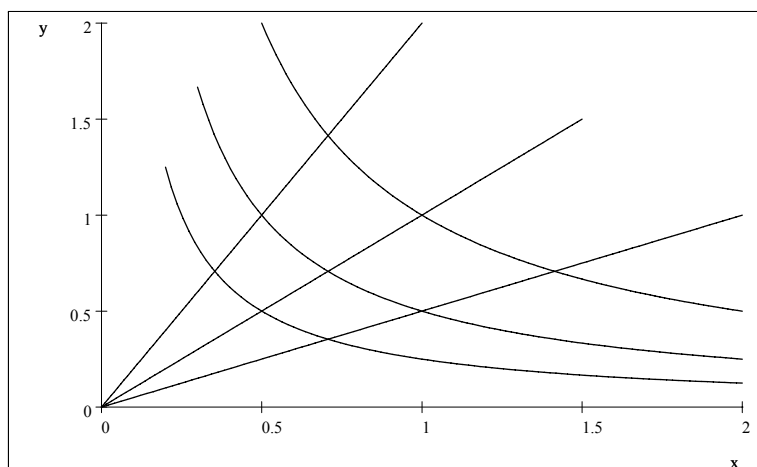
che è equivalente alla forma canonica data dalla nell'Eq.(5.20). Si può risolvere l'Eq.(5.21) osservando che essa è una equazione differenziale del primo ordine in u_{ξ} . Si ottiene quindi la soluzione

$$u(\xi, \eta) = \eta^{1/2}f(\xi) + g(\eta) ,$$

cioè

$$u(x, y) = \sqrt{xy}f\left(\frac{y}{x}\right) + g(xy) .$$

Le curve caratteristiche sono mostrate in Fig (??)



Curve caratteristiche

Equazioni ellittiche

Nel caso delle equazioni ellittiche, le equazioni caratteristiche hanno soluzioni complesse coniugate. Quindi, per poter avere soluzioni reali si devono compiere due trasformazioni di coordinate. Illustriamo il procedimento con un esempio.

ESEMPIO 46. Nella regione nella quale l'equazione

$$xu_{xx} + u_{yy} = x^2$$

è ellittica, trasformare l'equazione in forma canonica.

SOLUZIONE 46. Poiché $B^2 - 4AC = -4x$, l'equazione è ellittica nel semipiano $x > 0$. In questa regione le equazioni caratteristiche sono

$$\frac{dy}{dx} = \pm ix^{-1/2}$$

che ammettono come soluzione le funzioni

$$y = 2ix^{1/2} + c_1 \quad e \quad y = -2ix^{1/2} + c_2 .$$

Operiamo, dapprima, la trasformazione di coordinate

$$\begin{aligned} \sigma &= y + 2x^{1/2}i , \\ \tau &= y - 2x^{1/2}i , \end{aligned}$$

ma, poiché queste sono complesse, operiamo una seconda trasformazione data da

$$\begin{aligned} \sigma &= \xi + i\eta , \\ \tau &= \xi - i\eta . \end{aligned}$$

Il risultato complessivo di queste due trasformazioni da

$$\xi = y \quad e \quad \eta = 2x^{1/2} .$$

Ne segue che si ha $\hat{A} = \hat{C} = 1$, $\hat{B} = \hat{D} = 0$ e $\hat{E} = -\frac{1}{2}x^{-1/2}$ così che la forma canonica dell'equazione diventa

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \frac{1}{\eta}u_{\eta} + \frac{\eta^2}{16} .$$

Osserviamo che, in generale, la forma canonica di una equazione ellittica può essere scritta nella forma

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = H(u_{\xi}, u_{\eta}, u, \xi, \eta) . \quad (5.22)$$

L'esempio più semplice di equazione ellittica è l'equazione di Laplace.

Per riassumere, le equazioni paraboliche hanno una sola famiglia di curve caratteristiche date da $\xi = cost$, le equazioni iperboliche hanno due famiglie di curve caratteristiche date da $\xi = cost$ e $\eta = cost$, che formano un sistema di coordinate curvilinee, mentre le equazioni ellittiche non hanno curve caratteristiche reali.

5.1. Esercizi.

- (1) Usare la trasformazione di coordinate definita nell'Eq. (5.2) per calcolare ognuna delle seguenti derivate parziali:
 - (a) u_x e u_y
 - (b) u_{xx} , u_{xy} e u_{yy} (**Sugg:** Ricordare che $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$)
- (2) verificare che i coefficienti \hat{A} , \hat{B} , etc. sono dati dalle equazioni (5.4)-(5.8).
- (3) Risolvere:
 - (a) le Eq.(5.9) trovando ξ, η in termini di x, y .
 - (b) Usare il risultato trovato in a) per calcolare $\hat{B}(x, y)$ dell'Eq.(5.5).

- (c) mostrare che ponendo $\widehat{B}(x, y) = 0$ in b), si ottiene (se $B \neq 0$)

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}.$$

- (4) Mostrare che l'equazione differenziale dell'Esempio (42) è ovunque ellittica.
 (5) Fare i calcoli per arrivare all'Eq.(5.12).
 (6) Usare la trasformazione di coordinate

$$\xi = \frac{y}{x} \quad \text{e} \quad \eta = y$$

per calcolare $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ e \widehat{E} , nell'Esempio (43).

- (7) Calcolare $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ e \widehat{E} , nell'Esempio (44).
 (8) Mostrare che le soluzioni di

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{y}{x}$$

sono $y = c_1 x$ e $y = c_2/x$.

- (9) Ottenere l'Eq.(5.21) dell'Esempio (45).
 (10) Risolvere l'Eq.(5.21). (**Sugg:** Operare la sostituzione $u_\xi = v$)
 (11) Nell'Esempio (46) sviluppare i conti per arrivare a

$$\xi = y \quad \text{e} \quad \eta = 2x^{1/2}.$$

- (12) Calcolare $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ e \widehat{E} , nell'Esempio (46) per ottenere poi la forma canonica indicata.
 (13) Verificare, derivando, che le funzioni date risolvono le equazioni date nei vari esempi.

(a) $u(x, y) = 2x^2 + yf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$ (Esempio (43).)

(b) $u(x, y) = f(\cos x - x - y) + g(\cos x + x - y)$ (Esempio (44)).

(c) $u(x, y) = \sqrt{xy}f\left(\frac{y}{x}\right) + g(xy)$ (Esempio (45)).

- (14) per ognuna delle seguenti equazioni, determinare le regioni dove le equazioni sono ellittiche, paraboliche o iperboliche:

(a) $u_{xx} + yu_{xy} + xu_{yy} = e^{x+y}$

(b) $y^2u_{xx} - u_{yy} + u = 0$

(c) $xu_{xx} + 2u_{xy} + yu_{yy} + xu_x + u_y = 0$

(d) $(1 - x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} - (1 - y^2)u_{yy} = 0$

(e) $16u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$

(f) $4u_{xx} - 8u_{xy} + 4u_{yy} = 1$

(g) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = xy$

- (15) Calcolare lo Jacobiano

$$J\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right)$$

per ognuna delle seguenti trasformazioni.

$$(a) \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) , \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y)$$

$$(b) \xi = y/x , \quad \eta = y$$

$$(c) \xi = \cos x + x - y , \quad \eta = \cos x - x - y$$

$$(d) \xi = y/x , \quad \eta = xy$$

$$(e) \xi = y , \quad \eta = 2x^{1/2}$$

(16) Dimostrare che

$$\widehat{B}^2 - 4\widehat{A}\widehat{C} = J^2(B^2 - 4AC) ,$$

dove J è lo Jacobiano della trasformazione.

(17) Trovare gli autovalori della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} .$$

CHAPTER 5

Serie di Fourier

1. Introduzione

Questo capitolo ed il prossimo possono essere considerati di transizione relativamente allo studio, che stiamo facendo, dei problemi al bordo. Fino a questo punto abbiamo ripassato alcuni concetti fondamentali delle equazioni differenziali ordinarie (Capitolo 1). Continueremo a fare riferimento a queste nozioni e concetti, con i Paragrafi 1.3 e 1.5 che giocano un ruolo prominente in tutto il resto del capitolo. Ci riferiremo anche ai problemi di Sturm-Liouville ed alla rappresentazione delle funzioni come serie di funzioni ortonormali (Capitolo 2). Considereremo problemi al bordo più generali di quelli considerati nel Capitolo 3. Nei prossimi capitoli, tratteremo poi, in dettaglio, sia i problemi del potenziale che quelli del calore e delle onde in una e anche più dimensioni spaziali ed in diversi sistemi di coordinate.

Come preliminare a tutti questi problemi, presentiamo ora una branca dell'analisi matematica che si è sviluppata nel diciottesimo secolo. Era il 1713 quando Taylor suggerì che la funzione

$$\sin \frac{\pi}{L}x$$

potesse essere usata per spiegare il moto stazionario di una corda vibrante di lunghezza L avente gli estremi fissati. Nel 1749 e 1753 D'Alambert ed Eulero pubblicarono lavori nei quali si discuteva dello sviluppo di una funzione in termini delle funzioni coseno. A quei tempi, si stava studiando un problema di astronomia che coinvolgeva lo sviluppo del reciproco della distanza tra due pianeti in serie di coseni di multipli dell'angolo compreso tra i raggi vettori. Nel 1811¹ Fourier sviluppò l'idea di sviluppare una funzione in serie di seni e coseni, sviluppo che viene oggi generalmente usato.

2. Coefficienti di Fourier

Nel Paragrafo 2.4 abbiamo rappresentato una funzione continua a tratti $f(x)$ attraverso una serie di funzioni ortonormali.

¹Il lavoro fu presentato da Fourier nel 1807 ma respinto da Lagrange, uno degli esaminatori, probabilmente perchè egli non capì come il moto di una corda vibrante potesse essere periodico rispetto alle coordinate spaziali.

Sia dato l'insieme di funzioni

$$\{\phi_i(x) , \quad i = 1, 2, \dots\}$$

ortonormale nell'intervallo $[a, b]$ con funzione peso $w(x)$, cioè

$$\int_a^b w(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij}$$

Allora si ha

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x) , \quad (2.1)$$

dove

$$c_i = (f, \phi_i) = \int_a^b w(x) \phi_i(x) f(x) dx \quad (2.2)$$

dove il simbolo \sim significa "è rappresentato da, nel senso della convergenza in media".

Abbiamo già dimostrato (vedi Par. 2.3) che gli insiemi

$$\{\sin nx , \quad n = 1, 2, \dots\} \quad \text{e} \quad \{\cos nx , \quad n = 0, 1, 2, \dots\}$$

sono ortogonali su $[0, \pi]$ con funzione peso $w(x) = 1$. Dividendo ognuna delle funzioni, degli insiemi sopra definiti, per la propria norma si ottengono due famiglie di funzioni ortonormali

$$\left\{ \sqrt{2/\pi} \sin nx , \quad n = 1, 2, \dots \right\} \quad (2.3)$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{2/\pi} \cos nx , \quad n = 1, 2, \dots \right\} . \quad (2.4)$$

lasciamo per esercizio di mostrare che l'insieme

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx , \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx , \quad n = 1, 2, \dots \right\} \quad (2.5)$$

è ortonormale nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ con funzione peso uno (Esercizio 2).

usando l'insieme ortonormale (2.5) possiamo scrivere la **serie di Fourier associata alla funzione** $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx . \quad (2.6)$$

In questa rappresentazione i **coefficienti di Fourier** sono dati da:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx , \quad n = 1, 2, \dots . \quad (2.8)$$

Osserviamo subito che perché una funzione $f(x)$ ammetta una serie di Fourier, come quella data dalla (2.6) valida anche all'esterno dell'intervallo $[-\pi, \pi]$ bisogna che la funzione sia **periodica** di periodo

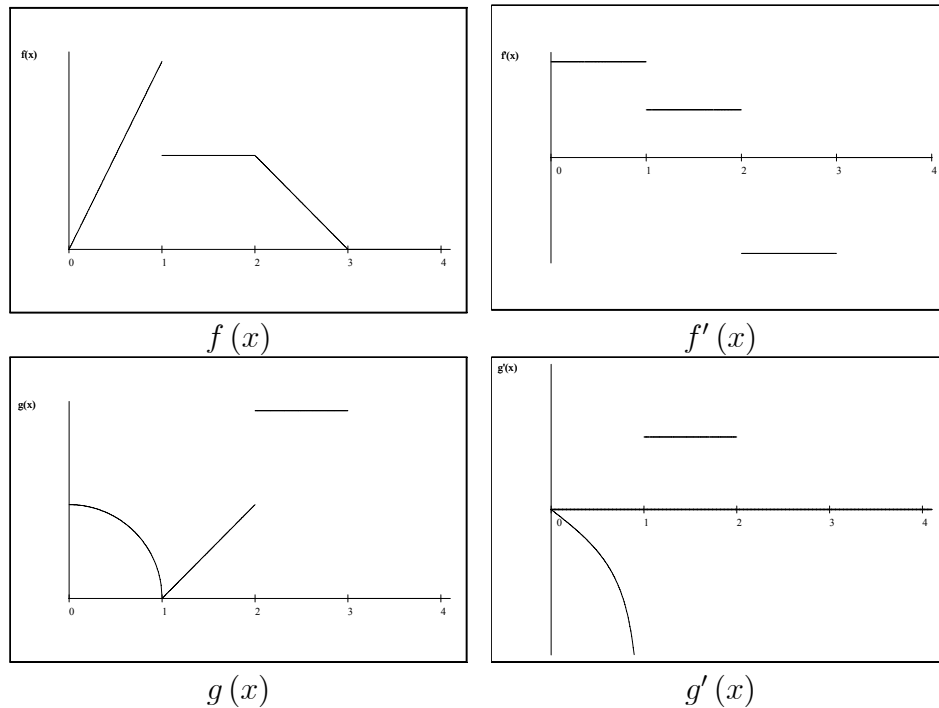
2π . Questo è, ovviamente, dovuto al fatto che i termini della serie sono tutti periodici di periodo 2π . Ricordiamo qui, per completezza, che una funzione è detta periodica, con periodo P , se si ha che

$$f(x) = f(x + P)$$

per tutti i valori di x .

E' ovvio che questo fatto non rappresenta una restrizione quando noi siamo interessati solo a rappresentare la funzione nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Una seconda proprietà della funzione è che questa deve essere **liscia a tratti**. Ricordo che una funzione è detta liscia a tratti se $f(x)$ e $f'(x)$ sono entrambe continue a tratti. Nella Fig. 4.2.1 qui sotto, la funzione $f(x)$ soddisfa a questa condizione, mentre la funzione $g(x)$ no.



(Fig. 4.2.1)

Condizioni sufficienti (ma non necessarie) per ottenere la rappresentazione di Fourier di una funzione assegnata, sono date nel Teorema (14). Queste condizioni sono chiamate **condizioni di Dirichlet**, poiché furono date da Dirichlet in lavori pubblicati dapprima nel 1829 e poi nel 1837.

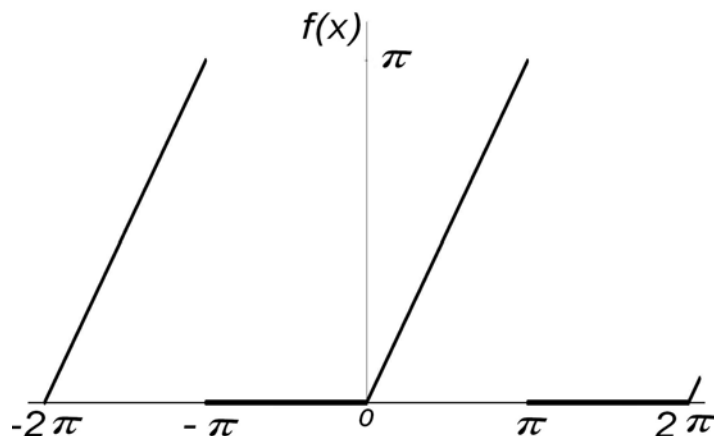
THEOREM 14. *Se $f(x)$ è una funzione periodica di periodo 2π e liscia a tratti nell'intervallo $-\pi \leq x \leq \pi$, allora la rappresentazione (2.6) della funzione $f(x)$ converge ad $f(x)$ in tutti i punti in cui $f(x)$ è continua e converge alla media dei limiti destro e sinistro di $f(x)$ nei punti di discontinuità di $f(x)$.*

Ad oggi il problema della convergenza delle serie di Fourier è insoluto. Sappiamo che le condizioni di Dirichlet non sono necessarie e conosciamo condizioni necessarie che non sono però sufficienti. per i nostri scopi ci basta dire che le condizioni del Teorema (14) sono soddisfatte da una ampia classe di funzioni che si incontrano in matematica applicata, quindi, a questo livello, non entreremo più in profondità nello studio della teoria. Illustreremo, con i seguenti esempi, come si ottiene la rappresentazione di Fourier delle funzioni.

ESEMPIO 47. *Trovare la serie di Fourier della funzione periodica, di periodo 2π , definita da*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } -\pi < x < 0, \\ x, & \text{per } 0 < x < \pi, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{per } x = \pm\pi. \end{cases}$$

SOLUZIONE 47. *La funzione è rappresentata nel seguente grafico.*



Notiamo subito che la funzione soddisfa le condizioni di Dirichlet del Teorema (14). Usando l'Eq.(2.7) si ha:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi n^2} (\cos \pi n - 1) \\ &= \frac{1}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ -\frac{2}{\pi n^2}, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

L'integrazione è stata fatta per parti.

Lo schema precedente non va bene per la ricerca del coefficiente a_0 per

il quale si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2} .$$

Il termine costante della serie di Fourier $a_0/2$ è quindi il **valore medio della funzione nell'intervallo**. Si cercano adesso i coefficienti b_n per i quali, usando la (2.8) si ha:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right) \Big|_0^{\pi} \\ -\frac{1}{n} \cos n\pi &= \frac{(-1)^{n+1}}{n} . \end{aligned}$$

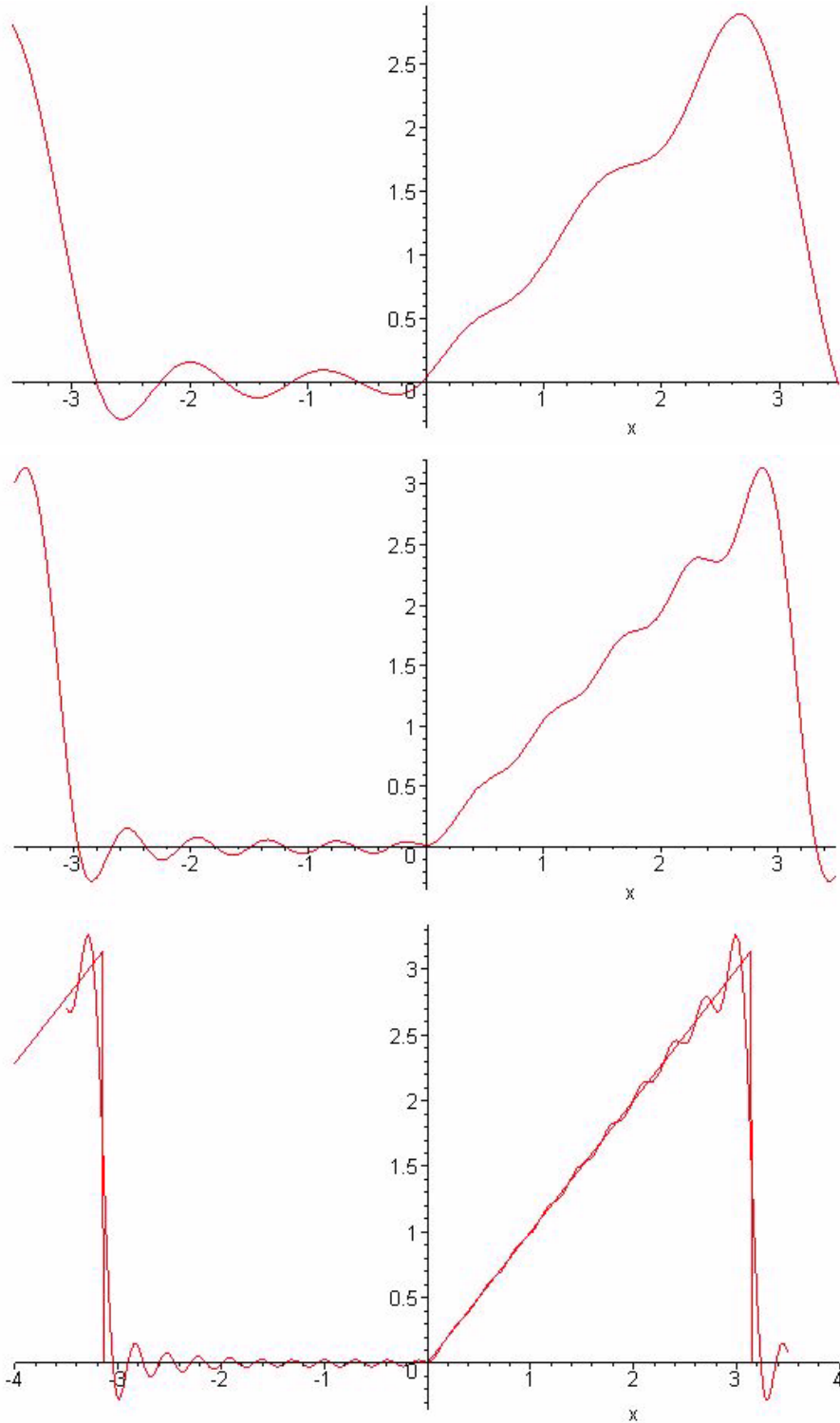
La rappresentazione di Fourier della funzione data è quindi:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2 \cos(2n-1)x}{\pi (2n-1)^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right] \quad (2.9)$$

Abbiamo usato il simbolo $di =$ sapendo, dal Teorema (14) che la serie converge puntualmente al valore di $f(x)$ nei punti in cui $f(x)$ è continua ed al valore medio del salto nei punti di discontinuità.

Possiamo disegnare approssimazioni della serie (2.9) considerando la somma dei primi N termini della serie stessa

$$S_N = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^N \left[-\frac{2 \cos(2n-1)x}{\pi (2n-1)^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right] \quad (2.10)$$



Il grafico dell'Eq.(2.10) per $N=5,10,20$

Come si può notare dai grafici, nel punto $x = \pi^-$ il grafico sale sopra il valore massimo della funzione, così come nel punto $x = \pi^+$ ne scende sotto.

Questo fenomeno, caratteristico della rappresentazione in serie di Fourier (ed anche altre) nei punti di discontinuità della funzione è noto come **fenomeno di Gibbs**². Questo aumento e diminuzione ammon-tano, nel loro insieme, a circa il 18% della distanza dei valori nella discontinuità. Questo evento persiste anche considerando somme parziali con molti termini.

ESEMPIO 48. *Rappresentare in serie di Fourier la seguente funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{per } -2 < x < 0, \\ 1, & \text{per } 0 < x < 2, \end{cases}$$

$$f(x + 4) = f(x).$$

SOLUZIONE 48. *Il grafico della funzione è rappresentato in figura.*

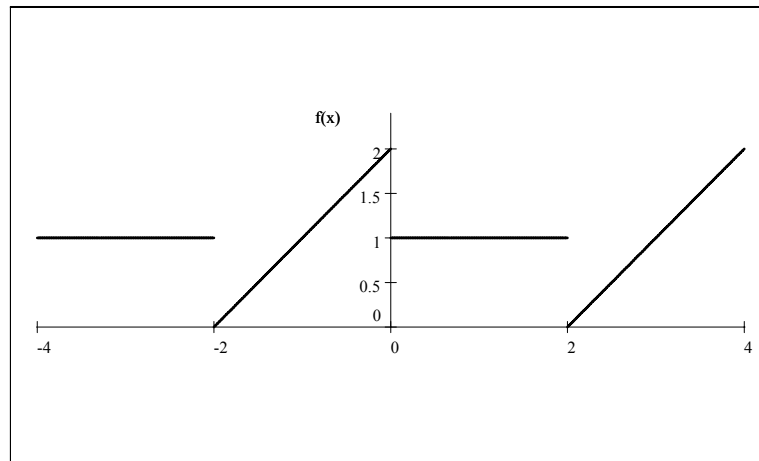


Grafico della funzione dell'esempio

La funzione soddisfa le ipotesi del Teorema (14) eccetto il fatto che il periodo è 4 invece di 2π . Questo può essere facilmente ovviato con un cambio di variabile

$$x = \frac{\pi}{2}t.$$

Ne segue che $dx = \frac{\pi}{2}dt$ e quindi le Eq. (2.7) e (2.8) diventano

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{n\pi}{2}x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

e

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{n\pi}{2}x dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

rispettivamente. Da queste due si ricava:

$$a_0 = 2$$

²Josiah W. Gibbs (1839-1903) fisico matematico americano.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (x+2) \cos \frac{n\pi}{2} x dx + \frac{1}{2} \int_0^2 \cos \frac{n\pi}{2} x dx \\
 &= \frac{4}{n^2 \pi^2} \text{ se } n \text{ è dispari, zero altrimenti;} \\
 b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (x+2) \sin \frac{n\pi}{2} x dx + \frac{1}{2} \int_0^2 \sin \frac{n\pi}{2} x dx \\
 &= -\frac{2}{n\pi} \text{ se } n \text{ è pari, zero altrimenti.}
 \end{aligned}$$

Quindi

$$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} x - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi}{n} x. \quad (2.11)$$

Possiamo ottenere una informazione utile dalla serie (2.11) ponendo $x = 0$. In tal caso si ha

$$f(0) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

D'altra parte, sappiamo dal Teorema (14) che $f(0) = 3/2$, da cui discende

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2.1. Esercizi.

(1) Mostrare che la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & 0 < x < 1 \\ x, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

è continua a tratti ma non liscia a tratti su $(0, 2)$.

(2) Mostrare che i coefficienti di Fourier di una funzione $f(x)$ che è liscia a tratti su $[-L, L]$ e periodica di periodo $2L$ sono:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.12)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.13)$$

(3) Scrivere le serie di Fourier delle seguenti funzioni

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < 0 \\ x-2, & 0 < x < 2 \end{cases}, \quad f(x+4) = f(x)$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad f(x+2) = f(x)$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ \sin \pi x, & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad f(x+2) = f(x)$$

(e)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ x^2, & 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}, \quad f(x+1) = f(x)$$

(f)

$$f(x) = \cos \pi x, \quad -1 < x < 1, \quad f(x+2) = f(x)$$

(g)

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

(h)

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

(i)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x + 1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1 - \frac{2}{\pi}x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

(j)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 5 \end{cases}, \quad f(x+10) = f(x)$$

(4) Supponendo di aver ottenuto la serie di Fourier per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 3, & x = 1 \\ 2(2-x), & 1 < x < 2 \end{cases}, \quad f(x+3) = f(x)$$

- dire a quali valori converge la serie nei punti (a) $x = -1$, (b) $x = 0$, (c) $x = 1$, (d) $x = 2$, (e) $x = \frac{3}{2}$, (f) $x = 3$, (g) $x = -2$
- (5) Usare l'Eq.(2.10) per calcolare $f(\pi/2)$ per $N = 5, 10, 20$ e confrontare questi valori con il valore vero.
- (6) Usare l'Eq.(2.11) per calcolare $f(1)$ per $N = 5, 10, 20$ e confrontare questi valori con il valore vero.
- (7) Mostrare che l'insieme

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2c}}, \frac{1}{\sqrt{c}} \cos \frac{n\pi}{c} x, \frac{1}{\sqrt{c}} \sin \frac{m\pi}{c} x, \quad n, m = 1, 2, \dots \right\}$$

è ortonormale nell'intervallo $[a, a + 2c]$ con funzione peso uno, qualunque sia il valore di a .

- (8) Con riferimento all'Esercizio 7, mostrare che i coefficienti della serie di Fourier dello sviluppo di una funzione liscia a tratti nell'intervallo $[a, a + 2c]$ sono dati da

$$a_n = \frac{1}{c} \int_a^{a+2c} f(x) \cos \frac{n\pi}{c} x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.14)$$

$$b_n = \frac{1}{c} \int_a^{a+2c} f(x) \sin \frac{n\pi}{c} x dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.15)$$

- (9) Verificare che lo sviluppo

$$(\arcsin x)^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{(2n)!} (2x)^{2n}$$

è vera nell'intervallo $(-1, 1)$

- (10) Porre $x = 1/2$ nello sviluppo dell'Esercizio 9 ed ottenere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- (11) Usare il risultato dell'Esercizio 10 per mostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- (12) Generalizzare il Teorema (14) per una funzione $f(x)$ periodica di periodo $2L$ e liscia a tratti nell'intervallo $a \leq x \leq a + 2L$
- (13) Calcolare la serie di Fourier per le seguenti funzioni
- (a) $f(x) = e^x$, $0 < x < 2\pi$, $f(x + 2\pi) = f(x)$
- (b) $f(x) = \cos ax$, $-\pi < x < \pi$, $f(x + 2\pi) = f(x)$
- (14) Usare i risultati dell'Esercizio 13 (a) per trovare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

3. Serie in seni, coseni ed in forma esponenziale

In molte applicazioni della serie di Fourier, una funzione $f(x)$ è definita in un intervallo $0 < x < L$. Questa può essere estesa a tutto l'intervallo $-L < x < L$ per parità o disparità, per poi essere estesa a tutto \mathbb{R} .

Ricordo che una funzione è detta **pari** se

$$f(x) = f(-x) ,$$

mentre è detta **dispari** se

$$f(x) = -f(-x) .$$

Tanto per ricordare alcuni esempi banali, le funzioni x^{2n} sono pari mentre quelle del tipo x^{2n+1} sono dispari, così come, $\cos x$ è pari, mentre $\sin x$ è dispari.

Ricordiamo infine che, come abbiamo visto nell'Es.1 del paragrafo precedente, se $f(x)$ è liscia a tratti e definita nell'intervallo $(-L, L)$ il suo sviluppo di Fourier è dato

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x , \quad (3.1)$$

dove

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x dx , \quad n = 0, 1, 2, \dots , \quad (3.2)$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x dx , \quad n = 1, 2, \dots . \quad (3.3)$$

3.1. Serie dei coseni. Se $f(x)$ definita nell'intervallo $(0, L)$ viene **estesa per parità** all'intervallo $(-L, L)$ e poi estesa ad \mathbb{R} per periodicità, la funzione risultante è definita come

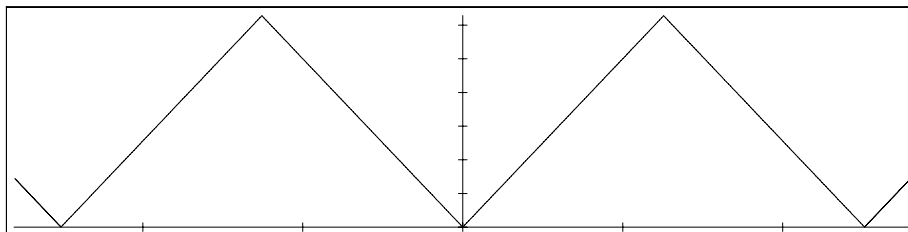
$$f(x) = \begin{cases} f(x) , & 0 < x < L \\ f(-x) , & -L < x < 0 , \end{cases} , \quad f(x+2L) = f(x) .$$

Questa è una funzione pari e quindi, tutti i coefficienti di Fourier b_n sono nulli. Infatti, come ben noto, il prodotto di una funzione pari con una dispari è dispari. Ne consegue che i termini $f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x$ sono dispari e l'integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico vale zero. Inoltre, i termini a_n possono essere scritti nella forma

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x dx , \quad n = 0, 1, 2, \dots . \quad (3.4)$$

ESEMPIO 49. Scrivere la serie dei coseni di Fourier della funzione $f(x) = x$, $0 \leq x \leq \pi$.

SOLUZIONE 49. *L'estensione periodica della funzione data è mostrata in figura*



Estensione pari di $f(x) = x$, $0 \leq x \leq \pi$

Usando l'Eq.(3.4) si ha

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx$$

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi.$$

ne segue che la rappresentazione in serie della funzione è data da

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}. \quad (3.5)$$

3.2. Serie dei seni. Se $f(x)$ definita nell'intervallo $(0, L)$ viene estesa per disparità all'intervallo $(-L, L)$ e poi estesa ad \mathbb{R} per periodicità, la funzione risultante è definita come

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ -f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}, \quad f(x+2L) = f(x).$$

Questa è una funzione dispari e quindi, tutti i coefficienti di Fourier a_n sono nulli. Infatti, come ben noto, il prodotto di una funzione dispari con una pari è dispari. Ne consegue che i termini $f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x$ sono dispari e l'integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico vale zero. Inoltre, i termini b_n possono essere scritti nella forma

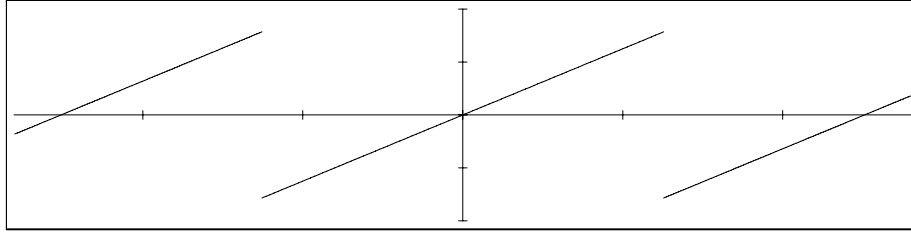
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

ESEMPIO 50. *Scrivere la serie dei seni di Fourier della funzione $f(x) = x$, $0 \leq x < \pi$, $f(\pi) = 0$*

SOLUZIONE 50. *L'estensione dispari della funzione è data da*

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x).$$

In figura è mostrata il grafico (un pezzo) dell'estensione,



Estensione dispari di $f(x) = x$, $0 \leq x < \pi$

Usando l'Eq.(3.6) si ottiene

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = (-1)^{n+1} \frac{2}{n} .$$

La serie può allora essere scritta nella forma

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx . \quad (3.7)$$

Da notare che sebbene le tre espressioni (2.9), (3.5) e (3.7) siano differenti, tutte e tre rappresentano la funzione $f(x) = x$ nell'intervallo $0 < x < \pi$.

3.3. Serie esponenziale. Un'altra utile forma della serie di Fourier è la forma esponenziale o forma complessa. Essa è ottenuta dalla forma trigonometrica standard

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx ,$$

usando la formula di Eulero

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx , \quad e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx .$$

Infatti, dalla formula di Eulero si ricava che

$$\cos nx = \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) \quad \text{e} \quad \sin nx = \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}) ,$$

da cui possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{inx} + e^{-inx}) - ib_n (e^{inx} - e^{-inx}) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{inx} + (a_n + ib_n) e^{-inx} . \end{aligned}$$

Se definiamo adesso i **coefficienti complessi** di Fourier nella forma

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 , \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) , \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) , \quad n = 1, 2, \dots , \quad (3.8)$$

si ha che

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (3.9)$$

che è la forma esponenziale (o forma complessa) della serie di Fourier. Essa viene comunemente usata in fisica ed in ingegneria per la semplicità della sua notazione.

Nel ragionamento sopra abbiamo assunto che la funzione $f(x)$ avesse periodo 2π , ma solo per semplicità di notazione. Nel caso di periodo $2L$ avremmo scritto

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

con la corrispondente modifica dei coefficienti c_n . lasciamo per esercizio scrivere i dettagli di ciò, così come il calcolo della formula

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.10)$$

a partire da a_n e b_n . Sarebbe utile, a questo proposito, ricordare la **ortogonalità hermitiana** vista nel Paragrafo 2.6.

3.4. Esercizi.

- (1) Scrivere la formula per i c_n quando il periodo è $2L$.
Nei seguenti esercizi 2 - 7 scrivere la rappresentazione di Fourier (a) del seno e (b) del coseno delle funzioni date
- (2) $f(x) = 2 - x$, $0 < x \leq 2$
- (3) $f(x) = a$, $0 < x \leq 3$, $a > 0$
- (4) $f(x) = x^2$, $0 \leq x < 1$
- (5) $f(x) = e^x$, $0 < x < 2$
- (6) $f(x) = \sin \pi x$, $0 \leq x < 1$
- (7) $f(x) = \cos x$, $0 < x \leq \pi/2$
- (8) Trovare la serie di Fourier dei seni della funzione $x-1$ nell'intervallo aperto $1 < x < 2$ (la soluzione non è unica)
- (9) Trovare la serie di Fourier dei coseni della funzione $x - 1$ nell'intervallo aperto $1 < x < 2$ (la soluzione non è unica)
- (10) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ -x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad f(x+2) = f(x)$$

- (a) Trovare la serie di Fourier della funzione
- (b) usare il risultato della parte (a) per mostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

- (11) Trovare la rappresentazione in serie di seni di Fourier della funzione $f(x) = 1$, $0 < x < \pi$, $f(0) = f(\pi) = 0$

(12) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & 1 < x < 2, \\ -x + 1, & 2 < x < 3 \end{cases}, \quad f(x+2) = f(x),$$

scriverne la serie di Fourier.

(13) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 2, \\ -1, & -2 < x < 0 \end{cases}, \quad f(x+4) = f(x), \quad f(0) = f(2) = 0,$$

scriverne la serie di Fourier.

(14) Mostrare che ogni funzione, definita su un intervallo simmetrico, può essere scritta come somma di una funzione pari ed una dispari.

(15) Data la funzione $f(x) = x - x^2$ sull'intervallo $0 < x < 1$, periodica di periodo 1, mostrare che essa è pari.

(16) Data la funzione

$$f(x) = (-1)^n h, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n < x < n + 1,$$

scriverne la serie di Fourier.

(17) Provare che se $f(x)$ e $f'(x)$ sono entrambe pari, allora $f(x)$ è costante.

(18) Scrivere i primi 5 termini dello sviluppo in seni di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi/2, \\ 1, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}.$$

(19) Scrivere la serie di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & 0 < x \leq 1, \\ 3 - x, & 1 \leq x < 2 \end{cases}, \quad f(x+2) = f(x).$$

4. Applicazioni

In questo paragrafo vogliamo illustrare come si possono usare le serie di Fourier per risolvere i problemi al bordo. Tutte le volte che è possibile cercheremo di evidenziare l'interpretazione fisica del problema. Discuteremo, inoltre, le ipotesi che devono essere fatte, in special modo per quanto concerne le condizioni al bordo.

ESEMPIO 51. *Trovare la temperatura stazionaria all'interno di un piatto rettangolare $0 < x < \pi$, $0 < y < b$, se il bordo $y = 0$ ha una distribuzione di temperatura data dalla funzione $f(x) = 64x(\pi - x)$, $0 < x < \pi$, e gli altri tre lati sono tenuti a temperatura nulla.*

SOLUZIONE 51. *Assumiamo che le facce del piatto rettangolare siano perfettamente isolate così che il problema è quello della conduzione di calore (o diffusione) nel piano xy . L'equazione di diffusione bi-dimensionale è data da*

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}) ,$$

ma poiché stiamo cercando la distribuzione stazionaria, cioè una distribuzione di temperatura indipendente dal tempo, l'equazione che ci interessa è:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 .$$

Il problema che dobbiamo affrontare è quindi il seguente

$$\begin{aligned} \text{E.D.P. } & u_{xx} + u_{yy} = 0 , & 0 < x < \pi , \quad 0 < y < b , \\ \text{C.B. } & u(0, y) = u(\pi, y) = 0 , & 0 < y < b , \\ & u(x, b) = 0, \quad u(x, 0) = 64x(\pi - x) , & 0 < x < \pi . \end{aligned}$$

Risolviamo il problema col metodo di separazione delle variabili, come nel Paragrafo 4.2 per ottenere, per ogni n la soluzione

$$u_n(x, y) = \frac{b_n}{\sinh nb} \sin nx \sinh n(b - y) , \quad n = 1, 2, \dots , \quad (4.1)$$

dove le b_n sono costanti arbitrarie. Ognuna delle funzioni dell'Eq.(4.1) soddisfa l'equazione e le condizioni al bordo omogenee. Come soluzione completa del nostro problema prendiamo la serie di tutte le soluzioni, cioè

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sinh nb} \sin nx \sinh n(b - y) .$$

Applicando alla soluzione la condizione al bordo non-omogenea, si ha:

$$u(x, 0) = b_n \sin nx = 64x(\pi - x) .$$

Questa non è altro che la rappresentazione come serie dei seni di Fourier della funzione $64x(\pi - x)$ nell'intervallo $0 < x < \pi$. Possiamo allora usare l'Eq.(3.6) per trovare i coefficienti b_n . Ne segue che:

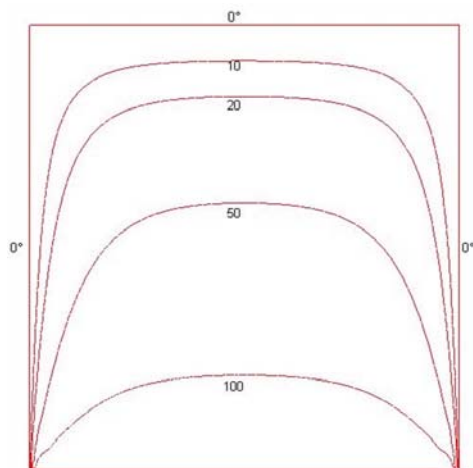
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 64x(\pi - x) \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 , & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{512}{\pi n^3} , & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

la soluzione completa è

$$u(x, y) = \frac{512}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x \sinh(2n+1)(b-y)}{(2n+1)^3 \sinh(2n+1)b} , \quad (4.2)$$

dove abbiamo usato l'espressione $2n+1$ per rappresentare i numeri dispari.

Vogliamo richiamare l'attenzione sul fatto che la soluzione analitica nell'Eq.(4.2) può essere usata per calcolare $u(x, y)$ in vari punti, in particolare, per esempio, le isoterme del problema ($u(x, y) = \text{cost}$)



Linee equipotenziali

ESEMPIO 52. Risolvere il problema

$$E.D.P. \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2,$$

$$C.B. \quad u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad 0 < y < 2,$$

$$u(x, 0) = u(x, 2) = 64x(\pi - x), \quad 0 < x < 1.$$

SOLUZIONE 52. Questo problema è simile a quello dell'esempio precedente, quindi possiamo usare i risultati già ottenuti. Poiché lavoriamo su intervalli diversi, bisogna operare un cambio di scala.

Vogliamo usare il principio di sovrapposizione degli effetti, visto che l'equazione è lineare. Cominciamo col risolvere il problema

$$E.D.P. \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2,$$

$$C.B. \quad u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < 2,$$

$$u(x, 2) = 0, \quad u(x, 0) = 64x(\pi - x), \quad 0 < x < 1.$$

La soluzione è

$$u(x, y) = \frac{512}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \pi (2n+1)x \sinh \pi (2n+1)(2-y)}{(2n+1)^3 \sinh 2\pi (2n+1)}, \quad (4.3)$$

Risolviamo adesso il problema

$$E.D.P. \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2,$$

$$C.B. \quad u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < 2,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = 64x(\pi - x), \quad 0 < x < 1.$$

La sua soluzione è

$$u(x, y) = \frac{512}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \pi (2n+1)x \sinh \pi (2n+1)y}{(2n+1)^3 \sinh 2\pi (2n+1)}. \quad (4.4)$$

Possiamo adesso sommare la due soluzioni ottenute (4.3) ed (4.4) per ottenere la soluzione del problema originario

$$u(x, y) = \frac{512}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \pi (2n+1)x}{(2n+1)^3 \sinh 2\pi (2n+1)} [\sinh \pi (2n+1)y + \sinh \pi (2n+1)(2-y)] \quad (4.5)$$

Il seguente problema, come vedremo, presenta delle discontinuità.

ESEMPIO 53. Risolvere il seguente problema

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ C.B. \quad u(0, y) &= u(1, y) = 0, & 0 < y < 1, \\ u(x, 1) &= 0, \quad u(x, 0) = 10, & 0 < x < 1. \end{aligned}$$

SOLUZIONE 53. La soluzione di questo problema di Dirichlet è semplice da ottenersi. Essa è

$$u(x, y) = \frac{40}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \pi (2n+1)x \sinh \pi (2n+1)(1-y)}{(2n+1)^3 \sinh \pi (2n+1)}. \quad (4.6)$$

In questo caso i punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$ sono punti di discontinuità per la temperatura al bordo. Tuttavia, in accordo al Teorema (14) si ha che la serie soluzione converge in questi punti al valore 5, la media dei due valori nella discontinuità. la Figura () che disegna alcune delle isoterme mostra che questa media non è un valore realistico. Infatti, il problema, così come è posto, non è fisicamente realizzabile nell'intorno dei due vertici $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

Concludiamo questo paragrafo ricordando una applicazione di tipo medico dell'analisi di Fourier. L'uso di strumentazione ad ultrasuoni di alta frequenza è diventata comune nella diagnosi medica. le onde sonore non sembrano causare effetti indesiderati e, al contrario dei raggi X possono essere usati, per esempio, per esaminare la posizione e la crescita del feto, così come il cuore umano può essere esaminato inviando brevi impulsi sonori attraverso il petto e registrandone l'eco. Poiché la diverse parti del cuore presentano una diversa impedenza acustica, l'ecocardiogramma è utile (come ben noto) nella diagnosi. Se $f(t)$ denota l'ampiezza nel tempo della forma d'onda dell'ecocardiogramma, allora una sua rappresentazione approssimata con una serie finita di Fourier è data da

$$f(t) = \sum_{n=1}^N \sqrt{C_n} \sin(n\omega_0 t + \theta_n) + e(t).$$

In questa rappresentazione ω_0 , la frequenza fondamentale della serie, è 2π volte il reciproco del battito cardiaco. Il termine $e(t)$ rappresenta l'errore risultante dall'uso di una somma finita. I termini C_n e θ_n rappresentano rispettivamente, l'ampiezza e l'angolo di fase delle singole

armoniche. E' stato mostrato che la conoscenza di C_0 e C_1 sono sufficienti a distinguere i pazienti che hanno un cuore normale da coloro che hanno disfunzioni cardiache.

4.1. Esercizi.

- (1) Verificare che le funzioni $u_n(x, y)$ dell'Eq.(4.1) soddisfano la EDP data e le tre condizioni omogenee al bordo.
- (2) Calcolare i coefficienti di Fourier b_n dell'Esempio (51).
- (3) Verificare che la soluzione $u(x, y)$ dell'Eq.(4.3) del primo problema semplificato nell'Esempio (52) soddisfano le condizioni al bordo date.
- (4) Verificare che la soluzione $u(x, y)$ dell'Eq.(4.4) del primo problema semplificato nell'Esempio (52) soddisfano le condizioni al bordo date.
- (5) Ottenere la soluzione $u(x, y)$ dell'Eq.(4.6) per il problema dell'Esempio (53).
- (6) Mostrare che la serie di Fourier per la funzione $f(t)$ dell'esempio di applicazione medica può essere scritta nella forma mostrata nel testo. (**Sugg:** usare l'identità trigonometrica per $\sin(A + B)$)
- (7) Risolvere il seguente problema

$$\begin{aligned}
 E.D.P. \quad & V_{xx} + V_{yy} = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\
 C.B. \quad & V(0, y) = V(1, y) = 0, & 0 < y < 1, \\
 & V(x, 1) = 0, \quad V(x, 0) = \sin \pi x, & 0 < x < 1.
 \end{aligned}$$

- (8) Dare una interpretazione fisica del problema nell'Esercizio 7.
- (9) Una corda di lunghezza unitaria è fissata agli estremi. Alla corda viene data una posizione iniziale ella forma $f(x) = 0.01x$ e rilasciata da una posizione da una posizione di riposo.
 - (a) Scrivere l'EDP che soddisfa la corda insieme alle condizioni iniziali ed al bordo.
 - (b) Risolvere il problema della parte (a).
- (10) Considerare il seguente problema

$$\begin{aligned}
 E.D.P. \quad & y_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\
 C.B. \quad & y(0, t) = y(1, t) = 0, & t > 0, \\
 & y(x, 0) = 0, \quad y_t(x, 0) = 0.01x, & 0 < x < 1.
 \end{aligned}$$

- (a) Interpretare fisicamente il problema
- (b) Risolvere il problema
- (c) Verificare che la soluzione soddisfa le condizioni iniziali ed al bordo.
- (d) Calcolare con tre decimali $y(1/2, t)$ per $T = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1.0$
- (e) Riportare graficamente i risultati in (d) per mostrare la storia temporale del punto mediano della corda.

(11) Dato il seguente problema

$$E.D.P. \quad y_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$C.B. \quad y(0, t) = 0, \quad y_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$y(x, 0) = f(x), \quad y_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

- (a) Spiegare perché la seconda condizione al bordo può essere interpretata affermando che il secondo estremo della corda è libero.
- (b) Mostrare come il problema di bordo libero può essere generalizzato al caso $y_x(\pi, t) = g(t)$ $t > 0$.
- (c) Quale restrizione va messa sulla funzione $g(t)$ nella parte (b)?

5. Convergenza della serie di Fourier

In questo paragrafo discuteremo della convergenza della serie di Fourier e delle condizioni che ne permettono la derivazione e l'integrazione termine a termine. Di questi problemi, che sono di tipo teorico, parleremo senza entrare in elementi di sofisticazione matematica.

Per convenienza, pensiamo ad una funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Questa, come sappiamo, non è una restrizione perché con un opportuno cambio di scala possiamo trasformarlo in qualsiasi altro intervallo. Abbiamo quindi a che fare con una serie del tipo

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (5.1)$$

dove

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

Faremo, inoltre uso della somma finita

$$S_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

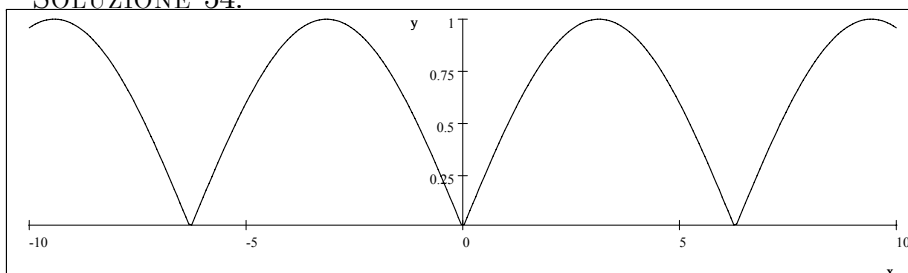
Consideriamo dapprima un esempio in cui la serie di Fourier si comporta nel migliore dei modi.

ESEMPIO 54. *Trovare la serie di Fourier della funzione*

$$f(x) = \sin \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x),$$

ed analizzare la convergenza della serie.

SOLUZIONE 54.



La funzione periodica $\sin \frac{x}{2}$

La funzione è pari, quindi ne segue che tutti i $b_n = 0$ e

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \frac{x}{2} dx = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2} dx = \begin{cases} 0, & n \text{ dispari} \\ \frac{4}{\pi(1-n^2)}, & n \text{ pari}. \end{cases}$$

Quindi,

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{(4n^2 - 1)} \quad (5.4)$$

è la rappresentazione di Fourier della funzione data. Adesso, notiamo che si ha

$$\left| \frac{\cos nx}{(4n^2 - 1)} \right| \leq \frac{1}{(4n^2 - 1)} < \frac{1}{n^2}$$

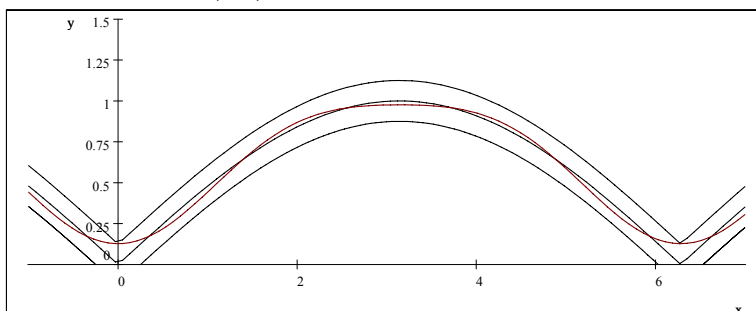
e poiché è noto che

$$\sum_{n=01}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

ne segue che la serie nell'Eq.(5.4) è assolutamente e uniformemente converge per tutti gli x . Questo significa che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un valore di N , che dipende solo da ε , tale che

$$\left| \sin \frac{x}{2} - S_N(x) \right| < \varepsilon$$

come mostrato in Fig.(??)



Convergenza uniforme

L'esempio precedente è una illustrazione del seguente teorema, che diamo senza dimostrazione.

THEOREM 15. *Se la funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π è continua ed ammette derivata continua a tratti nell'intervallo $[0, 2\pi]$, allora la sua serie di Fourier converge uniformemente ed assolutamente ad $f(x)$.*

Se la funzione $f(x)$ non soddisfa le ipotesi del Teorema (15) allora si può usare il Teorema (14)

La convergenza della serie di Fourier può essere ulteriormente studiata esaminando la $S_N(x)$ data dall'Eq.(5.1). Sostituendo le espressioni di a_n e b_n nell'equazione, si ha

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \cos nx \int_0^{2\pi} f(s) \cos ns ds \\ &\quad + \sin nx \int_0^{2\pi} f(s) \sin ns ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(x-s) \right] f(s) ds . \end{aligned} \quad (5.5)$$

per semplificare l'integrale, consideriamo il fatto che

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(x-s) = \frac{1 \sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) (x-s) \right]}{2 \sin \frac{1}{2} (x-s)}$$

sempre che

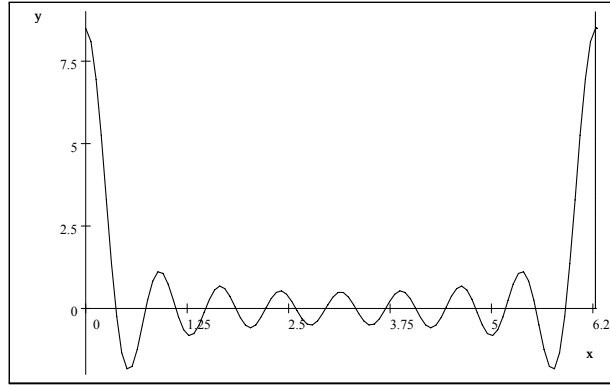
$$\frac{1}{2} (x-s) \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

La funzione

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) t}{\sin \frac{1}{2} t}, & t \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ N + \frac{1}{2}, & t = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

è chiamata **nucleo di Dirichlet**. Questo nucleo può essere usato per esprimere la somma dei primi N termini della serie di Fourier in forma chiusa. Dall' Eq.(5.5) si ottiene

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) D_N(x-s) ds . \quad (5.6)$$

Nucleo di Dirichlet $D_8(x)$

La funzione è comunque oscillante, è quindi difficile usare l'Eq.(5.6) per stimare l'errore tra $f(x)$ e la sua serie di Fourier. Operando la sostituzione $x - s = t$ si ottiene

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) D_N(x-s) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} f(x-t) D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] D_N(t) dt . \end{aligned} \quad (5.7)$$

Possiamo ora enunciare il seguente teorema.

THEOREM 16. *Sia $f(x)$ periodica di periodo 2π ed integrabile su $[0, 2\pi]$. Condizione necessaria e sufficiente perché per un dato x_0 la successione delle somme parziali $\{S_N(x_0)\}$ converga al limite $S(x_0)$ è che*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)] D_N(t) dt = 0 .$$

PROOF. Il risultato segue dell'Eq.(5.7) e dalla relazione (provare a dimostrarla)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_N(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} D_N(t) dt = 1$$

e dal fatto ovvio che

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} S(x_0) D_N(t) dt = S(x_0) .$$

□

Vogliamo affrontare adesso il problema della derivazione della serie di Fourier, cioè: se $f(x)$ ha una rappresentazione in serie di Fourier, sotto quali condizioni la funzione $f'(x)$ ha come rappresentazione la corrispondente serie derivata?

5.1. Derivazione della serie di Fourier. Nell'Esempio (49) abbiamo ottenuto la rappresentazione

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad (5.8)$$

per la funzione $f(x) = x$, $0 \leq x \leq \pi$. Se deriviamo entrambi i membri, si ottiene

$$f'(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)} . \quad (5.9)$$

Si può mostrare (provare a farlo) che la serie trovata derivando termine a termine è la rappresentazione di $f'(x) = 1$ per $0 < x < \pi$ e che $f'(0) = f'(\pi) = 0$ come era lecito aspettarsi.. D'altra parte, se adesso consideriamo la rappresentazione dell'estensione dispari, vedi formula (3.7), la derivazione da come risultato

$$f'(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos nx ,$$

la quale *non converge in nessun punti* poiché è violata la condizione necessaria per la convergenza di una serie, e cioè che il termine generale $a_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Una condizione sufficiente che garantisce la derivabilità della serie di Fourier è data dal seguente teorema.

THEOREM 17. *Supponiamo che $f(x)$ abbia una rappresentazione di Fourier per $0 \leq x \leq 2\pi$ data da*

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) .$$

La serie di Fourier è derivabile termine a termine in ogni punto in cui esiste $f''(x)$ se $f(x)$ è continua e $f'(x)$ continua a tratti su $0 \leq x \leq 2\pi$ ed inoltre $f(0) = f(2\pi)$. In questo caso è

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin nx + b_n \cos nx) , \quad 0 < x < 2\pi .$$

5.2. Integrazione della serie di Fourier. L'integrazione della serie di Fourier è un problema molto più semplice. Questo fatto è ovvio pensando al fatto che l'integrazione è un processo che regolarizza le funzioni, tendendo ad eliminando le discontinuità.

THEOREM 18. *Sia $f(x)$ continua a tratti su $0 < x < 2\pi$ ed abbia rappresentazione*

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) .$$

Si ha che

$$\int_0^x f(s) ds = \frac{1}{2}a_0x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [a_n \sin nx - b_n (\cos nx - 1)] , \quad 0 \leq x \leq 2\pi .$$

ESEMPIO 55. Scrivere la serie di Fourier di x^2 su $[-\pi, \pi]$.

SOLUZIONE 55. Dalla (3.7) si ha che

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n} ,$$

che è una rappresentazione valida su $-\pi < x < \pi$. Usando il teorema precedente si ha

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} (\cos nx - 1) \\ &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} (\cos nx) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} . \end{aligned}$$

Il secondo termine vale $\pi^2/6$ e quindi si ha

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx . \quad (5.10)$$

Lasciamo per esercizio dimostrare che il risultato ottenuto è valido per tutti gli x .

5.3. Esercizi.

(1) Mostrare che

$$2 \sin \frac{t}{2} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nt \right] = \sin \left(N + \frac{1}{2}t \right)$$

usando l'identità trigonometrica

$$2 \sin \frac{t}{2} \cos nt = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) t .$$

- (2) Dimostrare che $D_N(t) = N + \frac{1}{2}$ se $t = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- (3) Mostrare che $S_N(x)$ può essere scritta nella forma data dalla (5.7).
- (4) Mostrare che la (5.9) rappresenta la serie di Fourier di un'onda quadra di ampiezza 1e periodo 2π .
- (5) verificare che la (5.10) è valida per tutti i valori di x .
- (6) Dire perché la (5.8) soddisfa le ipotesi del teorema di differenziazione.

(7) Spiegare perché la serie

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$$

non soddisfa le ipotesi del teorema di derivazione.

(8) ottenere la serie di Fourier per $f(x) = x$, $0 \leq x < 2\pi$ derivando una appropriata rappresentazione di x^2 . Per quali valori di x il risultato è valido?

(a) Ottenere il risultato

$$\sin x = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(1-4n^2)}, \quad 0 < x < \pi$$

(b) Mostrare che il risultato della parte (a) soddisfa le ipotesi del teorema di derivazione.

(c) Ottenere la serie di Fourier di $\cos x$, $0 < x < \pi$, dal risultato in (a).

(a) Scrivere la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

(b) Mostrare che la serie ottenuta in (a) soddisfa il teorema di derivazione.

(c) Scrivere la serie della funzione $g(x) = |x|$, per $0 < x < \pi$, $f(x+2\pi) = f(x)$.

(d) Discutere la convergenza delle rappresentazioni in (a) e (c).

(a) Scrivere la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x), \quad 0 < x < 2\pi, \quad f(x+2\pi) = f(x).$$

(b) Mostrare che la serie trovata in (a) soddisfa le ipotesi del teorema di integrazione.

(c) Scrivere la rappresentazione della funzione

$$g(x) = \frac{x}{4}(2\pi - x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

(d) Discutere la convergenza delle serie in (a) ed in (c).

(9) Usando il risultato dell'Esercizio 11(d) mostrare che

$$\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} x(2\pi - x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

e trovare la somma della serie.

(10) Mostrare che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

(11) Ottenere la formula

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{-N}^N \exp[in(x-t)] dt ,$$

dove f è periodica di periodo 2π .

(a) Mostrare che $D_N(t)$ è una funzione pari.

(b) Mostrare che $D_N(t)$ è periodica di periodo 2π .

Integrali e trasformate di Fourier

1. L'integrale di Fourier

L'estensione dalla serie di Fourier all'integrale di Fourier, così come viene presentata, è intesa come estensione plausibile piuttosto che come *sviluppo matematico* che avrebbe bisogno di una giustificazione e dimostrazione teorica approfondita che uscirebbe dagli scopi del corso.

Abbiamo visto che una funzione periodica $f(x)$ che soddisfa le condizioni di Dirichlet (Teorema 4.1) può essere rappresentata sotto forma di serie di Fourier. Le condizioni di Dirichlet sono sufficienti ma non necessarie. Per esempio, la funzione

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad -L < x < L, \quad f(x+2L) = f(x) \quad (1.1)$$

ha come rappresentazione di Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad (1.2)$$

dove

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.4)$$

dove abbiamo rappresentato anche i coefficienti b_n anche se essi sono tutti nulli essendo la funzione pari.

Indichiamo la funzione data nell'Eq.(1.1) con il simbolo $f_L(x)$ per sottolineare il fatto che la funzione ha periodo $2L$. La rappresentazione in serie di Fourier (1.2) della funzione non varia qualunque sia il valore di L purché finito.

Questo ci porta a considerare cosa accade se consideriamo la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x) = e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

la funzione $f(x)$ non è più una funzione periodica, ma è ancora liscia a tratti. Notiamo che la funzione $f(x)$ così definita è **assolutamente integrabile** sulla retta reale, cioè che l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx$$

è finito. Infatti,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-|x|}| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 2 \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^{+L} e^{-x} dx = 2 .$$

Torniamo alla funzione $f_L(x)$. Sia $\alpha_n = n\pi/L$ e sostituiamo i valori di a_n e b_n nella (1.2), si ha

$$\begin{aligned} f_L(x) = & \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(s) ds + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos(\alpha_n x) \int_{-L}^L f_L(s) \cos(\alpha_n s) ds \right. \\ & \left. + \sin(\alpha_n x) \int_{-L}^L f_L(s) \sin(\alpha_n s) ds \right] . \end{aligned} \quad (1.5)$$

Sia,

$$\Delta\alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{n+1}{L}\pi - \frac{n}{L}\pi = \frac{\pi}{L} ,$$

e riscriviamo la (1.5) come

$$\begin{aligned} f_L(x) = & \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(s) ds + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos(\alpha_n x) \Delta\alpha \int_{-L}^L f_L(s) \cos(\alpha_n s) ds \right. \\ & \left. + \sin(\alpha_n x) \Delta\alpha \int_{-L}^L f_L(s) \sin(\alpha_n s) ds \right] , \end{aligned} \quad (1.6)$$

del tutto equivalente alla precedente per ogni valore finito di L .

Adesso facciamo tendere L all'infinito. Ne segue che il primo integrale della (1.6) tende a zero poiché la funzione è assolutamente integrabile. Inoltre, è ragionevole supporre che la serie diventi un integrale da 0 a $+\infty$. Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos(\alpha x) \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos(\alpha s) ds \right. \\ & \left. + \sin(\alpha x) \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \sin(\alpha s) ds \right] d\alpha , \end{aligned} \quad (1.7)$$

che è la **rappresentazione integrale di Fourier** della funzione data. L'Eq.(1.7) viene spesso scritta nella forma

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha , \quad -\infty < x < \infty , \quad (1.8)$$

dove i **coefficienti integrali di Fourier** $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ sono dati da

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos(\alpha s) ds \\ \text{e} & \\ B(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \sin(\alpha s) ds \end{aligned} \quad (1.9)$$

La parte plausibile discende dal fatto che l'elemento $\Delta\alpha$ diventa infinitesimo quando L tende all'infinito e quindi la somma si "trasforma" in integrale.

Condizioni sufficienti perché l'Eq.(1.7) sia valida sono date dal teorema seguente.

THEOREM 19. *Se $f(x)$ è una funzione liscia a tratti ed assolutamente integrabile sulla retta reale, allora $f(x)$ può essere rappresentato dall'integrale di Fourier. Nei punti di discontinuità di $f(x)$ la rappresentazione dà il valore medio tra il limite sinistro e quello destro della funzione nel punto.*

L'integrale di Fourier può essere scritto in forma più compatta. Infatti, poiché i termini $\cos \alpha x$ e $\sin \alpha x$ non dipendono dalla variabile s , la (1.7) può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) [\cos \alpha x \cos \alpha s + \sin \alpha x \sin \alpha s] ds d\alpha. \quad (1.10) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos \alpha (s-x) ds d\alpha. \quad (1.11) \end{aligned}$$

Se la funzione $f(x)$ è *pari*, allora il coefficiente $B(\alpha)$ è zero e l'Eq.(1.10) si riduce a

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(s) \cos \alpha x \cos \alpha s ds d\alpha, \quad (1.12)$$

mentre, se $f(x)$ è *dispari*, in modo analogo si ha

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(s) \sin \alpha x \sin \alpha s ds d\alpha. \quad (1.13)$$

Le (1.12) e (1.13) sono chiamate **integrale del coseno di Fourier** e **integrale del seno di Fourier**, rispettivamente.

Nel caso in cui la funzione $f(x)$ fosse definita solo su $(0, +\infty)$ se ne può fare sia l'estensione pari che l'estensione dispari ed usare la (1.12) o la (1.13).

Dalla (1.11) si nota che l'integrale interno è una funzione pari di α e si può quindi scrivere come

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos \alpha (s-x) ds d\alpha. \quad (1.14)$$

D'altra parte è

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \sin \alpha (s-x) ds d\alpha = 0 \quad (1.15)$$

poiché l'integrale interno è una funzione dispari di α . Sommando tra di loro le (1.14) e (1.15) si ottiene quella che è chiamata **forma complessa dell'integrale di Fourier**

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\alpha(s-x)} ds d\alpha, \quad (1.16)$$

che può essere scritta nella forma equivalente

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha ,$$

dove

$$C(\alpha) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\alpha s} ds ,$$

è chiamato **coefficiente complesso dell'integrale di Fourier**.

Osserviamo ancora che nel passaggio dalla serie all'integrale di Fourier, la condizione di periodicità della funzione viene sostituita dalla richiesta di assoluta integrabilità.

ESEMPIO 56. *Scrivere l'integrale di Fourier per la funzione*

$$f(x) = \exp(-|x|), \quad -\infty < x < \infty.$$

SOLUZIONE 56. *La funzione, come già visto, è assolutamente integrabile ed è pari. ne segue che $B(\alpha) = 0$. Quindi,*

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cos \alpha x ds \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \alpha x ds = \frac{2}{\pi(1+\alpha^2)}. \end{aligned}$$

Il risultato si ottiene integrando due volte per parti. Usando la (1.8) si ha

$$e^{-|x|} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\pi(1+\alpha^2)} d\alpha , \quad (1.17)$$

che è la rappresentazione di Fourier richiesta.

Vogliamo ricordare che la rappresentazione (1.17) è valida per tutti i valori di x . Osserviamo che, comunque, non siamo in grado di calcolare l'integrale in forma chiusa se non per particolari valori di x .

ESEMPIO 57. *Trovare la rappresentazione integrale seno di Fourier della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \cos x , & 0 < x < \pi/2 \\ 0 , & x > \pi/2 . \end{cases}$$

SOLUZIONE 57. *Per ottenere tale rappresentazione dobbiamo estendere in modo dispari la funzione data, ottenendo*

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & x > \pi/2 . \\ \cos x , & 0 < x < \pi/2 \\ -\cos x , & -\pi/2 < x < 0 \\ 0 , & x < -\pi/2 . \end{cases}$$

Si ha quindi, usando la (1.9) che

$$\begin{aligned} B(\alpha) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos s \, s \sin \alpha s \, ds \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\alpha - \sin(\alpha\pi/2)}{\alpha^2 - 1} \right]. \end{aligned}$$

Si ha perciò

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{[\alpha - \sin(\alpha\pi/2)] \sin \alpha x}{\alpha^2 - 1} d\alpha \quad (1.18)$$

Da notare che sebbene sembri che l'integrando sia discontinuo per $\alpha = 1$, si può mostrare (provare a farlo) che non è così.

Dall'Eq.(1.18) si ottengono i seguenti risultati:

$$\int_0^\infty \frac{[\alpha - \sin(\alpha\pi/2)] \sin(\alpha\pi/2)}{\alpha^2 - 1} d\alpha = 0 \quad (1.19)$$

e

$$\int_0^\infty \frac{[\alpha - \sin(\alpha\pi/2)] \sin(\alpha\pi/4)}{\alpha^2 - 1} d\alpha = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}. \quad (1.20)$$

nel prossimo esempio mostriamo l'integrale di Fourier in forma complessa.

ESEMPIO 58. Usare l'Eq.(1.16) per scrivere la rappresentazione di Fourier complessa della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\pi < x < \pi \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

SOLUZIONE 58. Dalla (1.16) si ha che

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\pi}^\pi \sin s \, e^{i\alpha(s-x)} \, ds \, d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\pi}^\pi \sin s \, [\cos \alpha(s-x) + i \sin \alpha(s-x)] \, ds \, d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \sin s \, \cos \alpha(s-x) \, ds \, d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \sin s \, \sin \alpha s \, \sin \alpha x \, ds \, d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin \alpha x \left[\frac{\sin \alpha\pi}{1-\alpha} + \frac{\sin \alpha\pi}{1+\alpha} \right] d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \alpha x \frac{\sin \alpha\pi}{1-\alpha^2} d\alpha. \end{aligned}$$

Osserviamo che il risultato è la rappresentazione dell'integrale seno di Fourier, il che è ragionevole poiché $f(x)$ è una funzione dispari.

Nel prossimo paragrafo esamineremo in dettaglio il coefficiente complesso $C(\alpha)$. Esso viene chiamato **trasformata di Fourier** della funzione ed è anch'esso uno strumento utile per la soluzione dei problemi al bordo.

1.1. Esercizi.

(1) Mostrare che

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{[\alpha - \sin(\alpha\pi/2)]}{\alpha^2 - 1}$$

è finito.

(2) Determinare quali delle seguenti funzioni è assolutamente integrabile sulla retta reale:

(a) $f(x) = |1 - x|$, $-1 < x < 1$

(b) $f(x) = \sin \pi x$

(c) $f(x) = x^{1/3}$

(3) Mostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1 \end{cases}$$

soddisfa le condizioni del Teorema (19) ed ha quindi una rappresentazione integrale di Fourier data da

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha \cos \alpha x}{\alpha} d\alpha, \quad -\infty < x < +\infty.$$

(4) Usare il risultato dell'esercizio precedente per mostrare che

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

(5) Mostrare che

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \text{se } a > 0.$$

(6) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

mostrare che essa soddisfa le condizioni del Teorema (19) ed ha quindi una rappresentazione integrale di Fourier data da

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x + \alpha \sin \alpha x}{1 + \alpha^2} d\alpha, \quad -\infty < x < +\infty.$$

(7) Usando il risultato dell'Es.6, mostrare che

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+\alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

(8) Provare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x \geq \pi, \end{cases}$$

soddisfa le condizioni del Teorema (19) ed ha quindi una rappresentazione integrale di Fourier data da

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x + \cos \alpha (\pi - x)}{1 - \alpha^2} d\alpha, \quad -\infty < x < +\infty.$$

(9) Usando il risultato dell'Es.8, mostrare che

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\pi\alpha/2)}{1 - \alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

(10) Scrivere la rappresentazione seno di Fourier per ognuna delle seguenti funzioni

(a) $f(x) = e^{-x}, \quad x > 0,$

(b) $f(x) = \begin{cases} h, & 0 < x < L \\ 0, & x > L \end{cases}, \quad h > 0$

(c) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

(11) Scrivere la rappresentazione coseno di Fourier per ognuna delle seguenti funzioni

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} h, & 0 < x < L \\ 0, & x > L \end{cases}, \quad h > 0,$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$

$$(e) f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

- (12) Scrivere la rappresentazione complessa di Fourier per ognuna delle seguenti funzioni

$$(a) f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} h, & 0 < x < L \\ 0, & x > L \end{cases}, \quad h > 0$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

- (13) Scrivere la rappresentazione complessa di Fourier per la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Sugg: osservare che $\sin \alpha x / (1+x^2)$ è una funzione dispari della variabile x , quindi usare il risultato dell'Eq.(1.17) scambiando α ed x .

- (14) Scrivere la rappresentazione integrale di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

- (15) Mostrare che la funzione dell'Es.14 non è assolutamente integrabile ma la sua rappresentazione di Fourier esiste. Dire se questo viola il Teorema (19).

- (16) Scrivere la rappresentazione integrale di Fourier della funzione

$$f(x) = e^{-a^2 x^2}.$$

- (17) Mostrare che in entrambi i casi gli integrandi sono definiti per $\alpha = 1$

(a) Esercizio 8 ,

(b) Esercizio 9 .

2. Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier si ottiene dall'Eq.(1.16) nel seguente modo. Riscriviamo la formula come integrali reiterati

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\alpha s} ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} d\alpha .$$

la variabile di integrazione s può essere, ovviamente, sostituita da qualsiasi altra variabile, per esempio x . Otteniamo allora il seguente paio

di equazioni

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(x)\} &= \bar{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \\ \mathcal{F}^{-1}\{\bar{f}(\alpha)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.\end{aligned}\quad (2.1)$$

La funzione $\bar{f}(\alpha)$ è la **trasformata di Fourier** della funzione $f(x)$, la seconda è la **trasformata inversa di Fourier** che definisce $f(x)$ a partire dalla sua trasformata.

Prima di dare alcuni esempi di trasformata, notiamo che alcuni autori definiscono trasformata ed antitrasformata nel seguente modo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(x)\} &= \bar{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \\ \mathcal{F}^{-1}\{\bar{f}(\alpha)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha,\end{aligned}$$

per mantenere la simmetria delle due espressioni. Altri scambiano il segno negativo nei due esponenti

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(x)\} &= \bar{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \\ \mathcal{F}^{-1}\{\bar{f}(\alpha)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha,\end{aligned}$$

altri ancora una combinazione delle due. E' del tutto ovvio che a causa del segno meno in una delle due equazioni non è possibile stabilire una vera simmetria. Ciò che è importante è che ogni coppia trasformata, antitrasformata può essere ricondotta alla (2.1) od ad una equivalente.

Volendo, si può eliminare il fattore $1/2\pi$ e scrivere la coppia di funzioni come

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(x)\} &= \bar{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i \alpha x} dx \\ \mathcal{F}^{-1}\{\bar{f}(\alpha)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha x} d\alpha.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Questa forma ha il vantaggio che il fattore $2\pi\alpha$ può essere sostituito da ω , la frequenza angolare, rendendo più compatta l'espressione.

La trasformata di Fourier, così come quella di Laplace è utile per trasformare certe equazioni alle derivate parziali in equazioni ordinarie.

Vediamo subito cosa diventa la trasformata di Fourier di du/dx e di d^2u/dx^2 assumendo che $u, du/dx$ tendano a zero quando $x \rightarrow \pm\infty$, che u sia liscia a tratti ed assolutamente integrabile sulla retta reale. Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du(x)}{dx} e^{i\alpha x} dx &= ue^{i\alpha x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{i\alpha x} dx \\ &= -i\alpha \bar{u}(\alpha).\end{aligned}\quad (2.3)$$

per la derivata seconda, integrando per parti due volte ed usando le ipotesi, si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} e^{i\alpha x} dx = -\alpha^2 \bar{u}(\alpha) ,$$

che possiamo scrivere in modo compatto, nella forma

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right\} = -\alpha^2 \bar{u}(\alpha) . \quad (2.4)$$

ESEMPIO 59. *Risolvere la seguente equazione di diffusione unidimensionale*

$$u_y(x, t) = u_{xx}(x, t) , \quad -\infty < x < +\infty , \quad 0 < t ,$$

avendo assegnato il dato $u(x, 0) = f(x)$ e $|u(t, x)| < \infty$.

SOLUZIONE 59. *Assumiamo che sia $u(x, t)$ che $u_x(x, t)$ tendano a zero quando $x \rightarrow \pm\infty$ e che $f(x)$ sia liscia a tratti ed assolutamente integrabile sulla retta reale, così che $f(x)$ ammetta trasformata di Fourier $\bar{f}(\alpha)$.*

La trasformata di Fourier di $u_t(x, t)$ è

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{i\alpha x} dx &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{i\alpha x} dx \\ &= \frac{\partial \bar{u}(\alpha, t)}{\partial t} = \frac{d\bar{u}(\alpha, t)}{dt} , \end{aligned}$$

dove abbiamo assunto che derivazione ed integrazione possano essere scambiate (vedi teorema Cap 1.5) e dove α appare come parametro.

Usando, quindi la trasformata di Fourier l'equazione di diffusione diventa:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + \alpha^2 \bar{u} = 0 , \quad \bar{u}(\alpha, 0) = \bar{f}(\alpha) .$$

La soluzione di questa equazione è

$$\bar{u}(\alpha, t) = \bar{f}(\alpha) e^{-\alpha^2 t} .$$

Usando la formula per l'inversione della trasformata, si ha

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(\alpha, t) e^{-i\alpha x} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\alpha) e^{-\alpha^2 t} e^{-i\alpha x} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{i\alpha s} e^{-\alpha^2 t} e^{-i\alpha x} d\alpha ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{i\alpha(s-x)} e^{-\alpha^2 t} d\alpha ds . \end{aligned}$$

Ora, è

$$e^{i\alpha(s-x)} e^{-\alpha^2 t} = e^{-\alpha^2 t} [\cos \alpha (s-x) + i \sin \alpha (s-x)] ,$$

il primo termine è una funzione pari di α , mentre il secondo è dispari. Quindi

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(s) \cos \alpha (s-x) e^{-\alpha^2 t} d\alpha ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{[-(s-x)^2/4t]} ds \end{aligned} \quad (2.5)$$

dove il risultato segue dal fatto che

$$\int_0^{+\infty} \cos bx e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-(b^2/4a^2)}, \quad \text{se } a > 0.$$

Dal punto di vista pratico il calcolo di $u(x, t)$ a partire dalla (2.11) può essere fatto, nella maggior parte dei casi, numericamente.

2.1. Trasformata seno di Fourier. Se $f(x)$ è una funzione dispari, possiamo definire la **trasformata seno di Fourier** nella seguente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s \{f(x)\} &= \overline{f}_s(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx \\ f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \overline{f}_s(\alpha) \sin \alpha x d\alpha. \end{aligned} \quad (2.6)$$

La trasformata seno di Fourier della funzione d^2u/dx^2 è data da

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{d^2u}{dx^2} \sin \alpha x dx &= \left. \frac{du}{dx} \sin \alpha x \right|_0^{\infty} - \alpha \int_0^{\infty} \frac{du}{dx} \cos \alpha x dx \\ &= -\alpha \int_0^{\infty} \frac{du}{dx} \cos \alpha x dx \\ &= -\alpha u \cos \alpha x \Big|_0^{\infty} - \alpha^2 \int_0^{\infty} u \sin \alpha x dx, \end{aligned}$$

da cui

$$\mathcal{F}_s \left\{ \frac{d^2u}{dx^2} \right\} = \alpha u(0) - \alpha^2 \overline{u}_s(\alpha). \quad (2.7)$$

Nel calcolo che abbiamo effettuato abbiamo assunto, come già fatto sopra, che sia u che du/dx tendano a zero quando $x \rightarrow \infty$ e che

$$\int_0^{\infty} |u(x)| dx$$

sia finito.

2.2. Trasformata coseno di Fourier. Se $f(x)$ è una funzione pari, possiamo definire la **trasformata coseno di Fourier** come

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c \{f(x)\} &= \overline{f}_c(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx \\ f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \overline{f}_c(\alpha) \cos \alpha x d\alpha. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Se, nelle stesse ipotesi precedenti, calcoliamo la trasformata coseno di d^2u/dx^2 il risultato è

$$\mathcal{F}_c \left\{ \frac{d^2u}{dx^2} \right\} = \alpha - u'(0) - \alpha^2 \bar{u}_c(\alpha) . \quad (2.9)$$

ESEMPIO 60. *Risolvere il seguente problema al bordo*

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx} , & 0 < x < \infty , & \quad 0 < t , \\ u_x(0, t) &= 0 , & & \quad 0 < t , \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 < x < \infty . \end{aligned}$$

SOLUZIONE 60. *Poiché $0 < x < \infty$ potremmo sia fare un'estensione pari che una dispari della funzione data $f(x)$. Notiamo, tuttavia, che nel problema al bordo viene dato il valore di $u_x(x, t)$ nel punto $x = 0$. Osservando le espressioni delle trasformate seno e coseno, si vede che è conveniente usare quella coseno.*

Osserviamo che, fisicamente, la condizione $u_x(0, t) = 0$ indica che non vi è flusso di calore nel punto, cioè non vi è alcuno scambio di calore a $x = 0$, l'estremità è quindi termicamente isolata.

Assumiamo, come al solito che u e du/dt tendano a zero per $x \rightarrow \infty$ e che sia $u(x, t)$ che $f(x)$ siano assolutamente integrabili su $0 < x < \infty$. Si ha quindi

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{u}_c(\alpha, t) \cos \alpha x \, d\alpha ,$$

ed usando la (2.9), l'equazione alle derivate parziali e le condizioni iniziali vengono trasformate in

$$\frac{d\bar{u}_c}{dt} = \alpha^2 k u , \quad \bar{u}_c(0) = \bar{f}_c(\alpha) .$$

da cui (vedi Esempio precedente)

$$\bar{u}_c(\alpha, t) = \bar{f}_c(\alpha) e^{-\alpha^2 kt} ,$$

da cui, usando l'antitrasformata coseno, si ha

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{f}_c(\alpha) e^{-\alpha^2 kt} \cos \alpha x \, d\alpha ,$$

e poiché

$$\bar{f}_c(\alpha) = \int_0^\infty f(x) \cos \alpha x \, dx = \bar{f}_c(\alpha) = \int_0^\infty f(s) \cos \alpha s \, ds ,$$

possiamo scrivere

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(s) \cos \alpha s \, ds \int_0^\infty e^{-\alpha^2 kt} \cos \alpha x \, d\alpha .$$

ESEMPIO 61. *Risolvere il problema al bordo*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & 0 < t, \\ u(x, 0) &= f(x), & -\infty < x < \infty, \\ u_t(x, 0) &= g(x) & 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

SOLUZIONE 61. *Assumendo le ipotesi perché u , $f(x)$, e $g(x)$ ammettano trasformate di Fourier, l'equazione alle derivate parziali è trasformata nell'equazione*

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + \alpha^2 a^2 \bar{u} = 0$$

con condizioni iniziali

$$\bar{u}(0) = \bar{f}(\alpha) \quad e \quad \bar{u}'(0) = \bar{g}(\alpha).$$

ne risulta che

$$\bar{u}(\alpha, t) = c_1(\alpha) \cos \alpha at + c_2(\alpha) \sin \alpha at.$$

La prima condizione iniziale ci dice che

$$c_1(\alpha) = \bar{f}(\alpha).$$

Derivando la soluzione rispetto al tempo, si ha

$$\bar{u}'(\alpha, t) = -\alpha a \bar{f}(\alpha) \sin \alpha at + \alpha a c_2(\alpha) \cos \alpha at,$$

e la seconda condizione iniziale implica che

$$c_2(\alpha) = \bar{g}(\alpha) / \alpha a.$$

Si ricava, quindi, che

$$\bar{u}(\alpha, t) = \bar{f}(\alpha) \cos \alpha at + \frac{\bar{g}(\alpha)}{\alpha a} \sin \alpha at.$$

e,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\bar{f}(\alpha) \cos \alpha at + \frac{\bar{g}(\alpha)}{\alpha a} \sin \alpha at \right] e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Ricordando che

$$\sin x = \frac{1}{2}i (e^{ix} - e^{-ix}) = -i \sinh ix$$

e

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) = \cosh ix,$$

l'equazione per $u(x, t)$ può essere riscritta nella forma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\alpha) \frac{e^{-i\alpha(x-at)} + e^{-i\alpha(x+at)}}{2} d\alpha \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(\alpha) \frac{e^{-i\alpha(x-at)} - e^{-i\alpha(x+at)}}{2\alpha ai} d\alpha. \end{aligned}$$

Notiamo adesso che

$$f(x - at) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\alpha) e^{-i\alpha(x-at)} d\alpha ,$$

così il primo integrale nella soluzione non è altro che

$$\frac{1}{2} [f(x - at) + f(x + at)]$$

Inoltre, da

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha ,$$

assumendo di poter scambiare l'ordine di integrazione, si ottiene che

$$\begin{aligned} \int_c^d g(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(\alpha) d\alpha \int_c^d e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(\alpha) d\alpha \left(\frac{e^{-i\alpha x}}{-i\alpha} \right) \Big|_c^d \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(\alpha) \frac{e^{-i\alpha c} - e^{-i\alpha d}}{i\alpha} d\alpha . \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(\alpha) \frac{e^{-i\alpha(x-at)} - e^{-i\alpha(x+at)}}{2\alpha ai} d\alpha = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds ,$$

e la soluzione del problema prende la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - at) + f(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds ,$$

che altro non è che la classica soluzione di D'Alambert per il problema dell'onda.

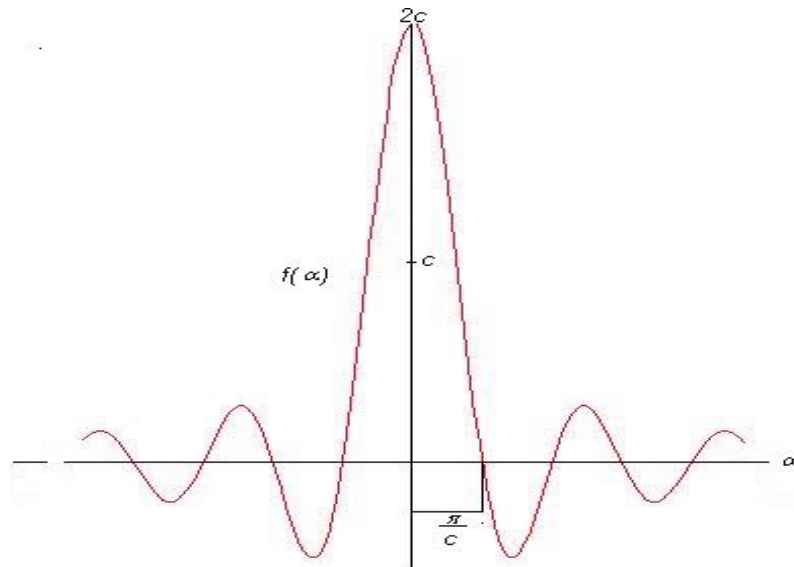
Vogliamo dare adesso una importante applicazione della trasformata di Fourier. Supponiamo che sia dato un impulso rettangolare di durata $2c$, definito da

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < c, \\ 0, & |t| > c, \\ 1/2, & |t| = c. \end{cases}$$

Poiché la funzione $f(t)$ è liscia a tratti e assolutamente integrabile sulla retta reale, possiamo calcolare la sua trasformata di Fourier (chiamata anche **spettro della funzione**):

$$\begin{aligned} \bar{f}(\alpha) &= \int_{-c}^c f(t) e^{i\alpha t} dt = \int_{-c}^c e^{i\alpha t} dt \\ &= \frac{e^{i\alpha t}}{i\alpha} \Big|_{-c}^c = \frac{1}{i\alpha} (e^{i\alpha c} - e^{-i\alpha c}) = \frac{2 \sin \alpha c}{\alpha} . \end{aligned}$$

Il grafico dello spettro è disegnato nella figura sotto



Lo spettro dell'impulso rettangolare

$\bar{f}(0) = 2c$ ed al crescere di c il valore tende all'infinito, mentre il picco centrale si comprime verso lo zero. La maggior parte dell'energia dell'impulso giace all'interno del picco centrale di ampiezza $2\pi/c$. Quindi, più lungo è l'impulso, più stretta è la banda centrale nella quale è concentrata l'energia. Se pensiamo ad α come frequenza angolare ($\alpha = 2\pi f$) e indichiamo con $\Delta\alpha$ la frequenza angolare che separa massimo $2c$ ad $\alpha = 0$ dal primo zero della funzione per $\alpha = \pi/c$, è ovviamente $\Delta\alpha = \pi/c$. Tuttavia, c rappresenta la durata dell'impulso nel tempo e se lo indichiamo con Δt si ha che $\Delta\alpha/\Delta t = \pi$ o $2\pi\Delta f\Delta t = \pi$ che da $\Delta f\Delta t = 1/2$. C'è quindi una *relazione costante* tra la durata dell'impulso e la larghezza della banda. ne risulta che la forma dell'impulso nel dominio del tempo e la forma dell'ampiezza dello spettro nel dominio delle frequenze non sono indipendenti. Una relazione di questo tipo è alla base del **principio di indeterminazione di Heisenberg** in meccanica quantistica che manifesta l'incertezza nella possibilità della misura della posizione e della velocità, contemporaneamente.

Vogliamo, infine ricordare un ultimo importante risultato che si trova esaminando l'impulso. Se supponiamo che c divenga infinito, allora l'energia della banda è confinato in una banda di ampiezza zero. Sotto queste condizioni limiti $\bar{f}(\alpha)$ diventa la cosiddetta **funzione di Dirac** $\delta(\alpha)$ che ha la inusuale proprietà che

$$\delta(\alpha) = 0 \quad \text{se } \alpha \neq 0$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha) = 1 .$$

la funzione di Dirac (che in realtà NON è una funzione) gioca un ruolo importante nelle equazioni differenziali quando il termine forzante dell'equazione è un impulso. Come detto sopra, la funzione di Dirac NON è una funzione in termini matematici, essa fa parte di una più ampia gamma di enti matematici chiamati **distribuzioni**. Una delle proprietà più importanti della δ di Dirac è la proprietà di traslazione. Se $f(t)$ è continua per $t \geq 0$, si ha che

$$\int_0^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

e

$$\int_0^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) .$$

2.3. Esercizi.

- (1) Risolvere l'Esempio (59) se $f(x)$ è definita come segue

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x \leq 0, \\ 1-x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (2) Risolvere l'Esempio (60) se $f(x)$ è definita come segue

$$f(x) = \begin{cases} b, & 0 < x \leq c, \quad b > 0 \\ 0, & x > c. \end{cases}$$

- (3) Fare tutti i conti in dettaglio per ottenere la $\bar{u}(\alpha, t)$ nell'Esempio (61).
 (4) Qual'è la soluzione dell'Esempio (59) se $f(x) = \exp(-|x|)$?
 (5) Risolvere l'Esempio (60) se la condizione al bordo $u_x(0, t) = 0$ è sostituita dalla condizione $u(0, t) = 0$.
 (6) Risolvere l'Esempio (60) se $f(x) = \exp(-x)$.
 (7) Scrivere lo spettro della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos t, & -\pi/2 \leq t \leq \pi/2, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

e disegnarne il grafico.

- (8) Trovare la trasformata di Fourier di ciascuna delle seguenti funzioni definite su $(-\infty, +\infty)$

$$(a) f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$(b) f(t) = \begin{cases} |\cos \pi t|, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \exp(-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$(d) f(t) = \begin{cases} t^2, & -1 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} -h, & -c < x \leq 0, \quad h > 0, \\ h, & 0 < x < c, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (9) Trovare la trasformata di Fourier di ciascuna delle seguenti funzioni definite su $(0, +\infty)$.

$$(a) f(x) = \begin{cases} h, & 0 \leq x \leq 1/h, \\ 0, & x > 1/h. \end{cases}$$

$$(b) f(t) = \begin{cases} \sin \pi t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

$$(c) f(t) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

$$(d) f(t) = \begin{cases} \exp t, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

- (10) Trovare la trasformata di Fourier di ciascuna delle seguenti funzioni definite su $(0, +\infty)$.

$$(a) f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} h, & 0 \leq x < 1/h, \\ 0, & x > 1/h. \end{cases}$$

$$(c) f(t) = \begin{cases} |\cos \pi t|, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq \pi/2, \\ \cos x, & \pi/2 < x < 3\pi/2, \\ 0, & x > 3\pi/2. \end{cases}$$

- (11) Supponiamo che la funzione $f(x)$ sia assolutamente integrabile su $(-\infty, +\infty)$ ed abbia trasformata di Fourier $\bar{f}(\alpha)$: Mostrare che se $a > 0$ si ha

$$(a) \frac{1}{a} f(x/a) \text{ ha trasformata } \bar{f}(a\alpha).$$

$$(b) f(ax) \text{ ha trasformata } \frac{1}{a} \bar{f}(\alpha/a).$$

$$(c) \bar{f}(x) \text{ ha trasformata } 2\pi f(-\alpha).$$

- (12) Supponiamo che la funzione $f(x)$ sia assolutamente integrabile su $(-\infty, +\infty)$ ed abbia trasformata di Fourier $\bar{f}(\alpha)$: Mostrare che per ogni $b \in \mathbb{R}$ si ha

$$(a) f(x-b) \text{ ha trasformata } e^{i\alpha b} \bar{f}(\alpha).$$

$$(b) \frac{1}{2} [f(x-b) + f(x+b)] \text{ ha trasformata } \bar{f}(\alpha) \cos \alpha b.$$

(13) Mostrare che la trasformata di Fourier è un'operazione lineare.

(14) Usare la definizione di trasformata di Fourier

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx$$

per mostrare che $f(x) = \exp(-x^2/2)$ è la trasformata di se stesso.

(15) Provare le seguenti proprietà delle trasformate di Fourier di funzioni reali

(a) Se $f(x)$ è pari, allora $\overline{f}(\alpha)$ è reale e pari.

(b) Se $f(x)$ è dispari, allora $\overline{f}(\alpha)$ è immaginaria e dispari.

(c) Se $f(x)$ non è né pari né dispari, allora $\overline{f}(\alpha)$ ha parte reale e parte immaginaria.

(16) Trovare la trasformata di Fourier del treno d'onda finito

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \leq 6\pi, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3. Applicazioni

Abbiamo visto negli Esempi (59)-(61) come usare la trasformata di Fourier per risolvere problemi al bordo sia per l'equazione di diffusione che per l'equazione d'onda.

In questo paragrafo vogliamo dare esempi di applicazione della trasformata sia all'equazione del potenziale che ad alcune equazioni differenziali ordinarie.

ESEMPIO 62. *Trovare la funzione potenziale $u(x, y)$ nella porzione di piano $x - y$ limitata da $y \geq 0$ e per la quale*

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = f(x) .$$

SOLUZIONE 62. *Risolviamo l'equazione di Laplace, detta anche **equazione del potenziale**,*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

con il metodo di separazione delle variabili, $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Questo porta alle due equazioni differenziali

$$X'' + \alpha^2 X = 0 ,$$

e

$$Y'' - \alpha^2 Y = 0 ,$$

che hanno rispettivamente soluzioni:

$$X_v(x) = c_1(\alpha) \cos \alpha x + c_2(\alpha) \sin \alpha x$$

e

$$Y_\alpha(y) = c_3(\alpha) e^{\alpha y} + c_4(\alpha) e^{-\alpha y}$$

dove le soluzioni e le costanti dipendono dalla scelta del valore di α . Scegliamo $c_3(\alpha) \equiv 0$ e $\alpha > 0$ poiché la soluzione deve restare limitata per $y > 0$. La soluzione ha quindi la forma

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha y} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha ,$$

e si ha che

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha .$$

Ricordando la (1.11) ne segue che

$$A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos \alpha (s - x) ds ,$$

facendo uso della rappresentazione integrale di $f(x)$.

Ne segue quindi che

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos \alpha (s - x) ds \right] e^{-\alpha y} d\alpha .$$

Assumendo di poter scambiare l'ordine di integrazione, si ha

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \cos \alpha (s - x) d\alpha \right] f(s) ds .$$

Si può calcolare l'integrale interno, ottenendo

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(s)}{y^2 + (s - x)^2} ds . \quad (3.1)$$

Vediamo anche un altro metodo di soluzione.

Poiché nell'esempio si ha che $-\infty < x < +\infty$ possiamo trasformare l'equazione relativamente alla variabile x , ottenendo

$$\frac{d^2 \bar{u}(\alpha, y)}{dy^2} - \alpha^2 \bar{u}(\alpha, y) = 0 \quad (3.2)$$

$$\bar{u}(\alpha, 0) = \bar{f}(\alpha) ,$$

supponendo che $f(x)$ sia assolutamente integrabile sulla retta reale. La soluzione limitata di questo problema può essere scritta nella forma

$$\bar{u}(\alpha, y) = \begin{cases} \bar{f}(\alpha) e^{\alpha y} , & \text{se } \alpha < 0 , \\ \bar{f}(\alpha) e^{-\alpha y} , & \text{se } \alpha > 0 , \end{cases} \quad (3.3)$$

o più compattamente

$$\bar{u}(\alpha, y) = \bar{f}(\alpha) e^{-|\alpha| y} . \quad (3.4)$$

La trasformata inversa di Fourier è

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha) e^{-|\alpha| y} e^{-i\alpha x} d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-|\alpha| y} e^{i\alpha s} e^{-i\alpha x} ds d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\alpha| y} [\cos \alpha (s-x) + i \sin \alpha (s-x)] d\alpha \right] ds \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left[\int_0^{\infty} e^{-|\alpha| y} [\cos \alpha (s-x)] d\alpha \right] ds \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(s)}{y^2 + (s-x)^2} ds,
 \end{aligned}$$

in accordo al risultato precedente. Vogliamo notare che i due metodi usati sono del tutto equivalenti, poiché si è fatto uso, in ogni caso, della rappresentazione integrale di Fourier della funzione $f(x)$.

Si pone ovviamente una domanda. Avremmo potuto trasformare rispetto alla variabile y invece che rispetto alla x ? La risposta è positiva, nel senso che poiché $0 < x < +\infty$ avremmo potuto usare le trasformate seno o coseno estendendo $f(x)$ per disparità o parità. Ricordiamo, tuttavia che la trasformata seno, come mostra l'equazione (2.7) richiede che sia noto $u(x, 0)$, mentre la trasformazione coseno, vedi la (2.9), richiede che sia noto $u_y(x, 0)$. In questo caso va, quindi usata la trasformazione seno.

Trasformando y con la trasformazione seno, l'equazione del potenziale viene trasformata nell'equazione ordinaria del secondo ordine, non omogenea

$$\frac{d^2 \bar{u}_s(x, \alpha)}{dx^2} - \alpha^2 \bar{u}_s(x, \alpha) = -\alpha f(x) \quad (3.5)$$

Ricordo che la soluzione generale dell'equazione è la somma della soluzione generale dell'equazione omogenea associate con la soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Ma, la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è data da

$$c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$$

Poiché entrambe le funzioni sono illimitate sulla retta reale, ne segue che entrambi i coefficienti della soluzione vanno presi uguali a zero.

Il prossimo esempio è una applicazione della trasformata di Fourier alle equazioni ordinarie.

ESEMPIO 63. *Trovare una soluzione dell'equazione di Bessel di ordine zero*

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

SOLUZIONE 63. Per ottenere la trasformata dei tre termini dell'equazione, dobbiamo osservare che dalla definizione,

$$\bar{y}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x) e^{i\alpha x} dx$$

integrando per parti, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy(x)}{dx} e^{i\alpha x} dx = i\alpha \bar{y}(\alpha).$$

Mentre, derivando sotto il segno di integrale rispetto al parametro α si ottiene

$$\frac{\bar{y}(\alpha)}{d\alpha} = i \int_{-\infty}^{+\infty} x y(x) e^{i\alpha x} dx,$$

quindi, la trasformata di xy è data da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x y(x) e^{i\alpha x} dx = -i \frac{\bar{y}(\alpha)}{d\alpha}.$$

Integrando per parti quest'ultima due volte, supponendo che sia y che dy/dx tendano a zero per $x \rightarrow \infty$ e che entrambe siano assolutamente integrabili, tenendo presente i risultati precedenti, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{d^2 y(x)}{dx^2} e^{i\alpha x} dx = 2i \bar{y}(\alpha) + \alpha^2 i \frac{\bar{y}(\alpha)}{d\alpha}.$$

e segue che l'equazione differenziale data diventa

$$(\alpha^2 + 1) \frac{\bar{y}(\alpha)}{d\alpha} + \alpha \bar{y}(\alpha) = 0,$$

che si risolve per separazione delle variabili. Ne risulta che

$$\bar{y}(\alpha) = \frac{C}{\sqrt{\alpha^2 + 1}},$$

dove C è la costante di integrazione.

Usando la trasformazione inversa si ha che

$$y(x) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} d\alpha = \frac{C}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} d\alpha = C K_0(x),$$

dove la funzione $K_0(x)$ è la **funzione di Bessel di secondo tipo di ordine zero**. essa è una delle due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione data, l'altra essendo $I_0(x)$ che è la funzione di Bessel di primo tipo di ordine zero.

Ulteriori esempi sull'uso della trasformata di Fourier, per la risoluzione di problemi al bordo, verranno dati nel Paragrafo 7.4.

3.1. Esercizi.

(1) Calcolare

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \cos \alpha (s - x) d\alpha$$

e verificare il risultato ottenuto con quello dato nell'Es.(62).

(2) Usando l'integrazione per parti, mostrare che:

(a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{d^2 y(x)}{dx^2} e^{i\alpha x} dx = i\alpha \bar{y}(\alpha) - i\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{dy(x)}{dx} e^{i\alpha x} dx .$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{dy(x)}{dx} e^{i\alpha x} dx = \bar{y}(\alpha) - \alpha \frac{\bar{y}(\alpha)}{d\alpha} .$$

(3) Determinare la temperatura $u(x, t)$ in una barra semi-infinita, tenuta inizialmente a temperatura zero, quando un estremo è tenuto a temperatura costante u_0 . Scrivere esplicitamente quale sono le ipotesi per poter usare la trasformata seno di Fourier, per risolvere il problema.(4) Un barra semi-infinita è isolata termicamente ad un estremo, mentre la sua distribuzione iniziale di temperatura è data da e^{-ax} , $a > 0$. Trovare la distribuzione di temperatura $u(x, t)$:

(a) usando la separazione delle variabili.

(b) Usando la trasformata coseno di Fourier.

(c) Verificare che i risultati di (a) e (b) sono identici.

(5) Determinare la temperatura $u(x, t)$ in una barra semi-infinita che ha un estremo a temperatura zero e distribuzione iniziale di temperatura $f(x)$, dove

$$f(x) = \begin{cases} u_0 , & 0 < x < L , \\ 0 , & \text{altrimenti} . \end{cases}$$

(6) Risolvere il seguente problema

$$E.D.P. \quad u_t = k u_{xx} , \quad x > 0 , \quad t > 0 ,$$

$$C.B. \quad u_x(0, t) = -\beta \quad t > 0 , \quad \beta > 0$$

$$C.I. \quad u(x, 0) = 0 , \quad x > 0 .$$

(7) Usare la trasformata coseno di Fourier per mostrare che la temperatura stazionaria del semipiano $y > 0$, quando la temperatura al bordo $y = 0$ è tenuta costante uguale ad uno nell'intervallo $|x| < c$ e zero fuori, è data da

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{c+x}{y} \right) + \arctan \left(\frac{c-x}{y} \right) \right] .$$

Sugg: risulta utile il risultato

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx = \arctan \frac{b}{a}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

- (8) Usare il metodo dell'Es.(63) per trovare una particolare soluzione dell'equazione

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

- (9) Trovare la soluzione dell'Es.(62)

(a) Se $f(x)$ è data da

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < c, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(b) Dal risultato di (a) calcolare i valori di $u(0, 1)$, $u(c/2, 1)$ e $u(c, 1)$. Dire se i risultati sono ragionevoli.

- (10) Mostrare che la soluzione dell'Es.(62)

(a) E' data da

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{y} \right)$$

se $f(x)$ è data da

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

(b) Dimostrare che la soluzione (a) è limitata per $y \geq 0$.

(c) Verificare che la soluzione soddisfa l'equazione di Laplace se $y > 0$.

(d) Verificare che

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = f(x).$$

(e) $f(x)$ è assolutamente integrabile? Soddisfa le condizioni dei teoremi dati nel paragrafo 6.1?

- (11) Trovare una soluzione particolare per ognuna delle seguenti equazioni, usando la trasformata di Fourier

(a) $x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0.$

(b) $\frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0.$

(c) $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0.$

(d) $\frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - xy = 0.$

(12) Mostrare che la trasformata di Fourier di

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \exp(-x^2/4a)$$

è $\exp(-a\alpha^2)$ se $a > 0$.

(13) mostrare che le *soluzioni limitate* dell'equazione

$$\frac{d^2\bar{u}(\alpha, y)}{dy^2} - \alpha^2\bar{u}(\alpha, y) = 0, \quad \bar{u}(\alpha, 0) = \bar{f}(\alpha)$$

sono date da

$$\bar{u}(\alpha, y) = \bar{f}(\alpha) e^{-|\alpha|y}.$$

(14) Usare la trasformata di Fourier per trovare la soluzione dell'equazione

$$3y'' + 2y' + xy = 0.$$

Problemi al bordo in coordinate cartesiane

1. L'equazione di Laplace

Abbiamo già visto come una delle più comuni equazioni alle derivate parziali del secondo ordine fosse

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad (1.1)$$

Fino ad ora abbiamo trattato l'equazione in una ed in due dimensioni. Vogliamo illustrare adesso un esempio tridimensionale per illustrare le **serie doppie di Fourier**.

ESEMPIO 64. *Risolvere il seguente problema al bordo*

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad & u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, & 0 < x < a, & \quad 0 < b < y, & \quad 0 < z < c, \\ C.B. \quad & u(0, y, z) = u(a, y, z) = 0, & & 0 < b < y, & \quad 0 < z < c, \\ & u(x, 0, z) = u(x, b, z) = 0, & 0 < x < a, & & \quad 0 < z < c, \\ & u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u(x, y, c) = 0 & 0 < x < a, & \quad 0 < b < y. \end{aligned}$$

SOLUZIONE 64. *Questo problema sorge nella ricerca del potenziale in un parallelepipedo rettangolare, nel quale le quattro facce laterali e quella superiore sono a potenziale zero ed il potenziale della base è una funzione assegnata di (x, y) . Specificheremo più avanti le proprietà che deve possedere la funzione $f(x, y)$.*

Risolviamo il problema col metodo di separazione delle variabili. Sia

$$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z),$$

derivando e sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0,$$

dove gli apici intendono le derivate ordinarie delle funzioni rispetto alle proprie variabili. Come al solito, siamo interessati a trovare una soluzione non nulla del problema, $X(x)Y(y)Z(z) \neq 0$, quindi si ottiene

$$\frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{X''}{X} = \lambda, \quad (1.2)$$

dove λ è una costante, la cui natura verrà determinata dalle condizioni al bordo. Notiamo che nel primo membro dell'equazione non compare la variabile x , mentre nel secondo compare solo x . Ne consegue che deve essere

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(a) = 0. \quad (1.3)$$

Come ormai sappiamo la scelta di $\lambda = 0$ e di $\lambda < 0$ ha come conseguenza l'esistenza della sola soluzione nulla. Ne consegue che $\lambda > 0$ me

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + \sin(\sqrt{\lambda}x) .$$

La condizione $X(0) = 0$ implica che $c_1 = 0$, mentre $X(a) = 0$ implica che $\sqrt{\lambda} = n\pi/a$, $n = 1, 2, \dots$. Quindi, gli autovalori del problema di Sturm-Liouville(1.3) sono

$$\lambda = n^2\pi^2/a^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

mentre le corrispondenti autofunzioni sono

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n = 1, 2, \dots .$$

Abbiamo soppresso la costante arbitraria poiché ogni multiplo delle autofunzioni date è anch'essa soluzione del problema al bordo (1.3).

Una seconda separazione delle variabili implica che

$$\frac{Z''}{Z} - \frac{n^2\pi^2}{a^2} = -\frac{Y''}{Y} = \mu .$$

Il problema al bordo per Y è identico a quello per X , ne segue che

$$\mu = \frac{m^2\pi^2}{b^2}, \quad m = 1, 2, \dots ,$$

e le corrispondenti autofunzioni sono

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \quad m = 1, 2, \dots .$$

Da notare che, sebbene entrambe le costanti di separazione siano funzioni di interi positivi, queste sono indipendenti l'una dall'altra.

Il problema per Z può essere scritto nella forma

$$Z'' - \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) Z = 0, \quad Z(c) = 0 ,$$

o, ponendo

$$\omega_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) ,$$

possiamo scrivere

$$Z'' - \omega_{mn}^2 Z = 0, \quad Z(c) = 0 .$$

La soluzione di questo problema è per ogni m, n fissati

$$Z_{mn}(z) = B_{mn} \sinh \omega_{mn}(c - z) ,$$

dove B_{mn} è una costante che dipende da m, n . Calcoleremo il valore di questa costante applicando l'ultima condizione al bordo. Poiché m e n sono indipendenti, per scrivere la soluzione del problema, bisogna

prendere tutte le possibili combinazioni lineari delle singole soluzioni. Si ha così la serie doppia che descrive la soluzione

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \sinh \omega_{mn} (c - z) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) . \quad (1.4)$$

Applicando la condizione al bordo si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \sinh c \omega_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = f(x, y) \quad (1.5)$$

Ne segue che, per ogni m si ha

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \sinh c \omega_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) = \frac{2}{a} \int_0^a f(s, y) s \sin\left(\frac{n\pi}{a}s\right) ds . \quad (1.6)$$

in altre parole, per ogni valore fissato di y ($0 < y < b$) l'Eq.(1.5) mostra che $f(x, y)$ deve essere rappresentata come un serie seno di Fourier. D'altra parte, per ogni valore di n , la parte destra di (1.6) è una funzione della sola variabile y che possiamo indicare con $F_n(y)$, e

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \sinh c \omega_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) = F_n(y) .$$

Ne segue che $F_n(y)$ può essere rappresentata in serie seno di Fourier e possiamo dire che

$$B_{mn} \sinh c \omega_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b F_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{b}t\right) dt .$$

Quindi

$$\begin{aligned} B_{mn} &= \frac{2}{b \sinh c \omega_{mn}} \int_0^b F_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{b}t\right) dt \\ &= \frac{4}{ab \sinh c \omega_{mn}} \int_0^b \int_0^a f(s, t) \sin\left(\frac{n\pi}{a}s\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}t\right) ds dt \end{aligned} \quad (1.7)$$

Quindi, la soluzione formale dell'Eq.(1.1) è data dall'Eq.(1.4) con i coefficienti B_{mn} dati dall'Eq.(1.7) e ω_{mn} è definita da

$$\omega_{mn} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} . \quad (1.8)$$

Osserviamo che la funzione $f(x, y)$ deve soddisfare la condizioni di Dirichlet rispetto ad entrambe le variabili, cioè, per ogni valore fissato di $y = y_0$ ($0 < y_0 < b$) $f(x, y_0)$ deve essere una funzione liscia a tratti della variabile x ($0 < x < a$). In modo analogo, per ogni valore fissato $x = x_0$ ($0 < x_0 < a$), $f(x_0, y)$ deve essere una funzione liscia a tratti della variabile y ($0 < y < b$).

Nel prossimo esempio risolviamo un problema di Laplace in un dominio semi-infinito.

ESEMPIO 65. *Trovare il potenziale $V(x, y)$ in ogni punto dell'insieme limitato da $x = 0$, $y = 0$, e $y = b$, con le condizioni al bordo $V(0, y) = V(x, b) = 0$ e $V(x, 0) = f(x)$.*

SOLUZIONE 65. *Il problema, espresso in termini matematici è*

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad & V_{xx} + V_{yy} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < y < b, \\ C.B. \quad & V(0, y) = 0, \quad 0 < y < b, \\ & V(x, b) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \\ & V(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty. \end{aligned}$$

per risolvere il problema usiamo la trasformata seno di Fourier per trasformare x poiché $V(0, y) = 0$ e $0 < x < +\infty$. Quindi

$$\bar{V}(\alpha, y) = \int_0^{\infty} V(x, y) \sin \alpha x \, dx,$$

e, ricordando i risultati del Capitolo precedente, si ha

$$-\alpha^2 \bar{V}(\alpha, y) + \frac{d^2 \bar{V}(\alpha, y)}{dy^2} = 0.$$

La trasformata di $V(x, b) = 0$ è zero e la trasformata di $V(x, 0) = f(x)$ è $\bar{V}(\alpha, 0) = \bar{f}(\alpha)$. Per poter operare queste trasformate dobbiamo assumere che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x, y) = 0, \quad e \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} V_x(x, y) = 0,$$

e che $f(x)$ sia assolutamente integrabile su $0 < x < +\infty$. la soluzione dell'equazione del secondo ordine in $\bar{V}(\alpha, y)$ è:

$$\bar{V}(\alpha, y) = C_1(\alpha) \cosh(\alpha y) + C_2(\alpha) \sinh(\alpha y).$$

La condizione $\bar{V}(\alpha, b) = 0$ implica che

$$C_1 = -C_2 \frac{\sinh(\alpha b)}{\cosh(\alpha b)},$$

quindi la soluzione si scrive come

$$\begin{aligned} \bar{V}(\alpha, y) &= -C_2(\alpha) \frac{\sinh(\alpha b)}{\cosh(\alpha b)} \cosh(\alpha y) + C_2(\alpha) \sinh(\alpha y) \\ &= C_2(\alpha) \frac{\sinh \alpha (y - b)}{\cosh \alpha b}. \end{aligned}$$

Dalla condizione $\bar{V}(\alpha, 0) = \bar{f}(\alpha)$ si ottiene

$$C_2(\alpha) = -\frac{\bar{f}(\alpha) \cosh(\alpha b)}{\sinh(\alpha b)},$$

da cui

$$\bar{V}(\alpha, y) = \frac{\bar{f}(\alpha) \sinh \alpha (b - y)}{\sinh(\alpha b)}.$$

usando le trasformate inverse si ha

$$V(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\bar{f}(\alpha) \sinh \alpha (b-y)}{\sinh(\alpha b)} \sin \alpha x \, d\alpha \\ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f(s) \sin \alpha s \frac{\sinh \alpha (b-y)}{\sinh(\alpha b)} \sin \alpha x \, ds \, d\alpha \quad (1.9)$$

Una funzione che soddisfa l'equazione di Laplace è detta **funzione armonica**. Le funzioni armoniche hanno particolari proprietà che elenchiamo nei seguenti teoremi.

THEOREM 20. *Se una funzione f è armonica in una regione limitata ed è nulla sul bordo della regione stessa, allora è nulla in tutta la regione.*

THEOREM 21. *Se una funzione f è armonica in una regione limitata e la sua derivata normale $\frac{\partial f}{\partial n}$ è identicamente nulla su tutto il bordo della regione, allora f è costante in tutta la regione.*

Un **problema di Dirichlet** è definito come un problema di ricerca di una funzione che sia armonica in una regione, avendo assegnato i valori della stessa sul bordo della regione.

THEOREM 22. *Se un problema di Dirichlet per una regione limitata ha soluzione, allora questa soluzione è unica.*

Un **problema di Neumann** è definito come un problema di ricerca di una funzione che sia armonica in una regione, avendo assegnato i valori della derivata normale $\frac{\partial f}{\partial n}$ sul bordo della regione.

THEOREM 23. *Se un problema di Neumann per una regione limitata ha soluzione, allora questa soluzione è unica a meno di una costante additiva.*

I problemi di Dirichlet e Neumann nascono in modo naturale dall'equazione di diffusione (o del calore) quando si è interessati alla ricerca di una soluzione stazionaria. In due dimensioni il problema del calore è

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}) ,$$

dove u rappresenta la temperatura e k è una costante detta **diffusività termica**. Se cerchiamo una temperatura stazionaria del sistema (detta anche temperatura di equilibrio del sistema), allora u è indipendente dalla variabile temporale t per cui $u_t = 0$ e l'equazione si trasforma in una equazione di Laplace bidimensionale. Situazione simile, ovviamente, in tre dimensioni.

ESEMPIO 66. *Trovare la temperatura stazionaria in un piatto rettangolare di lati a e b se i bordi $x = 0$ e $x = a$ sono perfettamente isolati, il bordo $y = b$ è tenuto a temperatura zero e il bordo $y = 0$ ha una distribuzione di temperatura data da $\sin(\pi x/a)$.*

SOLUZIONE 66. Ricordiamo che bordo perfettamente isolato significa che non vi è scambio di calore con l'esterno attraverso quel bordo, non vi è cioè flusso di calore. Conseguentemente la variazione di temperatura nella direzione della normale esterna al bordo deve essere nulla. Assumiamo, ovviante anche che la facce siano perfettamente isolate così che non ci sia scambio di calore in direzione z . Il problema diventa

$$\begin{array}{l} E.D.P. \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ P.B. \quad \left. \begin{array}{l} u_x(0, y) = 0, \\ u_x(a, y) = 0, \\ u(x, b) = 0, \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{a} \end{array} \right\} \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \end{array}$$

la separazione delle variabili porta al seguente problema di Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(a) = 0.$$

Le autofunzioni sono

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si ha, inoltre per ogni n ,

$$Y_n'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y_n = 0, \quad Y_n(b) = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= \frac{c_n}{\cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \sinh \frac{n\pi}{a}(y-b), \quad n = 1, 2, \dots, \\ y_0(y) &= c_0(y-b). \end{aligned}$$

Avendo usato tutte le condizioni omogenee al bordo, si ha

$$u(x, y) = c_0(y-b) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \frac{\sinh \frac{n\pi}{a}(y-b)}{\cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}.$$

Applicando l'ultima condizione al bordo, si ha

$$-c_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{-\sinh \frac{n\pi b}{a}}{\cosh \frac{n\pi b}{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \sin \frac{\pi}{a}x,$$

o, che è lo stesso

$$-c_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = .$$

Questo mostra che dobbiamo scegliere una estensione pari per la funzione $\sin \frac{\pi}{a}x$ per poterla rappresentare in serie di coseni. Si ha quindi

$$a_0 = \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{\pi}{a}x \, dx = \frac{4}{\pi} ,$$

quindi $-bc_0 = 1/2a_0 = 2/\pi$ da cui $c_0 = -2/\pi b$. Si ha inoltre,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{a} \int_0^a \cos \left(\frac{n\pi}{a}x \right) \sin \frac{\pi}{a}x \, dx \\ &= \begin{cases} 0 , & \text{se } n \text{ è dispari} , \\ \frac{4}{\pi(1-n^2)} , & \text{se } n \text{ è pari} . \end{cases} \end{aligned}$$

la soluzione può quindi essere scritta nella forma

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi b} (b - y) + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{a}x \sinh \frac{2n\pi}{a}(b-y)}{(1-4n^2) \sinh \frac{2n\pi b}{a}} . \quad (1.10)$$

Vogliamo sottolineare come, sebbene tre dei quattro condizioni al bordo fossero nulle, le operazioni che abbiamo dovuto compiere per arrivare alla soluzione siano state non banali. Per questo motivo viene usato (si raccomanda di usare) il principio di sovrapposizione quando siano presenti più condizioni al bordo non-omogenee.

Non abbiamo verificato che la $u(x, y)$ data dalla (1.10) sia una funzione armonica. Considereremo questo problema più avanti nel paragrafo 7.5

Una condizione al bordo che sia combinazione lineare di condizioni di Dirichlet e Neumann è nota come **condizione di Robin**¹ o **condizioni al bordo di tipo misto**. Per loro vale il seguente teorema

THEOREM 24. *Sia $u(x, y)$ armonica in una regione limitata R e soddisfi la condizioni di Robin*

$$h \frac{\partial u}{\partial n} + ku = f(x, y) , \quad h \geq 0 , \quad k \geq 0 , \quad (1.11)$$

su ∂R , bordo di R . Allora $u(x, y)$ è l'unica soluzione (eccetto eventualmente una costante additiva) del problema $\nabla^2 u = 0$ in R che soddisfi le condizioni (1.11). Se $h = 0$ su tutto ∂R , allora la costante additiva è zero, ma h e k non possono essere entrambi nulli.

Ovviamente, il teorema con le condizioni di Robin riassume in se sia il teorema per il problema di Dirichlet che quello di Neumann.

¹Victor Robin (1855-1897), matematico francese.

1.1. Esercizi.

- (1) Trovare B_{mn} dell'Esempio (64) se $f(x, y) = xy$.
- (2) Trovare la soluzione dell'Esempio (65) se $f(x) = e^{-x}$. Questa funzione soddisfa le condizioni per l'esistenza della soluzione?
- (3) Trovare la soluzione dell'Esempio (65) se

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (4) Trovare la soluzione dell'Esempio (65) se $b = 1$ e la condizione $V(0, y) = 0$ è sostituita dalla condizione $V_x(0, y) = 0$.
- (5) Mostrare che il problema

$$X'' - \lambda^2 X = 0, \quad X'(0) = X'(a) = 0,$$

ammette solo la soluzione nulla.

- (6) Ottenere le autofunzioni

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{a} x, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

dell'Esempio (66).

- (7) Ottenere le autofunzioni

$$Y_n(y) = \frac{c_n}{\cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \sinh \frac{n\pi}{a} (y - b), \quad n = 1, 2, \dots,$$

dell'Esempio (66).

- (8) Mostrare che

$$Y_0(y) = c_0 (y - b)$$

è l'autofunzione corrispondente all'autovalore $n = 0$.

- (9) Mostrare che nell'Esempio (66)

$$a_{2n} = \frac{4}{\pi(1 - 4n^2)}.$$

- (10) Risolvere il problema dell'Esempio (66) se $a = b = \pi$ e $u(x, 0) = \sin x$.
- (11) Verificare che l'Eq.(1.10) soddisfa le condizioni al bordo dell'Esempio (66).
- (12) Usando l'Eq.(1.10), mostrare che

$$u(a, 0) = u(0, 0) = 0.$$

(Sugg.: Scrivere S_N usando la decomposizione in frazioni di $1/(1 - 4n^2)$ e trovare poi il limite di S_N).

(13) Risolvere il problema al bordo

$$\begin{aligned}
 E.D.P. \quad & u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 1, \quad y > 0, \\
 C.B. \quad & u(1, y) = 0, & y > 0, \\
 & u(0, y) = e^{-ay}, \quad a > 0 & y > 0 \\
 & u_y(x, 0) = 0, & 0 < x < 1.
 \end{aligned}$$

(14) Risolvere il problema del potenziale nella striscia $-\infty < x < \infty$, $0 < y < b$, sapendo che il potenziale è zero per $y = b$ e vale $f(x)$ quando $y = 0$. Scrivere, inoltre, quali condizioni devono essere soddisfatte per l'esistenza del problema. (Sugg.: usare le trasformate di Fourier.)

(15) Risolvere i problemi di Dirichlet:

(a)

$$\begin{aligned}
 E.D.P. \quad & u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\
 C.B. \quad & u(0, y) = u(1, y) = 0, & 0 < y < 1, \\
 & u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = x, & 0 < x < 1.
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 E.D.P. \quad & u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\
 C.B. \quad & u(x, 0) = u(x, 1) = 0, & 0 < x < 1, \\
 & u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = y, & 0 < y < 1.
 \end{aligned}$$

(c) Usare il principio di sovrapposizione per trovare la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{aligned}
 E.D.P. \quad & u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\
 C.B. \quad & u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = x, & 0 < x < 1, \\
 & u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = y, & 0 < y < 1.
 \end{aligned}$$

(16) Un piatto rettangolare ha i bordi per $y = 0$ e $y = b$ perfettamente isolati, mentre i bordi per $x = 0$ e $x = a$ sono tenuti a temperatura zero. Usare la *separazione delle variabili* per trovare la temperatura stazionaria del piatto. Il risultato è in accordo a quanto ci si aspetterebbe alla luce dei Teoremi (20) e (21)?

(17) Risolvere il problema dell'Es. (64) supponendo che la condizione nella faccia $x = 0$ sia $u(0, y, z) = \sin(\pi y/b) \sin(\pi z/c)$, mentre sulle altre facce è $u = 0$.

(18) Dimostrare il Teorema (22). (Sugg.: supporre che sia f che g siano soluzioni. Considerare la differenza $f - g$ ed usare il Teorema (20).)

- (19) Risolvere il problema dell'Esempio (66) date le condizioni al bordo

$$u(x, 0) = \frac{10}{a}(a - x) \quad , \quad 0 < x < a \quad ,$$

mentre le altre condizioni rimangono inalterate.

- (20) Risolvere il problema dell'Es.(64) supponendo che $u(x, y, c) = f(x, y)$ mentre le altre facce sono tenute a zero.

2. L'equazione d'onda

2.1. Onde trasversali. Nel Paragrafo 4.3 abbiamo trovato l'equazione della corda vibrante, dopo aver fatto una serie di ipotesi di semplificazione. L'equazione trovata è stata poi estesa, in modo naturale, a quella di una membrana vibrante (tipo il tamburo) per ottenere l'equazione d'onda bi-dimensionale

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \quad . \quad (2.1)$$

La costante c è definita come $T_0 g/w$ dove T_0 è la tensione (supposta costante in ogni direzione) per unità di lunghezza, w è il peso per unità di area e g è l'accelerazione di gravità. Un problema al bordo per questa equazione in una regione rettangolare ha bisogno, in generale, per essere risolto di quattro condizioni al bordo e due condizioni iniziali. Vediamo un esempio.

ESEMPIO 67. *Risolvere il seguente problema*

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad & u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \quad , \quad 0 < x < a \quad , \quad 0 < y < b \quad , \quad t > 0 \quad , \\ C.B. \quad & u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0 \quad , \quad 0 < y < b \quad , \quad t > 0 \quad , \\ & u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0 \quad , \quad 0 < x < a \quad , \quad t > 0 \quad , \\ C.I. \quad & u(x, y, 0) = f(x, y) \quad , \quad u_t(x, y, 0) = 0 \quad 0 < x < a \quad , \quad 0 < y < b \quad . \end{aligned}$$

SOLUZIONE 67. *Usiamo il metodo di separazione delle variabili iniziando col separare le variabili spaziali da quella temporale:*

$$u(x, y, t) = \Phi(x, y) T(t)$$

e sostituiamola dentro la E.D.P. . Si ha

$$\ddot{T}\Phi = c^2 T(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) \quad .$$

Dividendo per $c^2\Phi T$ si ha

$$\frac{\ddot{T}}{c^2 T} = \frac{\Phi_{xx} + \Phi_{yy}}{\Phi} = -\lambda^2 \quad . \quad (2.2)$$

L'interpretazione fisica del problema è chiara: una membrana rettangolare è fissata al bordo e sono assegnati, in ogni punto, posizione iniziale e velocità iniziale (nulla in questo caso) perpendicolari al piano xy . Poiché non si è supposto attrito o altre forze esterne, ci si aspetta che la membrana vibri indefinitamente. Per questo si è scelta una costante negativa $-\lambda^2$ in modo che la soluzione sia periodica nel

tempo. Dall'Eq.(2.2) si ha, infatti, usando la condizione omogenea sulla velocità

$$\ddot{T} + \lambda^2 c^2 T = 0, \quad \dot{T} = 0.$$

la soluzione di questo problema è

$$T(t) = \cos(\lambda ct),$$

dove la forma della costante λ è ancora da determinarsi. Se nell'Eq.(2.2) supponiamo adesso $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$, si ha

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2.$$

ma questo è il problema che abbiamo risolto nell'Esempio (64) del precedente paragrafo. Quindi le soluzioni del presente problema sono

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \sin \frac{n\pi}{a} x, \\ Y_n(y) &= \sin \frac{m\pi}{b} y, \\ T_n(t) &= \cos(\omega_{mn} ct), \end{aligned}$$

dove m ed n sono indipendenti e

$$\omega_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right).$$

la soluzione generale del problema è allora data dalla serie doppia

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \cos(\omega_{mn} ct)$$

dove

$$B_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^b \sin \frac{m\pi}{b} y \left[\int_0^a f(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x dx \right] dy.$$

Osserviamo che $f(x, y)$, $f_x(x, y)$, e $f_y(x, y)$ devono essere continue nel quadrato aperto $(0, a) \times (0, b)$ ed annullarsi sul bordo del rettangolo. Da notare che la frequenza angolare della membrana vibrante $\omega_{mn}c$ dipende sia da m che da n e non cambia per multipli interi di alcune frequenze base fissate. Ne consegue che la membrana vibrante non produce note musicali come invece fa la corda vibrante.

2.2. Onde longitudinali. Le onde prodotte in una corda vibrante sono **onde trasversali**, cioè la direzione del moto dei singoli elementi della corda, o della membrana, sono perpendicolari alla direzione di propagazione delle onde stesse. In una barra solida, tuttavia, si possono avere onde elastiche che sono **onde longitudinali**, onde cioè in cui la direzione del moto di ogni elemento della barra è la stessa direzione di propagazione delle onde stesse. Questo è dovuto alla rarefazione e condensazione della densità della barra stessa.

Consideriamo una barra di sezione e densità uniforme di lunghezza L . Assumiamo che la barra sia perfettamente elastica, intendendo con questo che se vengono applicate agli estremi della barra delle forze esterne, in modo che si creino delle elongazioni, allora ne risultano delle forze tensili nella direzione dell'asse x . Se adesso le forze esterne vengono eliminate, la barra continuerà a vibrare in accordo alle leggi di elasticità. Indichiamo con ρ la densità della barra (massa per unità di volume), con A l'area della sezione trasversale e con E il modulo di elasticità di Young. Supponiamo che nel punto x la sezione trasversale venga spostata di una quantità u . Assumiamo inoltre che A sia piccolo rispetto ad L . dalla definizione di modulo di Young E , la forza sulla sezione trasversale nel punto x è data da

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} ,$$

poiché $\partial u / \partial x$ rappresenta l'elongazione per unità di lunghezza. D'altra parte, la forza sulla sezione di lunghezza Δx ($\Delta x = u$) è data anche da

$$\rho A \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} ,$$

dove $\partial^2 u / \partial t^2$ viene valutata in un punto intermedio tra x e $x + \Delta x$, per esempio nel centro di massa dell'elemento. La forza risultante per unità di lunghezza è allora

$$\frac{EA}{\Delta x} \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] .$$

Uguagliando le due forze e prendendo il limite per $\Delta x \rightarrow 0$, si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

Quindi, le piccole vibrazioni longitudinali di una barra elastica soddisfano l'equazione d'onda unidimensionale.

ESEMPIO 68. *Vogliamo risolvere il seguente problema al bordo*

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad & u_{tt} = c^2 u_{xx} , & c = E/\rho \quad 0 < x < L , \quad t > 0 , \\ C.B. \quad & u(L, t) = 0 , & t > 0 , \\ & Eu_x(0, t) = F_0 , & 0 < x < L , \\ C.I. \quad & u(x, 0) = 0 , \quad u_t(x, 0) = 0 & 0 < x < L , \quad . \end{aligned}$$

SOLUZIONE 68. *Il problema ci dice che all'istante iniziale la corda è ferma, l'estremo $x = L$ è tenuto fisso, mentre all'estremo $x = 0$ è applicata una forza costante F_0 . Infatti, come abbiamo detto sopra, la forza in una qualunque sezione trasversale è data da*

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} ,$$

ed all'estremo $x = 0$ questa forza è data da AF_0 . Da questo segue che

$$Eu_x(0, t) = F_0 .$$

Se provassimo a risolvere il problema con la separazione delle variabili avremmo come unico risultato $u(x, t) = 0$, che non è una soluzione. La difficoltà nasce dal fatto che in questo caso le condizioni al bordo non sono omogenee (è presente una forza esterna per $x = 0$) mentre sono omogenee le condizioni iniziali. Ne segue che il problema di Sturm-Liouville per $T(t)$ ha soluzione nulla essendo $T(0) = T'(0) = 0$. Questo problema può essere superato se siamo in grado di trasformare la condizione al bordo non omogenea in una omogenea, trasferendo la non omogeneità in una condizione iniziale. Per fare questo, visto che la forza esterna non dipende dal tempo, cerchiamo la soluzione come somma di due parti, una stazionaria e l'altra che chiameremo di tipo transitorio in quanto dipende dal tempo. Cerchiamo quindi la soluzione nella forma

$$u(x, t) = U(x, t) - \Psi(x) ,$$

con $\Psi(x)$ da determinare. Il problema diventa il seguente

$$E.D.P. \quad U_{tt} = c^2 [U_{xx} - \Psi''(x)] , \quad 0 < x < L , \quad t > 0 ,$$

$$C.B. \quad U(L, t) - \Psi(L) = 0 , \quad t > 0 ,$$

$$EU_x(0, t) - E\Psi'(0) = F_0 , \quad 0 < x < L ,$$

$$C.I. \quad U(x, 0) - \Psi(x) = 0 , \quad U_t(x, 0) = 0 \quad 0 < x < L .$$

Se adesso poniamo

$$\Psi''(x) = 0 , \quad \Psi(L) = 0 , \quad \Psi'(0) = -F_0/E ,$$

ne segue che

$$\Psi(x) = (F_0/E)(L - x) .$$

Quindi, il problema per $U(x, t)$ diventa

$$E.D.P. \quad U_{tt} = c^2 U_{xx} , \quad 0 < x < L , \quad t > 0 ,$$

$$C.B. \quad U(L, t) = 0 , \quad t > 0 ,$$

$$Eu_x(0, t) = 0 , \quad 0 < x < L ,$$

$$C.I. \quad U(x, 0) = \frac{F_0}{E}(L - x) , \quad U_t(x, 0) = 0 \quad 0 < x < L .$$

Questo problema può essere risolto con il metodo di separazione delle variabili. Se $U(x, t) = X(x)T(t)$ si ha:

$$X\ddot{T} = c^2 X''T ,$$

da cui, supponendo che la soluzione non sia nulla e dividendo quindi per XT , si ottiene

$$\frac{\ddot{T}}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \quad (2.3)$$

poiché ormai sappiamo che la costante deve essere negativa. Il problema in x diventa allora

$$X'' + \lambda^2 = 0, \quad X(L) = 0, \quad X'(0) = 0 \quad (2.4)$$

che ha come soluzione

$$X_n(x) = \cos(2n-1) \frac{\pi}{2L} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Da notare che gli autovalori sono

$$\lambda^2 = \left(\frac{2n-1}{2L} \pi \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

e che $n = 0$ non è un autovalore. L'equazione in T può essere scritta come

$$\ddot{T}_n + \left(\frac{2n-1}{2L} \pi c \right)^2 T_n = 0, \quad \dot{T}_n(0) = 0. \quad (2.5)$$

La soluzione di quest'ultima è

$$T_n(t) = \cos\left(\frac{2n-1}{2L} \pi c t \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

la soluzione generale del problema è allora

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1) \frac{\pi}{2L} x \cos(2n-1) \frac{\pi c}{2L} t, \quad (2.6)$$

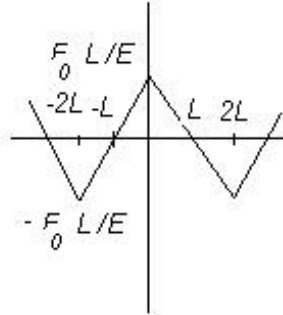
che soddisfa tutte le condizioni omogenee. Imponendo, infine la condizione iniziale non omogenea, si ha

$$U(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1) \frac{\pi}{2L} x = \frac{F_0}{E} (L-x), \quad (2.7)$$

che è la rappresentazione in serie coseno di Fourier della funzione $(F_0/E)(L-x)$.

Abbiamo ancora un problema. Se, semplicemente estendessimo per parità la funzione $(F_0/E)(L-x)$ nell'intervallo $(-L, 0)$ introdurremmo il termine costante $\frac{1}{2}a_0 \neq 0$ poiché il valor medio dell'estensione pari in $(-L, L)$ non è zero. Ma abbiamo notato come $n = 0$ non sia un autovalore e quindi dobbiamo operare un'estensione pari tale che $a_0 = 0$. Ne segue che dobbiamo prima pensare di estendere la funzione

nell'intervallo $(0, 2L)$ e poi estenderla per parità all'intervallo $(-2L, 0)$.



Questo corrisponde anche al fatto che la soluzione $U(x, t)$ va scritta come

$$U(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(x + ct) + \Phi(x - ct)] \quad (2.8)$$

dove la funzione $\Phi(x)$ è quella mostrata in figura

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{F_0}{E} (L - x) , & 0 < x < 2L , \\ \frac{F_0}{E} (x - L) , & -2L < x < 0 . \end{cases} \quad (2.9)$$

Alternativamente, cercando il coefficiente a_n nell'Eq.(2.7) si ha

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{F_0}{EL} \int_0^{2L} (L - x) \cos(2n - 1) \frac{\pi}{2L} x \, dx \\ &= \frac{8F_0 L}{E\pi^2 (2n - 1)^2} , \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

Per vedere che le due rappresentazioni (2.8) e (2.10) sono equivalenti, basta usare, nell'Eq.(2.6) l'identità trigonometrica

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)] .$$

Si ottiene

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n [\cos \omega_n (x + ct) + \cos \omega_n (x - ct)] ,$$

dove

$$\omega_n = \frac{(2n - 1) \pi}{2L} .$$

La funzione $\Phi(x)$ ha come rappresentazione in serie coseno di Fourier

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_n x ,$$

e quindi

$$\Phi(x+ct) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_n(x+ct) ,$$

con una espressione simile per $\Phi(x-ct)$, e l'equivalenza tra le due rappresentazioni (2.8) e (2.10) è quindi stabilita.

Ne segue che la soluzione del problema originale è

$$u(x,t) = \frac{F_0}{E}(x-L) + U(x,t) , \quad (2.11)$$

dove la $U(x,t)$ è espressa da una delle due espressioni equivalenti.

Consideriamo, adesso, un altro problema nel quale si può applicare l'equazione d'onda unidimensionale. Indichiamo con θ la rotazione angolare di una barra uniforme rispetto alla posizione di equilibrio. Se θ è piccolo e si può usare la teoria della elasticità, θ soddisfa l'equazione alle derivate parziali

$$\theta_{tt} = c^2 \theta_{xx} , \quad (2.12)$$

dove $c^2 = Gg/\rho$ dove G è il modulo di elasticità, ρ la densità e g l'accelerazione di gravità.

ESEMPIO 69. *Supponiamo che una barra di sezione circolare e lunghezza L sia fissata ad un estremo mentre viene ruotata all'altro e poi liberata. Quando la barra comincia ad oscillare, l'estremità libera viene fissata per $t = t_0$. A questo istante la velocità angolare è $\omega_0 x/L$ e l'angolo θ è zero. Scrivere l'equazione con le condizioni al bordo.*

SOLUZIONE 69. *Prendiamo un sistema di coordinate in modo che la barra giaccia lungo l'asse x con l'estremo libero ad $x = L$. Si ha quindi:*

$$\begin{array}{ll} \text{E.D.P.} & \theta_{tt} = c^2 \theta_{xx} , & 0 < x < L , \quad t > 0 , \\ \text{C.B.} & \theta(0,t) = 0 , & t > 0 , \\ & \theta(L,t) = 0 & t > t_0 , \\ \text{C.I.} & \left. \begin{array}{l} \theta(x,t_0) = 0 , \\ \theta_t(x,t_0) = \omega_0 x/L , \end{array} \right\} & 0 < x < L . \end{array}$$

Vogliamo osservare che essendo l'equazione autonoma (la variabile t non compare esplicitamente) possiamo assumere $t_0 = 0$. Ponendo $\theta(x,t) = X(x)T(t)$ e separando le variabili si ha:

$$\frac{\ddot{T}}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2 .$$

con la costante, negativa come al solito, visto che abbiamo a che fare con delle oscillazioni. Per la variabile spaziale abbiamo, quindi il problema

$$X'' + \lambda^2 X = 0 , \quad X(0) = 0 , \quad X(L) = 0 ,$$

la cui soluzione è

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1, 2, \dots,$$

mentre il problema iniziale è

$$\ddot{T}_n + \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}T_n = 0, \quad T_n(0) = 0,$$

che ha come soluzione

$$T_n(t) = \sin \frac{n\pi c}{L}t, \quad n = 1, 2, \dots.$$

ne segue che

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \sin \frac{n\pi c}{L}t,$$

dove

$$\frac{n\pi c}{L}b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\omega_0 x}{L} \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx,$$

da cui,

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \frac{2\omega_0 L}{c\pi^2}.$$

2.3. Esercizi.

- (1) Trovare la soluzione del seguente problema

$$\ddot{T} + \lambda^2 c^2 T = 0, \quad \dot{T}(0) = 0.$$

- (2) Le frequenze ω_{mn} dell'Esempio (67) sono chiamate *frequenze caratteristiche*. Trovare le prime sei frequenze caratteristiche della membrana vibrante, e cioè ω_{11} , ω_{12} , ω_{21} , ω_{22} , ω_{13} , ω_{31} , nel caso in cui $a = b = \pi$.
- (3) Trovare la soluzione dell'Esempio (67) supponendo che

$$u(x, y, 0) = k \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

dove $k > 0$ è una costante. Notare che sotto queste condizioni la membrana produce un suono musicale. Qual'è la frequenza del tono?

- (4) Trovare la soluzione dell'Esempio (67) supponendo che

$$f(x, y) = xy(a-x)(b-y).$$

Mostrare che questa funzione soddisfa le condizioni dell'esempio.

- (5) Se nell'Esempio (67) le condizioni iniziali sono sostituite da

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y), \quad u(x, y, 0) = 0,$$

qual'è la soluzione $u(x, y, t)$?

- (6) Usare il principio di sovrapposizione per risolvere il problema dell'Esempio (67), se le condizioni iniziali sono

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y).$$

- (7) Mostrare che E/ρ ha le dimensioni di una velocità al quadrato.
 (8) Risolvere il problema la bordo

$$\Psi''(x) = 0, \quad \Psi(L) = 0, \quad \Psi'(0) = -F_0/E.$$

- (9) Mostrare che il problema

$$X'' - \lambda^2 X = 0, \quad X(L) = 0, \quad X'(0) = 0,$$

ha solo la soluzione nulla ($\lambda \geq 0$).

- (10) Risolvere il problema

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X(L) = 0, \quad X'(0) = 0.$$

- (11) Risolvere il problema

$$\ddot{T}_n + \lambda^2 T_n = 0, \quad \dot{T}_n(0) = 0,$$

dove $\lambda = \frac{2n-1}{2L}\pi$, $n = 1, 2, \dots$

- (12) fare i conti per trovare il valore di a_n nell'Eq.(2.10).

- (13) Scrivere esplicitamente

$$U(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(x + ct) + \Phi(x - ct)]$$

partendo dall'espressione (2.9) e mostrare che $U(x, t)$ soddisfa la E.D.P. e tutte le condizioni del problema per $U(x, t)$.

- (14) Verificare che la $u(x, t)$ data dalla (2.11), con $U(x, t)$ come nell'Esercizio 13, soddisfa tutte le condizioni del Esempio (68).
 (15) Risolvere l'Esempio (69) supponendo che $\theta_t(x, t_0) = k$, dove k è costante e le altre condizioni sono inalterate.
 (16) Risolvere l'equazione della corda vibrante di lunghezza L , fissata agli estremi, e condizioni iniziali

$$u(x, 0) = x(L - x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L.$$

- (17) Calcolare $u(1/4, 2)$, e $u(1/2, 3/2)$ dell'Esercizio precedente, supponendo che $L = 1$ e $c = 1$.
 (18) dedurre dalle Equazioni (2.6) e (2.10) che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

- (19) L'equazione d'onda non omogenea porta al seguente problema

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

- (a) Dare una interpretazione fisica del problema.

(b) Verificare che la soluzione è data da:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi d\tau .$$

(c) Risolvere il problema se $F(x, t) = kg$ dove k è una costante positiva e g l'accelerazione di gravità.

(d) Risolvere il problema se $F(x, t) = kx^2$ dove k è una costante positiva.

(20) Mostrare che l'equazione d'onda non cambia se x è sostituita da $-x$. e quindi se $u(x, t)$ è soluzione lo è anche $u(-x, t)$. Mostrare che come conseguenza di ciò, se le condizioni iniziali sono entrambe pari (o entrambe dispari), lo è anche la soluzione.

(21) Risolvere il problema

$$P.D.E. \quad u_{tt} = u_{xx} + u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$C.B. \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

(22) Risolvere i seguenti problemi non omogenei:

(a)

$$P.D.E. \quad u_{tt} = c^2 u_{xx} + 1, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

$$C.I. \quad u(x, 0) = \sin bx, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

(b)

$$P.D.E. \quad u_{tt} = c^2 u_{xx} + 4x + t, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

$$C.I. \quad u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$u_t(x, 0) = \cosh bx, \quad -\infty < x < +\infty.$$

3. L'equazione di diffusione

Un esempio classico si equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine di tipo parabolico, è l'equazione di diffusione

$$u_t = k \nabla^2 u, \quad k > 0, \quad (3.1)$$

dove ∇^2 è l'operatore Laplaciano, nello spazio tridimensionale è definito come:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

In questo paragrafo consideriamo vari problemi al bordo per l'equazione di diffusione. Li considereremo come problemi di **conduzione di calore**. In alcuni casi specificheremo la temperatura al bordo, in altri

specificheremo il flusso di calore attraverso il bordo o il trasferimento di calore per **convezione** dal mezzo all'ambiente che penseremo mantenuto a temperatura costante. Questo ultimo caso coinvolge la **legge di raffreddamento di Newton** nella forma

$$-\frac{du}{dn} = h(u - u_0) , \quad h > 0 , \quad u > u_0 , \quad (3.2)$$

dove du/dn è la derivata normale della temperatura al bordo (diretta verso l'esterno), h il **coefficiente di scambio termico** tra mezzo ed ambiente, ed u_0 la temperatura dell'ambiente.

In un punto sulla superficie S del corso, definiamo il *flusso di calore* Φ come la quantità di calore per unità di area ed unità di tempo che traversa la superficie S nel punto considerato. Il flusso Φ è proporzionale alla derivata direzionale della temperatura u nella direzione normale alla superficie S , cioè

$$\Phi = -K \frac{du}{dn} , \quad (3.3)$$

dove la costante di proporzionalità $K > 0$ è la conduttività termica e du/dn la variazione di temperatura, nell'unità di tempo, nella direzione della normale esterna. L'unità di misura del flusso è *calorie/cm²/sec*. Negli Esempi (70)-(71)-(72) illustreremo come trattare le varie condizioni al bordo. In questi esempi considereremo un lunga barra sottile di sezione costante completamente isolata nella superficie laterale in modo tale che lo scambio di calore con l'esterno avvenga solo attraverso gli estremi. Considereremo, quindi l'equazione del calore unidimensionale in coordinate cartesiane.

ESEMPIO 70. *Risolvere il seguente problema*

$$\begin{array}{ll} P.D.E. & u_t = u_{xx} , \quad 0 < x < L , \quad t > 0 , \\ C.B. & \left. \begin{array}{l} u_x(0, t) = 0 , \\ u(L, t) = 0 , \end{array} \right\} \quad t > 0 , \\ C.I. & u(x, 0) = f(x) , \quad 0 < x < L . \end{array}$$

SOLUZIONE 70. *Questo è un problema di conduzione in una barra in cui l'estremo sinistro è perfettamente isolato, mentre quello destro è tenuto a temperatura zero e la cui distribuzione di temperatura iniziale è $f(x)$. Per risolvere il problema usiamo, come al solito, la separazione delle variabili. Sia $u(x, t) = X(x)T(t)$, sostituendo nell'equazione si ha*

$$X(x)\dot{T}(t) = X''(x)T(t) ,$$

da cui, supponendo come al solito che la soluzione non sia nulla,

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2 .$$

Il, problema di Sturm-Liouville per X è

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(L) = 0,$$

che ha come soluzione

$$X_n(x) = \cos \frac{2n-1}{L} \frac{\pi}{2} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ne segue che l'equazione del primo ordine in T_n , che assume la forma

$$\dot{T}_n(t) + \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4L^2} T_n(t) = 0,$$

ha come soluzione

$$T_n(t) = \exp \left[-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4L^2} t \right],$$

da cui si ricava che la temperatura $u(x, t)$ ha la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \exp \left[-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4L^2} t \right] \cos \frac{2n-1}{L} \frac{\pi}{2} x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Applicando la condizione iniziale si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos \frac{2n-1}{L} \frac{\pi}{2} x = f(x).$$

Se $f(x)$ soddisfa le dovute condizioni, può essere espressa in serie coseno di Fourier e si ha quindi

$$a_{2n-1} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)_{2n-1} \cos \frac{2n-1}{L} \frac{\pi}{2} x dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

La soluzione completa del problema si ottiene dall'Eq.(3.4) con i coefficienti a_{2n-1} definiti dall'Eq.(3.5).

Il prossimo esempio illustra come si deve operare nel caso si abbiano condizioni al bordo non-omogenee.

ESEMPIO 71. Risolvere il seguente problema.

$$\left. \begin{array}{l} P.D.E. \quad u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ C.B. \quad \left. \begin{array}{l} u(0, t) = 0, \\ u(L, t) = u_0, \quad \text{costante} \end{array} \right\} \quad t > 0, \\ C.I. \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L. \end{array} \right\}$$

SOLUZIONE 71. Il metodo di separazione delle variabili non funziona perché la condizione al bordo non è omogenea e considerare dapprima l'equazione temporale porterebbe solo ad avere la soluzione nulla. Come abbiamo già visto, poiché la condizione al bordo non-omogenea non dipende dal tempo (in particolare è costante), consideriamo la soluzione generale come la somma di una soluzione stazionaria (non

dipendente dal tempo, su cui scaricheremo la condizione al bordo non omogenea) con una soluzione dipendente dal tempo (che chiameremo transitoria). Scriviamo perciò

$$u(x, t) = U(x, t) + V(x) ,$$

così il problema diventa

$$\begin{array}{ll} \text{P.D.E.} & U_t = U_{xx} + V''(x) , \quad 0 < x < L , \quad t > 0 , \\ \text{C.B.} & \left. \begin{array}{l} U(0, t) + V(0) = 0 , \\ u(L, t) + V(L) = u_0 , \end{array} \right\} \quad t > 0 , \\ \text{C.I.} & U(x, 0) + V(x) = 0 , \quad 0 < x < L . \end{array}$$

Se la soluzione stazionaria soddisfa l'equazione

$$V''(x) = 0 \quad V(0) = 0 , \quad V(L) = u_0 , \quad (3.6)$$

allora la parte transitoria dell'equazione soddisfa il problema

$$\begin{array}{ll} \text{P.D.E.} & U_t = U_{xx} , \quad 0 < x < L , \quad t > 0 , \\ \text{C.B.} & \left. \begin{array}{l} U(0, t) = 0 , \\ u(L, t) = 0 , \end{array} \right\} \quad t > 0 , \\ \text{C.I.} & U(x, 0) = -V(x) , \quad 0 < x < L . \end{array}$$

che può essere risolta con il metodo di separazione delle variabili.

ESEMPIO 72. Una barra cilindrica di lunghezza L ha inizialmente temperatura $f(x)$. L'estremità sinistra è tenuta a temperatura zero, mentre il calore è trasferito dal mezzo all'ambiente, tenuto a temperatura zero, attraverso l'estremo destro. Trovare $u(x, t)$

SOLUZIONE 72. Il problema può essere espresso nella seguente forma

$$\begin{array}{ll} \text{P.D.E.} & u_t = u_{xx} , \quad 0 < x < L , \quad t > 0 , \\ \text{C.B.} & \left. \begin{array}{l} u(0, t) = 0 , \\ -u_x(L, t) = h u(L, t) , \quad h > 0 , \end{array} \right\} \quad t > 0 , \\ \text{C.I.} & u(x, 0) = f(x) , \quad 0 < x < L . \end{array}$$

Usando la separazione delle variabili si ha

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2 ,$$

da cui

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x .$$

La prima condizione al bordo implica che $c_1 = 0$, mentre la seconda implica che $-X'(L) = h X(L)$ che implica

$$\tan \lambda L = -\lambda/h \quad (3.7)$$

La soluzione può allora essere scritta come

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-\lambda_n^2 t) \sin \lambda_n x . \quad (3.8)$$

Applicando la condizione al contorno si ha che

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \lambda_n x = f(x) ,$$

dove i λ_n sono le soluzioni dell'Eq.(3.7).

Poiché il problema

$$X'' + \lambda^2 X = 0 , \quad X(0) = 0 , \quad hX(L) + X'(L) = 0 , \quad (3.9)$$

è un problema di Sturm-Liouville regolare, sappiamo che ad ogni autovalore λ_n corrisponde una unica autofunzione $\sin \lambda_n x$. Inoltre, le autofunzioni formano un insieme ortonormale sull'intervallo $[0, L]$ con funzione peso unitaria. Infine, questo insieme ortonormale è completo rispetto alla classe delle funzioni lisce a tratti su $[0, L]$. In questo caso la funzione $f(x)$ può essere rappresentata in serie di funzioni $\sin \lambda_n x$ ed i coefficienti c_n nell'Eq.(3.8) sono dati da

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\int_0^L f(x) \sin \lambda_n x \, dx}{\int_0^L \sin^2 \lambda_n x \, dx} \\ &= \frac{2(\lambda_n^2 + h^2)}{L(\lambda_n^2 + h^2) + h} \int_0^L f(x) \sin \lambda_n x \, dx . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Nel concludere il paragrafo, vogliamo ricordare l'**equazione dell'età di Fermi**² per la diffusione dei neutroni in un mezzo quale, ad esempio la grafite.

$$\frac{\partial^2 q(x, \tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial q(x, \tau)}{\partial \tau} .$$

Nell'equazione q rappresenta il numero di neutroni che rallentano (che scendono, cioè, al di sotto di una certa soglia di energia) per secondo per unità di volume. L'**età di Fermi** τ è una misura della perdita di energia.

3.1. Esercizi.

- (1) Mostrare che il cambiamento di coordinate $\tau = kt$ trasforma l'Eq.(3.1) nell'equazione $u_t = \nabla^2 u$.
- (2) Nell'Esempio (3.1) mostrare che
 - (a) scegliendo $\lambda = 0$ si ha solo la soluzione nulla per $X(x)$.
 - (b) Scegliendo $+\lambda^2$ nell'equazione di separazione delle variabili si ha solo la soluzione nulla per $X(x)$.

²Enrico Fermi (1901-1954) fisico italiano che coordinò la costruzione del primo reattore nucleare.

- (3) Trovare gli autovalori del problema di Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(L) = 0.$$

- (4) Spiegare perché non c'è un termine
- a_0
- nella soluzione dell'Esempio (3.1).

- (5) nell'Esempio (72) mostrare che:

(a) $\lambda = 0$ dà la soluzione nulla per $X(x)$.(b) Scegliendo $+\lambda^2$ nell'equazione di separazione delle variabili si ha solo la soluzione nulla per $X(x)$.

- (6) Verificare che il problema in (3.9) è un problema di Sturm-Liouville regolare.

- (7) Calcolare i coefficienti
- c_n
- nell'Eq.(3.10). (
- Sugg.:**
- Dopo aver integrato, usare l'Eq.(3.7) per trovare
- $\sin \lambda_n L$
- e
- $\cos \lambda_n L$
-)

- (8) Risolvere il problema

$$P.D.E. \quad u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$C.B. \quad \left. \begin{array}{l} u(0, t) = 0, \\ u_x(L, t) = 0, \end{array} \right\} \quad t > 0,$$

$$C.I. \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

- (9) Risolvere il problema dell'Esercizio 8 se

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{L}{2}, \\ L - x, & \frac{L}{2} < x \leq L. \end{cases}$$

- (10) Una barra sottile cilindrica, di lunghezza
- L
- ha le estremità perfettamente isolate ed una distribuzione iniziale di temperatura data da
- $f(x)$
- . Trovare la temperatura in ogni punto per ogni tempo.

- (11) Risolvere il seguente problema al bordo

$$P.D.E. \quad u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

$$C.B. \quad \left. \begin{array}{l} u(2, t) = 0, \\ u_x(0, t) = 0, \end{array} \right\} \quad t > 0,$$

$$C.I. \quad u(x, 0) = ax, \quad a > 0 \quad 0 < x < 2.$$

- (12) Risolvere il seguente problema al bordo

$$P.D.E. \quad u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$C.B. \quad \left. \begin{array}{l} u(0, t) = 0, \\ u_x(1, t) = 0, \end{array} \right\} \quad t > 0,$$

$$C.I. \quad u(x, 0) = u_0 x, \quad a > 0 \quad 0 < x < 1.$$

- (13) Le facce $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ di un parallelepipedo rettangolo semi-infinito, sono tenute a temperatura zero, e la faccia $z = 0$ è tenuta ad una temperatura $f(x, y)$. Trovare la temperatura nell'interno al tempo t . (**Sugg.:** Confronta con l'Esempio (64)).
- (14) Risolvere il seguente problema e verificare completamente la soluzione.

$$\begin{array}{ll}
 P.D.E. & u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\
 C.B. & \left. \begin{array}{l} u_x(0, t) = 0, \\ u_x(\pi, t) = 0, \end{array} \right\} \quad t > 0, \\
 C.I. & u(x, 0) = \sin^2 x, \quad a > 0 \quad 0 < x < \pi.
 \end{array}$$

- (15) Una barra lunga π è completamente isolata, eccetto che per i due estremi che sono tenuti a temperatura zero. Trovare la temperatura della barra se la distribuzione iniziale di temperatura è $x \sin x$.
- (16) Trovare la soluzione dell'Esempio (70) se $f(x)$ è definito come:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{L}{2}, \\ L, & \frac{L}{2} < x \leq L. \end{cases}$$

- (17) Una barra lunga L è isolata solamente ad entrambi gli estremi e la distribuzione iniziale di temperatura è $f(x)$. Se c'è un trasferimento di calore superficiale lineare tra la barra e l'ambiente tenuto a temperatura nulla, l'equazione di trasferimento di calore è data da

$$v_t(x, t) = kv_{xx}(x, t) - hv(x, t),$$

dove h è una costante positiva. Usando la sostituzione

$$v(x, t) = u(x, t) \exp(-ht),$$

trasformare questo problema in uno già risolto.

- (18) Risolvere l'Esercizio 17 supponendo che gli estremi, invece di essere isolati, siano tenuti a temperatura zero.
- (19) Risolvere il seguente problema,

$$\begin{array}{ll}
 P.D.E. & u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\
 C.B. & \left. \begin{array}{l} u(0, t) = T_1, \\ u(L, t) = T_2, \end{array} \right\} \quad t > 0, \\
 C.I. & u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L.
 \end{array}$$

dove T_1 e T_2 sono costanti.

4. Metodo delle trasformate di Fourier e Laplace

Quando abbiamo da risolvere un problema su un dominio infinito o semi-infinito, il metodo delle trasformate fornisce un buon approccio. Abbiamo già visto nei Paragrafi 6.2, 6.3 e 7.1 alcuni esempi di uso delle trasformate di Fourier. Vogliamo qui fornire ulteriori esempi usando sia la trasformata di Fourier che quello di Laplace.

ESEMPIO 73. *Trovare la funzione armonica, limitata $v(x, y)$ nella striscia semi-infinita $0 < x < c$, $y > 0$, che soddisfa le condizioni al bordo*

$$(a) v(0, y) = 0, \quad (b) v_y(x, 0) = 0, \quad (c) v_x(c, y) = f(y) .$$

dare una interpretazione fisica del problema.

SOLUZIONE 73. *Bisogna risolvere l'equazione di Laplace*

$$v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad 0 < x < c, \quad y > 0 .$$

usiamo la trasformata coseno di Fourier e trasformiamo la variabile y vista la condizione al bordo (b). Si ha allora

$$\frac{d^2 \bar{v}(x, \alpha)}{dx^2} - \alpha^2 \bar{v}(x, \alpha) = 0 ,$$

con le condizioni al bordo

$$(a') \bar{v}(0, \alpha) = 0, \quad (c') \frac{d\bar{v}(c, \alpha)}{dx} = \bar{f}(\alpha) ,$$

dove

$$\bar{f}(\alpha) = \int_0^\infty f(y) \cos \alpha y \, dy .$$

La soluzione generale dell'equazione ordinaria del secondo ordine è

$$\bar{v}(x, \alpha) = c_1(\alpha) \cosh(\alpha x) + c_2(\alpha) \sinh(\alpha x) .$$

Le condizioni (a') e (c') implicano rispettivamente che $c_1(\alpha) = 0$ e

$$c_2(\alpha) = \frac{\bar{f}(\alpha)}{\alpha \cosh(\alpha c)} .$$

la trasformata inversa del coseno da:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\bar{f}(\alpha)}{\alpha \cosh(\alpha c)} \sinh(\alpha x) \cos(\alpha y) \, d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sinh(\alpha x) \cos(\alpha y)}{\alpha \cosh(\alpha c)} \int_0^\infty f(s) \cos(\alpha s) \, ds \, d\alpha \end{aligned} \quad (4.1)$$

Possiamo interpretare, per esempio, il problema come quello della ricerca della temperatura stazionaria in un rettangolo semi-infinito di spessore c , la cui estremità sinistra è tenuta a temperatura nulla, l'estremità inferiore è perfettamente isolata ed il flusso di calore traverso l'estremità destra è data da $f(y)$.

Nel prossimo esempio faremo uso della trasformata seno di Fourier.

ESEMPIO 74. *Risolvere il problema*

$$P.D.E. \quad u_t = ku_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$C.B. \quad u(0, t) = u_0, \quad t > 0,$$

$$C.I. \quad u(x, 0) = 0, \quad x > 0,$$

dove $u_0 > 0$.

SOLUZIONE 74. *La trasformata più appropriata è quella seno di Fourier poiché $0 < x < \infty$ ed è noto $u(0, t)$. Si ha quindi*

$$\frac{d\bar{u}(\alpha, t)}{dt} = \alpha u_0 - \alpha^2 \bar{u}(\alpha, t).$$

Questa equazione differenziale ordinaria del primo ordine, non-omogenea, facendo uso della condizione iniziale $\bar{u}(\alpha, 0) = 0$, ha come soluzione

$$\bar{u}(\alpha, t) = \frac{u_0}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha^2 t)].$$

La trasformata seno inversa di Fourier di $\bar{u}(\alpha, t)$ è

$$u(x, t) = \frac{2u_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha^2 t)] \sin \alpha x \, d\alpha.$$

Sappiamo già che

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \, d\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{se } x > 0.$$

Ne segue che

$$u(x, t) = u_0 - \frac{2u_0}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\alpha^2 t) \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \, d\alpha,$$

ed usando il fatto che

$$\frac{\sin \alpha x}{\alpha} = \int_0^x \cos \alpha s \, ds,$$

si ha

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 - \frac{2u_0}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\alpha^2 t) \int_0^x \cos \alpha s \, ds \, d\alpha \\ &= u_0 - \frac{2u_0}{\pi} \int_0^x \int_0^\infty \exp(-\alpha^2 t) \cos \alpha s \, d\alpha \, ds. \end{aligned}$$

Usando le tavole degli integrali, si ha che

$$u(x, t) = u_0 - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\exp(-s^2/4t)}{\sqrt{t}} \, ds.$$

Adesso, la sostituzione $v^2 = s^2/4t$ trasforma quest'ultimo risultato in

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 - \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} \exp(-v^2) dv & (4.2) \\ &= u_0 - u_0 \operatorname{erf}\left(x/2\sqrt{t}\right) \\ &= u_0 \left[1 - \operatorname{erf}\left(x/2\sqrt{t}\right)\right] = u_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right), \end{aligned}$$

avendo usato la definizione di *erfc*, la **funzione errore complementare**.

$$\operatorname{erfc}x = 1 - \operatorname{erf}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-s^2} ds,$$

dove la funzione $\operatorname{erf}x$ è definita da

$$\operatorname{erf}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds.$$

Una osservazione interessante può essere tratta dalla forma della soluzione (4.2). Un cambiamento nella temperatura al bordo u_0 è istantaneamente trasmesso ad ogni altro punto dell'asse x . Questo implica che il calore si trasmette a velocità infinita, che è ovviamente poco credibile. Vogliamo però ricordare che nel ricavare l'equazione di diffusione abbiamo usato un concetto di equilibrio. Ne segue che $u(x, t)$ ha significato solo se il sistema è essenzialmente in equilibrio per tutti i t . D'altra parte, la conduzione del calore è il risultato del movimento casuale di molecole che trasferiscono la loro energia cinetica come risultato di una collisione. Poiché la scala temporale di quest'ultimo fenomeno è totalmente differente da quello necessario per raggiungere un equilibrio macroscopico di temperatura, possiamo supporre che le variazioni di temperatura si propagano a velocità infinita.

Vogliamo adesso risolvere il problema precedente facendo uso della trasformata di Laplace.

ESEMPIO 75. Risolvere il problema dell'Esempio (74) facendo uso della trasformata di Laplace.

SOLUZIONE 75. Indicando con

$$U(s) = \int_0^\infty e^{-st} u(t) dt, \quad s > 0.$$

Quindi, facendo uso del fatto che $u(x, 0) = 0$ si ha

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt = e^{-st} u(x, t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt = sU(x, s).$$

Ne risulta che l'equazione $u_t = u_{xx}$ diventa

$$\frac{d^2 U(x, s)}{dx^2} - sU(x, s) = 0,$$

con condizione

$$U(0, s) = \int_0^\infty e^{-st} u_0 dt = \frac{u_0}{s} .$$

La soluzione dell'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, è

$$U(x, s) = c_1(s) e^{\sqrt{sx}} + c_2(s) e^{-\sqrt{sx}} .$$

Prendiamo $c_1(s) = 0$ così che la soluzione rimanga limitata per $x > 0$, ed applicando la condizione $U(0, s) = u_0/s$, si ha

$$U(x, s) = \frac{u_0}{s} e^{-\sqrt{sx}} . \tag{4.3}$$

Usando le tavole delle antitrasformate di Laplace, si trova che

$$u(x, t) = u_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) ,$$

come prima.

Il prossimo esempio illustra come la trasformata di Laplace possa essere utilmente usata in alcuni problemi al bordo non-omogenei.

ESEMPIO 76. Risolvere il seguente problema al bordo, usando la trasformata di Laplace.

$$P.D.E. \quad u_t = k u_{xx} , \quad 0 < x < d , \quad t > 0 ,$$

$$C.B. \quad \left. \begin{array}{l} u(0, t) = a \\ u(d, t) = a \end{array} \right\} \quad t > 0 ,$$

$$C.I. \quad u(x, 0) = a + b \sin \frac{\pi}{d} x , \quad 0 < x < d ,$$

dove a e b sono costanti.

SOLUZIONE 76. Trasformando l'equazione e le condizioni al bordo si ottiene

$$\frac{d^2 U(x, s)}{dx^2} - sU(x, s) = -a - b \sin \frac{\pi}{d} x ,$$

$$U(0, s) = \frac{a}{s} , \quad U(d, s) = \frac{a}{s} .$$

L'equazione differenziale ordinaria ha come soluzione:

$$U(x, s) = c_1(s) e^{\sqrt{sx}} + c_2(s) e^{-\sqrt{sx}} + \frac{a}{s} + \frac{bd^2}{d^2 s + \pi^2} \sin \frac{\pi}{d} x ,$$

ed usando le condizioni al bordo, si ottiene:

$$U(x, s) = \frac{a}{s} + \frac{bd^2}{d^2 s + \pi^2} \sin \frac{\pi}{d} x .$$

Si può adesso usare la tabella delle antitrasformate per ottenere:

$$u(x, t) = a + b \sin \frac{\pi}{d} x \exp \left(\frac{-\pi^2 t}{d^2} \right) .$$

ESEMPIO 77. *Risolvere il seguente problema usando le trasformate di Laplace.*

$$\begin{array}{ll}
 P.D.E. & u_{tt} = ku_{xx}, \quad 0 < x < c, \quad t > 0, \\
 C.B. & \left. \begin{array}{l} u(0, t) = 0 \\ u(c, t) = 0 \end{array} \right\} \quad t > 0, \\
 C.I. & \left. \begin{array}{l} u(x, 0) = b \sin \frac{\pi}{c} x, \\ u_t(x, 0) = -b \sin \frac{\pi}{c} x \end{array} \right\} \quad 0 < x < c.
 \end{array}$$

SOLUZIONE 77. *Trasformando l'equazione e le condizioni al bordi si ottiene:*

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 U(x, s)}{dx^2} &= s^2 U(x, s) = -bs \sin \frac{\pi}{c} x + b \sin \frac{\pi}{c} x, \\
 U(0, s) &= 0, \quad U(c, s) = 0,
 \end{aligned}$$

che ha come soluzione

$$U(x, s) = \frac{bc^2(s-1)}{c^2s + \pi^2} \sin \frac{\pi}{c} x.$$

Ne segue che

$$u(x, t) = b \sin \frac{\pi}{c} x \left[\cos \frac{\pi}{c} t - \frac{c}{\pi} \sin \frac{\pi}{c} t \right].$$

Nel prossimo esempio semplificheremo la condizioni dell'Esempio (76) e mostreremo che nonostante ciò il problema sembra non trattabile con le trasformate di Laplace.

ESEMPIO 78. *Risolvere il seguente problema facendo uso delle trasformate di Laplace*

$$\begin{array}{ll}
 P.D.E. & u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\
 C.B. & \left. \begin{array}{l} u(0, t) = 1 \\ u(1, t) = 1 \end{array} \right\} \quad t > 0, \\
 C.I. & u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1,
 \end{array}$$

SOLUZIONE 78. *Il problema trasformato è*

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 U(x, s)}{dx^2} &= sU(x, s), \\
 U(0, s) &= \frac{1}{s}, \quad U(1, s) = \frac{1}{s},
 \end{aligned}$$

che appare semplice da risolvere.. La soluzione è, tuttavia

$$\begin{aligned}
 U(x, s) &= \frac{1}{s} \cosh \sqrt{s} x + \frac{(1 - \cosh \sqrt{s}) \sinh \sqrt{s} x}{s \sinh \sqrt{s} x} \\
 &= \frac{\sinh \sqrt{s} x + \sinh \sqrt{s} (1 - x)}{s \sinh \sqrt{s} x}.
 \end{aligned}$$

Anche con una tabella di trasformate ed antitrasformate piuttosto estesa non possiamo aspettarci di trovare l'antitrasformata di questa particolare funzione. Ciò che è qui necessario è un metodo generale per trovare le trasformate inverse di Laplace. Questo metodo implica la conoscenza della teoria delle funzioni complesse di variabile complessa ed in particolare il teorema dei residui.

Vogliamo chiudere questo paragrafo con un ulteriore esempio che tratta un problema al bordo non omogeneo. Consideriamo un barra semi-infinita inizialmente a temperatura nulla. Se all'estremità $x = 0$ viene fornito calore in accordo alla funzione $h(t)$ si ha il problema dell'esempio successivo.

ESEMPIO 79. Risolvere il seguente problema

$$\begin{aligned} P.D.E. \quad & u_t = u_{xx} , & x > 0 , \quad t > 0 , \\ C.B. \quad & u_x(0, t) = h(t) & t > 0 , \\ C.I. \quad & u(x, 0) = 0 , & x > 0 . \end{aligned}$$

SOLUZIONE 79. Possiamo far uso della trasformata coseno di Fourier per trasformare x poiché $0 < x < +\infty$ ed è assegnato $u_x(0, t)$. Si ha quindi

$$\bar{u}(\alpha, t) = \int_0^\infty u(x, t) \cos \alpha x \, dx ,$$

e u_{xx} è trasformato in $-h(t) - \alpha^2 \bar{u}(\alpha, t)$. Quindi l'equazione trasformata diventa

$$\frac{d\bar{u}(\alpha, t)}{dt} + \alpha^2 \bar{u}(\alpha, t) = -h(t) ,$$

che è una equazione differenziale lineare del primo ordine. La soluzione è

$$\bar{u}(\alpha, t) = -\exp(-\alpha^2 t) \left[\int_0^t \exp(\alpha^2 s) h(s) \, ds + C \right] ,$$

e la condizione $\bar{u}(\alpha, 0) = 0$ implica che $C = 0$, da cui

$$\begin{aligned} \bar{u}(\alpha, t) &= -\exp(-\alpha^2 t) \int_0^t \exp(\alpha^2 s) h(s) \, ds \\ &= -\int_0^t \exp[\alpha^2(s-t)] h(s) \, ds , \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \alpha x \int_0^t \exp[\alpha^2(s-t)] h(s) \, ds \, d\alpha \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^t h(s) \int_0^\infty \exp[\alpha^2(s-t)] \cos \alpha x \, d\alpha \, ds \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t h(s) \frac{\exp[-x^2(4(t-s))]}{\sqrt{t-s}} \, ds , \end{aligned}$$

avendo assunto di poter scambiare l'ordine degli integrali.

Fino a questo momento, la maggior parte dei problemi che abbiamo trattato ammettono una **soluzione formale**, nel senso che sono state ottenute facendo i conti. Poiché la maggior parte di loro sono formulate in termini di serie o di integrali impropri, rimane da verificarne la *validità*. Cosa che faremo nel prossimo paragrafo.

4.1. Esercizi.

- (1) Risolvere il seguente sistema al bordo

$$\frac{d^2\bar{v}(x, \alpha)}{dx^2} - \alpha^2\bar{v}(x, \alpha) = 0 ,$$

$$\bar{v}(0, \alpha) = 0 , \quad \frac{d\bar{v}(c, \alpha)}{dx} = \bar{f}(\alpha) .$$

- (2) Risolvere il seguente problema

$$\frac{d\bar{u}(\alpha, t)}{dt} + \alpha^2\bar{u}(\alpha, t) = \alpha u_0 , \quad \bar{u}(\alpha, 0) = 0 .$$

- (3) Verificare che l'Eq.(4.3) è la corretta soluzione del problema dato.
 (4) Risolvere il seguente problema al bordo

$$\frac{d^2U(x, s)}{dx^2} - s^2U(x, s) = b(1-s) \sin \frac{\pi}{c}x ,$$

$$U(0, s) = U(c, s) = 0 .$$

e confrontare la soluzione con quella dell'Esempio (77).

- (5) Ottenere la trasformata inversa di Laplace della funzione $U(x, s)$ dell'Esempio (77).
 (6) Nel problema dell'Esempio (78) fare la sostituzione

$$u(x, t) = U(x, t) + \Phi(x) ,$$

quindi risolvere il problema col metodo di separazione delle variabili.

- (7) Risolvere l'Esempio (73) se $f(y) = e^{-y}$.
 (8) Risolvere il seguente problema usando la trasformata di Fourier

$$P.D.E. \quad u_t = u_{xx} , \quad x > 0 , \quad t > 0 ,$$

$$C.B. \quad u_x(0, t) = u_0 \quad t > 0 ,$$

$$C.I. \quad u(x, 0) = 0 , \quad x > 0 .$$

- (9) Risolvere l'esercizio 8 usando la trasformata di Laplace.
 (10) Calcolare la funzione armonica limitata $v(x, y)$ nella striscia semi-infinita $0 < x < c, y > 0$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$(i) v(0, y) = 0 , \quad (ii) v_y(x, 0) = 0 , \quad (iii) v_x(c, y) = f(y) .$$

(11) Calcolare la funzione armonica limitata $v(x, y)$ nella striscia semi-infinita $0 < y < b$, $x > 0$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$(i) v_y(x, 0) = 0, \quad (ii) v_x(0, y) = 0, \quad (iii) v(x, b) = f(x).$$

(12) Risolvere il seguente problema

$$P.D.E. \quad u_t = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$C.B. \quad u(0, t) = h(t) \quad t > 0,$$

$$C.I. \quad u(x, 0) = 0, \quad x > 0.$$

(13) Mostrare che

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp(-ax)}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi/a}, \quad a > 0.$$

(14) Risolvere il seguente problema usando le trasformate di Laplace.

$$P.D.E. \quad u_{tt} = u_{xx} + \sin \frac{\pi}{c} x \sin \omega t, \quad 0 < x < c, \quad t > 0,$$

$$C.B. \quad u(0, t) = 0, \quad u(c, t) = 0 \quad t > 0,$$

$$C.I. \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad 0 < x < c.$$

5. Verifica delle soluzioni

Nella maggior parte dei problemi che abbiamo risolto in questo capitolo, abbiamo impiegato il metodo di separazione delle variabili o il metodo delle trasformate. I passi per arrivare alle soluzioni spesso numerosi e a volte complicati. Come risultato di ciò ci siamo accontentati che le soluzioni trovate soddisfacessero le condizioni al bordo e che fossero ragionevoli da un punto di vista fisico. In questo paragrafo, discuteremo come verificare, dal punto di vista matematico, le soluzioni trovate. Per fare ciò dobbiamo mostrare che la soluzione trovata soddisfa identicamente l'equazione differenziale e questo non è banale quando la soluzione è espressa in forma di serie o di integrale improprio. La derivazione di una serie termine a termine o lo scambio tra derivazione ed integrazione richiedono che certe condizioni siano soddisfatte.

Diamo adesso un esempio di verifica della soluzione.

ESEMPIO 80. *dato il problema*

$$P.D.E. \quad u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$C.B. \quad u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad t > 0,$$

$$C.I. \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L,$$

dove la funzione $f(x)$ è liscia a tratti in $(0, L)$, verificare la soluzione

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \exp\left(-\frac{kn^2\pi^2}{L^2} t\right), \quad (5.1)$$

ricordando che

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(s) \sin \frac{n\pi}{L} s \, ds .$$

SOLUZIONE 80. *E' facile verificare che le condizioni al bordo sono soddisfatte. Basta osservare che le b_n sono limitate (vedi Teorema 2.5.1) così come lo è la funzione $\exp(-kn^2\pi^2t/L^2)$. La condizione iniziale è soddisfatta poiché abbiamo assunto che $f(x)$ fosse liscia a tratti in $(0, L)$ e quindi ammette una rappresentazione seno di Fourier. Consideriamo adesso la derivata parziale*

$$u_t(x, t) = -\frac{k\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \exp\left(-\frac{kn^2\pi^2}{L^2} t\right) .$$

Si ha:

$$|u_t(x, t)| \leq Mk \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \exp\left(-\frac{kn^2\pi^2}{L^2} t\right) .$$

dove M è il massimo valore di $\pi^2 b_n/L^2$. Il criterio del rapporto ci dice che questa serie è uniformemente convergente e lo è quindi anche $u_t(x, t)$. In modo del tutto simile si dimostra che u_x e u_{xx} sono definite da serie uniformemente convergenti per tutti i valori delle variabili. Ne segue che la si può derivare termine a termine e che

$$u_{xx}(x, t) = -\frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \exp\left(-\frac{kn^2\pi^2}{L^2} t\right) ,$$

e quindi $u_t = ku_{xx}$ è verificato. ■

Nel prossimo esempio consideriamo una soluzione che è espressa in forma di integrale improprio.

ESEMPIO 81. *Dato il problema considerato nell'Esempio 6.2.1, e cioè*

$$E.D.P. \quad u_t = u_{xx} , \quad -\infty < x < +\infty , \quad t > 0 ,$$

$$C.I. \quad u(x, 0) = f(x) , \quad -\infty < x < +\infty ,$$

verificare che la soluzione

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \exp[-(s-x)^2/4t] \, ds . \quad (5.2)$$

SOLUZIONE 81. *Chiaramente la forma dell'Eq.(5.2) non è delle migliori per verificare la condizione iniziale. Con riferimento al Paragrafo 6.2 ricordiamo che la soluzione può essere scritta, in forma equivalente, come*

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(s) \cos \alpha(s-x) \exp(-\alpha^2 t) \, d\alpha \, ds . \quad (5.3)$$

Questa versione della soluzione ci permette di vedere che $u(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t)$ e, assumendo per ora che si possano scambiare limite ed integrale, si ottiene

$$u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(s) \cos \alpha(s-x) d\alpha ds . \quad (5.4)$$

che non è altro che la rappresentazione integrale di Fourier della funzione $f(x)$ se questa è liscia a tratti e assolutamente integrabile su $(-\infty, +\infty)$. Nei punti di discontinuità, come noto, la rappresentazione dà il valor medio del salto nel punto.

Poiché $f(x)$ è assolutamente integrabile, esiste $M > 0$ tale che

$$|f(x)| < M , \quad -\infty < x < +\infty .$$

Allora, per $t > 0$ ed usando la (5.2) si ha

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &< \frac{M}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(s-x)^2/4t] ds \\ &= \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\xi^2] d\xi = M , \end{aligned}$$

dove abbiamo operato la sostituzione

$$\xi = \frac{s-x}{2\sqrt{t}} . \quad (5.5)$$

Abbiamo così mostrato che l'integrale improprio nella (5.2) è limitato. Prima di continuare vogliamo enunciare un teorema simile a quello che descrive il test di Weierstrass per le serie.

THEOREM 25. Sia $f(x, s)$ continua nella regione

$$R : \quad -\infty < x < +\infty , \quad -\infty < s < +\infty .$$

Se una funzione $M(s)$ ha la proprietà che

$$|f(x, s)| \leq M(s) \quad \text{in } R$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M(s) ds < +\infty ,$$

allora l'integrale

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, s) ds$$

converge assolutamente e uniformemente nell'intervallo $-\infty < x < +\infty$.

PROOF. Per le ipotesi

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, s) ds \right| \leq \int_b^{+\infty} |f(x, s)| ds \leq \int_b^{+\infty} M(s) ds < \varepsilon ,$$

qualunque sia x , basta scegliere b sufficientemente grande. \square

Ne segue che l'integrale improprio nell'Eq.(5.2) converge assolutamente ed uniformemente per $t > 0$ e per tutti gli x , $-\infty < x < +\infty$. Ne segue che gli integrali che si ottengono dall'Eq.(5.2) derivando parzialmente sotto il segno di integrale per t ed x sono uniformemente convergenti. Ne segue che $u(x, t)$ soddisfa l'equazione di diffusione per $t > 0$ e $-\infty < x < +\infty$.

C'è un altro punto che richiede di essere considerato. Ci aspetteremmo che una buona soluzione del problema sarebbe stabile rispetto alle condizioni iniziali, nel senso che una piccola variazione delle condizioni iniziali dovrebbe produrre una piccola variazione nella soluzione. E' come dice che $u(x, t)$ dovrebbe esser continuo per $t \geq 0$. Abbiamo già visto che lo è per $t > 0$, dobbiamo allora solo verificare cosa accade in un punto $u(x_0, 0)$, con $-\infty < x_0 < +\infty$. Operando il cambiamento di variabile (5.5) si ha

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2\xi\sqrt{t}) \exp(-\xi^2) d\xi ,$$

da cui

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x_0, t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + 2\xi\sqrt{t}) \exp(-\xi^2) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x_0 + 2\xi\sqrt{t}) \exp(-\xi^2) d\xi \\ &= f(x_0) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi = f(x_0) , \end{aligned}$$

dove abbiamo scambiato le operazioni di limite e integrazione per l'uniforme convergenza dell'integrale. ■

L'analisi dell'ultimo esempio porta alla seguente definizione.

DEFINIZIONE 9. *Un problema al bordo è detto **ben posto** se le seguenti tre condizioni sono soddisfatte:*

- (1) *Esiste una soluzione del problema.*
- (2) *La soluzione è unica.*
- (3) *la soluzione dipende continuamente dai dati (iniziali e dalle condizioni al bordo).*

Una discussione sulle condizioni sotto le quali un problema al bordo è ben posto, ci porterebbe molto al di là degli scopi del corso. Vogliamo solo commentare brevemente le tre condizioni della Definizione (9).

Abbiamo già visto che una soluzione del problema di Neumann può essere trovato solo a meno di una costante additiva. Quindi tale problema non è ben posto perché non ammette unicità di soluzione. Hadamard³ ha dato numerosi esempi di problemi nei quali la soluzione non dipende con continuità dai dati. Per assicurare l'esistenza di soluzioni dei problemi, ricordiamo la seguente definizione.

³Jacques hadamard (1865 - 1963), matematico francese.

DEFINIZIONE 10. Il **problema di Cauchy** per un'equazione differenziale alle derivate parziali lineari del secondo ordine

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad (5.6)$$

dove i coefficienti A, B, \dots, G sono funzioni di x ed y , può essere enunciato come segue.

Sia R una regione del piano xy nel quale A, B, \dots, G sono continue. Sia C_0 un arco liscio in R definito dalle equazioni parametriche

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad a < s < b.$$

Determinare una soluzione $u = f(x, y)$ dell'Eq.(5.6) che soddisfi le condizioni

$$u(x(s), y(s)) = \phi(s), \quad e \quad \frac{\partial u(x(s), y(s))}{\partial n} = \psi(s)$$

in qualche intorno della curva C_0 . Le funzioni $x(s)$, $y(s)$, $\phi(s)$ e $\psi(s)$ sono chiamate **dati iniziali** o dati di Cauchy e C_0 è detta **curva iniziale**.

Detto più succintamente, un problema di Cauchy è il seguente: Data una curva liscia C_0 nello spazio dove (x, y, u) sono coordinate cartesiane, esiste una unica soluzione dell'Eq.(5.6) per la quale u_x ed u_y soddisfano valori prescritti su C_0 ? la prima risposta a questo problema fu data da Cauchy e poi, in modo più completo da Kovalevski⁴. Il teorema seguente è un caso particolare del più generale teorema di Cauchy-Kovalevski.

THEOREM 26. Supponiamo che i coefficienti A, B, \dots, G dell'Eq.(5.6) siano funzioni analitiche in una regione R del piano xy contenente l'origine ed essendo $C(x, y) \neq 0$. Siano, inoltre $\phi(s)$ e $\psi(s)$ funzioni analitiche arbitrarie su di un segmento dell'asse x . Allora, esiste un intorno R_0 dell'origine ed un'unica funzione analitica $u = f(x, y)$ soluzione dell'Eq.(5.6) in R_0 tale che

$$f(x, 0) = \phi(x) \quad e \quad \frac{\partial f(x, 0)}{\partial y} = \psi(x)$$

sul segmento dell'asse x contenuto in R_0 .

Osserviamo che il Teorema (26) è un teorema locale, cioè l'esistenza ed unicità sono garantiti solo nell'intorno di un punto δ in questo caso l'origine). La richiesta che il coefficiente C non sia su R implica che la curva iniziale (in questo caso un tratto di asse x) non sia una curva caratteristica. Se l'Eq. (5.6) è ellittica in R , questo non è un problema, poiché le equazioni ellittiche non hanno caratteristiche reali. Nel caso di equazioni iperboliche o ellittiche, l'unicità della soluzione è garantita

⁴Sonya Kovalevsky (1850 - 1891), nata in Russia, studiò in Germania ed insegnò in Svezia.

solo in un intorno dei punti della curva iniziale per i quali la tangente non coincide con la direzione di una caratteristica.

Il nostro esempio finale ha a che vedere con la verifica della soluzione di una equazione di Laplace.

ESEMPIO 82. *Dato il problema dell'Esercizio (66), e cioè*

$$\begin{array}{l} E.D.P. \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ P.B. \quad \left. \begin{array}{l} u_x(0, y) = 0, \\ u_x(a, y) = 0, \end{array} \right\} \quad 0 < y < b, \\ \left. \begin{array}{l} u(x, b) = 0, \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{a} \end{array} \right\} \quad 0 < x < a, \end{array}$$

verificare la soluzione

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi b} (b - y) + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{a} x \sinh \frac{2n\pi}{a} (b - y)}{(1 - 4n^2) \sinh \frac{2n\pi b}{a}}. \quad (5.7)$$

SOLUZIONE 82. *Per semplificare la notazione poniamo $\omega_n = 2n\pi/a$. Si ha*

$$u_x(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n \sin \omega_n x \sinh \omega_n (b - y)}{(1 - 4n^2) \sinh \omega_n b}. \quad (5.8)$$

Consideriamo il termine

$$\frac{\sinh \omega_n (b - y)}{\sinh \omega_n b} \quad (5.9)$$

che varia tra zero ed uno qualunque sia n . Ricordando la definizione di seno iperbolico si ha che

$$\sinh \omega_n (b - y) < \frac{1}{2} \exp [\omega_n (b - y)],$$

mentre, d'altra parte

$$\sinh \omega_n b \geq \frac{1}{2} [1 - \exp(-2b)] \exp(\omega_n b),$$

da cui

$$\frac{\sinh \omega_n (b - y)}{\sinh \omega_n b} \leq \frac{\exp(-\omega_n y)}{1 - \exp(-2b)}.$$

Allora, per ogni y_0 fissato, $0 < y_0 < b$ la serie di costanti positive

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\exp(-\omega_n y)}{1 - \exp(-2b)}$$

converge δ uniformemente) per il criterio del rapporto. Quindi, per il criterio di Abel (vedi sotto) la serie (5.8) è uniformemente convergente

per tutti gli $x \in (0, a)$ e tutti gli $y \in (0, b)$. Questo, non solo stabilisce la convergenza della serie che esprime u_x , ma esprime anche la convergenza uniforme di $u(x, y)$ nell'Eq. (5.7) per tutti gli $y \in (0, b)$.

PROPOSIZIONE 1 (Test di Abel). ⁵Sia data la serie $\sum \phi_n(x)$ e la successione di funzioni $\{\psi_n(x)\}$, dove tutte le funzioni sono definite per $x \in [a, b]$. Se $\sum \phi_n(x)$ converge uniformemente per $a \leq x \leq b$, e per ogni valore fissato $x_0 \in [a, b]$, la successione $\{\psi_n(x_0)\}$ è reale e monotona (sia non crescente che non decrescente) ed inoltre $|\psi_n(x)| < M$ per ogni n ed ogni $x \in [a, b]$, allora la serie $\sum \phi_n(x) \psi_n(x)$ è uniformemente convergente in $[a, b]$.

In modo simile si può mostrare che la serie corrispondente a u_{xx} converge uniformemente in x per ogni $y \in (0, b)$. Inoltre, u_{yy} converge uniformemente in y per ogni $x \in (0, a)$ poiché anche u_{yy} contiene il termine (5.9). Rimane da esaminare la derivata parziale rispetto ad y . Si ha

$$u_x(x, t) = -\frac{2}{\pi b} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n \cos \omega_n x \cosh \omega_n (b-y)}{(1-4n^2) \sinh \omega_n b}. \quad (5.10)$$

Poiché si ha

$$\frac{\cosh \omega_n (b-y)}{\sinh \omega_n b} \leq \frac{2 \exp(-\omega_n y)}{1 - \exp(-2b)},$$

usando la stessa argomentazione adoperata sopra, la serie (5.10) è anch'essa uniformemente convergente per $0 < x < a$, $0 < y < b$. Quindi, la soluzione (5.7) è derivabile termine a termine e possiamo verificare che è armonica nel rettangolo aperto $(0, a) \times (0, b)$. ■

5.1. Esercizi.

(1) Applicare il criterio del rapporto per mostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \exp\left(-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t_0\right)$$

è convergente per tutti i t_0 , $0 < t_0 < +\infty$.

(2) Mostrare che

$$\sinh \omega_n (b-y) < \frac{1}{2} \exp[\omega_n (b-y)].$$

(3) Verificare che

$$\sinh \omega_n b \geq \frac{1}{2} [1 - \exp(-2b)] \exp(\omega_n b).$$

(4) Applicare il criterio del rapporto alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\exp(-\omega_n y)}{1 - \exp(-2b)}$$

⁵Niels Abel (1802-1829) matematico norvegese.

dove $y \in (0, b)$ e $\omega_n = 2n\pi/a$, per mostrare che la serie converge.

- (5) Usare un argomento simile a quello usato nel testo per mostrare che la serie che rappresenta u_{xx} , nell'Esempio (82) converge uniformemente in x per ogni y fissato.
- (6) Verificare che

$$\frac{\cosh \omega_n (b - y)}{\sinh \omega_n b} \leq \frac{2 \exp(-\omega_n y)}{1 - \exp(-2b)}$$

- (7) Mostrare che la soluzione data nell'Eq.(5.7) rappresenta una funzione armonica nella regione aperta $(0, a) \times (0, b)$.
- (8) Dato il problema dell'Es. 4.2.2 e cioè

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad & u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < b, \\ P.B. \quad & u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & 0 < y < b, \\ & u(x, b) = 0, \quad u(x, 0) = f(x) & 0 < x < \pi, \end{aligned}$$

verificare la soluzione

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sinh n(b-y)}{\sinh nb} \int_0^{\pi} f(s) \sin ns \, ds,$$

supponendo che $f(x)$ sia continua e $f'(x)$ continua a tratti in $(0, \pi)$ e che $f(0) = f(\pi) = 0$.

- (9) Dato il problema dell'Esempio 4.4.1,

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad & u_t = k u_{xx}, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ P.B. \quad & u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ C.I. \quad & u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L, \end{aligned}$$

verificare la soluzione

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x \exp(-kn^2\pi^2 t/k) \int_0^L f(s) \sin \frac{n\pi}{L} s \, ds$$

e dire sotto quali condizioni il problema è ben posto.

- (10) Il caso di una corda infinita su cui agisce una forza esterna e soggetta a condizioni iniziali, porta al seguente problema

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad & u_{tt} = a^2 u_{xx} + \phi(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ C.I. \quad & u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) & -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

La soluzione è data da

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) \, d\xi \\ & + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \phi(\xi) \, d\xi \, d\tau. \end{aligned}$$

Verificare la soluzione.

- (11) Nei punti del piano
- $(x, y) \neq (x_0, y_0)$
- , la funzione

$$u(x, y) = \log \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

è detta *soluzione fondamentale* dell'equazione di Laplace nel piano. Verificare questa soluzione.

- (12) Studiare la convergenza uniforme dell'integrale improprio

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} dt, \quad x > 0.$$

Mostrare che l'integrale improprio

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \cos xt dt,$$

converge per tutti gli x .

- (13) La
- funzione errore*
- $\operatorname{erf}(x)$
- è definita come segue

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi.$$

Provare le seguenti proprietà della funzione

(a) $\operatorname{erf}(\infty) = 1$

(b) $|\operatorname{erf}(x)| \leq 1$

(c) $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$

(d) $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$ (**Sugg:** Espandere l'integrale

della definizione in serie di Mac Laurin)

- (14) Dimostrare che se una funzione è assolutamente integrabile su di un intervallo, allora è limitata sullo stesso intervallo.

- (15) Considerare la funzione

$$y(x, t) = xe^{-x^2t}, \quad t > 0.$$

(a) Mostrare che $y(x, t)$ è assolutamente integrabile per $0 < x < +\infty$

(b) Mostrare che $y(x, t)$ è limitata per $0 < x < +\infty$

(c) Tracciare il grafico della funzione per $t = 1$

- (16) Il seguente problema mal posto è dovuto ad Hadamart.

$$E.D.P. \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0,$$

$$P.B. \quad u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$u_y(x, 0) = \frac{1}{n} \sin nx \quad -\infty < x < +\infty.$$

la sua soluzione è

$$u(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin nx \sinh ny.$$

(a) Verificare la soluzione.

(b) Spiegare perché il problema non è ben posto.

(17) Considerare il seguente problema

$$E.D.P. \quad u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

$$C.I. \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases},$$

dove u_0 è costante.

(a) Mostrare che la soluzione può essere scritta come

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-(1+x)/2\sqrt{t}}^{(1-x)/2\sqrt{t}} \exp(-\xi^2) d\xi \\ &= \frac{u_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{1+x}{2\sqrt{t}} \right) \right]. \end{aligned}$$

(b) Verificare la soluzione.

(c) Calcolare $u(1, t)$.

(d) Determinare se il problema è ben posto o meno.

CHAPTER 8

Problemi al bordo in altri sistemi di coordinate

1. Coordinate Polari

Tutte le volte che una regione ha simmetria circolare, c'è usualmente, un vantaggio nell'usare le **coordinate polari**.

Ricordiamo che la relazione tra i due sistemi di coordinate è la seguente:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x}, \\ x &= \rho \cos \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \\ y &= \rho \sin \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.\end{aligned}$$

Ricordiamo ancora che la funzione \arctan ha come immagine $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e per ritrovare i punti del piano che sono nel secondo e terzo quadrante si tratta di vedere i segni rispettivi delle componenti x e y . Dalle ultime due relazioni, calcolando le derivate parziali si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \rho} &= \cos \theta, & \frac{\partial y}{\partial \rho} &= \sin \theta, \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -\rho \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= \rho \cos \theta.\end{aligned}$$

Se $u(x, y)$ è una funzione di classe C^2 della coppia di variabili (x, y) , allora per la regola di derivazione composta si ha

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta. \quad (1.1)$$

e segue che

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} (\cos \theta) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} (\sin \theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} (\sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} (\cos \theta),\end{aligned}$$

poiché gli altri due termini sono zero. Per calcolare il termine $\partial/\partial \rho (\partial u/\partial x)$ osserviamo che l'Eq.(1.1) non si applica solo alla $u(x, y)$, ma ad ogni funzione differenziabile della x e della y . Possiamo, infatti,

scrivere la (1.1) simbolicamente come

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial y} \sin \theta .$$

Conseguentemente

$$\frac{\partial u_x}{\partial \rho} = u_{xx} \cos \theta + u_{xy} \sin \theta ,$$

e

$$\frac{\partial u_y}{\partial \rho} = u_{yx} \cos \theta + u_{yy} \sin \theta .$$

Quindi,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = u_{xx} \cos^2 \theta + 2u_{xy} \sin \theta \cos \theta + u_{yy} \sin^2 \theta ,$$

assumendo che $u_{xy} = u_{yx}$, come possiamo fare perché le funzioni sono due volte differenziabili con continuità. In modo del tutto simile si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= u_{xx} \sin^2 \theta - 2u_{xy} \sin \theta \cos \theta + u_{yy} \cos^2 \theta \\ &\quad - \frac{1}{\rho} u_x \cos \theta - \frac{1}{\rho} u_y \sin \theta , \end{aligned}$$

e poiché

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} u_x \cos \theta + \frac{1}{\rho} u_y \sin \theta ,$$

si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} . \quad (1.2)$$

Abbiamo così ottenuto il Laplaciano sia in coordinate cartesiane che polari. Se u non dipende da θ (simmetria circolare) il Laplaciano in coordinate polari assume la forma più semplice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) . \quad (1.3)$$

Osserviamo che le equazioni (1.2) e (1.3) devono essere dimensionalmente corrette. Per esempio se $u = [T]$ e $[x] = [y] = L$, allora $[u_{xx}] = [u_{yy}] = T/L^2$. Quindi ogni termine del Laplaciano in coordinate polari deve avere la stessa dimensione. Ricordando che gli angoli sono espressi in radianti (che sono a-dimensionali) è facile verificare la (1.2).

ESEMPIO 83. *Trovare la temperatura di stato stazionario in un disco metallico di raggio c , se la temperatura sul bordo è data dalla funzione $f(\theta)$.*

SOLUZIONE 83. Osserviamo subito che dobbiamo ipotizzare che la funzione f sia liscia a tratti ed ovviamente periodica di periodo 2π . Inoltre deve essere $u(\rho, -\pi) = u(\rho, \pi)$ e $u_\theta(\rho, -\pi) = u_\theta(\rho, \pi)$. Queste restrizioni sono necessarie se vogliamo che la temperatura sia univocamente determinata. Si ha allora il problema

$$\begin{aligned} \text{E.D.P.} \quad & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < \rho < c, \quad -\pi < \theta \leq \pi, \\ \text{C.B.} \quad & u(c, \theta) = f(\theta), \quad -\pi < \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

Sembrerebbe che non avessimo sufficienti condizioni al bordo per risolvere il problema, ma il fatto che la temperatura del corpo debba essere limitata fornisce ulteriori informazioni al problema. Risolviamo il problema col metodo della separazione delle variabili, assumendo che

$$u(\rho, \theta = R) = R(\rho) \Theta(\theta) .$$

Si ha:

$$\frac{\Theta}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{R}{\rho^2} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0 .$$

Dividendo per $R\Theta/\rho^2$, si ha

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Abbiamo scelto la costante uguale a n^2 per assicurarci che Θ e quindi $u(R, \Theta)$ siano periodiche di periodo 2π in θ . Scelta, questa, dettata dalla natura del problema.

Le equazioni

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + n^2\Theta = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

hanno soluzioni

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta .$$

l'equazione differenziale della funzione R può essere scritta nella forma

$$\rho^2 \frac{d^2 R_n}{d\rho^2} + \rho \frac{dR_n}{d\rho} - n^2 R_n = 0 . \quad (1.4)$$

Cominciamo col risolvere il caso $n = 0$. usando il metodo di riduzione d'ordine si ha

$$R_0(\rho) = c_1 \log \rho + c_2 .$$

Se vogliamo che la soluzione rimanga limitata dobbiamo prendere $c_1 = 0$. Quindi la soluzione corrispondente ad $n = 0$ è una costante che possiamo scegliere uguale ad uno. Le equazioni (1.4) sono equazioni di Eulero-Cauchy, le cui soluzioni sono

$$R_n(\rho) = A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

nelle quali dobbiamo scegliere $B_n = 0$ se vogliamo che le R_n (e quindi $u(\rho, \theta)$) rimangano limitate. Senza perdita di generalità possiamo supporre che $A_n = 1$. Si ha allora che le

$$u_n(\rho, \theta) = (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \rho^n$$

sono funzioni limitate e periodiche, ognuna delle quali soddisfa l'equazione differenziale data. Per soddisfare la condizione al bordo prendiamo

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \rho^n . \quad (1.5)$$

Come ormai noto, la condizione al bordo $u(c, \theta) = f(\theta)$ implica che

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi c^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ns \, ds , \quad n = 0, 1, 2, \dots , \\ b_n &= \frac{1}{\pi c^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ns \, ds , \quad n = 1, 2, \dots . \end{aligned} \quad (1.6)$$

Poiché la funzione $f(\theta)$ deve essere rappresentata in serie di Fourier, la funzione deve soddisfare le condizioni necessarie per tale rappresentazione. ■

Vogliamo qui osservare che $\rho = 0$ è un punto singolare regolare per l'Equazione di Eulero-Cauchy (1.4). Ne nasce una domanda naturale: qual'è il valore della soluzione dell'Esempio (83) per $\rho = 0$? Dall'Eq.(1.5) si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} u(\rho, \theta) = \frac{1}{2}a_0 ,$$

ma è

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \, ds$$

che è il *valor medio* della funzione f sul bordo $\rho = c$. in altre parole, il valore della funzione armonica al centro del cerchio è la media dei suoi valori sulla circonferenza bordo. Possiamo vedere questo fatto in altro modo, ottenendo, allo stesso tempo una forma della soluzione più facile da usare per la verifica della soluzione. Se sostituiamo i coefficienti a_n e b_n come dati dalla (1.6) nell'Eq.(1.5), si ha

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^n \cos n(\theta - s) \right] ds . \quad (1.7)$$

Poniamo $(\rho/c) = r$, $\theta - s = \phi$ e scriviamo

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\phi &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(re^{i\phi})^n + (re^{-i\phi})^n] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - re^{i\phi}} + \frac{1}{1 - re^{-i\phi}} - 2 \right] , \end{aligned}$$

poiché $|r \exp(\pm i\phi)| < 1$. Con un po' di algebra l'ultima espressione può essere scritta nella forma

$$\frac{1}{2} \frac{2r \cos \phi - 2r^2}{1 - 2r \cos \phi + r^2}$$

così che

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(c^2 - \rho^2) f(s)}{c^2 - 2\rho c \cos(\theta - s) + \rho^2} ds, \quad \rho < c. \quad (1.8)$$

Questa forma della soluzione è chiamata **integrale di Poisson**. L'integrale di Poisson è la soluzione del problema di Dirichlet all'interno di una regione circolar.. Sebbene l'integrale di Poisson dia la soluzione in forma chiusa, ci sono grandi difficoltà a risolvere esplicitamente l'integrale eccetto che in casi molto particolari.

Lo studio delle funzioni armoniche in regioni circolari può dare altre proprietà utili. Cominciamo con una versione del teorema della divergenza noto come teorema di Green¹,

$$\iint_{\partial V} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = \iiint_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV,$$

che vale per funzioni f e g , che sono due volte differenziabili in una regione V e sul suo bordo ∂V . Se f è armonica in V e $g = 1$, si ha

$$\iint_{\partial V} \frac{\partial f}{\partial n} dS = 0. \quad (1.9)$$

Nel piano l'equazione si riduce a

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial n} dS = 0. \quad (1.10)$$

Quindi una condizione necessaria per l'esistenza del problema di Neumann

$$E.D.P. \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < \rho < c, \quad -\pi < \theta \leq \pi,$$

$$C.B. \quad u_\rho(c, \theta) = f(\theta), \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

è che

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 0,$$

cioè, il valor medio della derivata normale sul bordo deve essere nulla.

Se C è una circonferenza di raggio r e centro (x_0, y_0) , allora l'Eq.(1.10) può essere scritta come

$$\int_C \frac{\partial}{\partial r} [f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)] r d\theta = 0,$$

¹George Green (1793 - 1841), matematico inglese.

o

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta = 0 .$$

Ne segue che l'integrale non dipende da r e quindi ha lo stesso valore qualunque sia r , in particolare per $r = 0$. In questo caso l'integrale vale $2\pi f(x_0, y_0)$. Ne segue che

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta .$$

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema

THEOREM 27. *Sia R una regione circolare di raggio r centrata nel punto (x_0, y_0) , nella quale la funzione f è armonica. Allora f ha la proprietà del valor medio*

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta . \quad (1.11)$$

Il teorema può essere facilmente esteso a dimensioni superiori.

Nel prossimo esempio trattiamo un problema apparentemente tridimensionale

ESEMPIO 84. *Risolvere il seguente problema la bordo, usando le coordinate cilindriche*

$$\begin{array}{ll} E.D.P. & \nabla^2 u = 0 , \quad -\pi < \theta < \pi , \quad b < \rho < c , \quad -\infty < z < +\infty , \\ C.B. & u(b, \theta, z) = f(\theta) , \quad -\pi < \theta < \pi , \quad -\infty < z < +\infty , \\ & u(c, \theta, z) = 0 \quad -\pi < \theta < \pi , \quad -\infty < z < +\infty . \end{array}$$

SOLUZIONE 84. *Le condizioni al bordo ci dicono che u è indipendente da z , quindi, in realtà, questo problema tridimensionale si riduce ad un problema bidimensionale. Usando la separazione delle variabili, si ottengono le seguenti equazioni differenziali e condizioni al bordo*

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + n^2 \Theta = 0 , \quad \Theta(-\pi) = \Theta(\pi) , \quad \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi) , \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

$$\rho^2 \frac{d^2 R_n}{d\rho^2} + \rho \frac{dR_n}{d\rho} - n^2 R_n = 0 , \quad R_n(c) = 0 .$$

Le soluzioni di questi problemi sono

$$\Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta ,$$

e

$$R_n(\rho) = -(\rho/c)^n + (c/\rho)^n , \quad n = 1, 2, \dots .$$

Il caso $n = 0$ fornisce la soluzione

$$R_0(\rho) = \log(\rho/c) .$$

Costruendo la serie soluzione, si ha

$$u(\rho, \theta) = A_0 \log(\rho/c) + \sum_{n=1}^{\infty} [(c/\rho)^n - (\rho/c)^n] (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) .$$

L'uso della condizione al bordo non-omogenea fornisce l'equazione

$$u(b, \theta) = f(\theta) = A_0 \log(b/c) + \sum_{n=1}^{\infty} [(c/b)^n - (b/c)^n] (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) .$$

Questa è la rappresentazione di Fourier della funzione $f(\theta)$, quindi, con la sostituzione

$$\frac{1}{2}a_0 = A_0 \log(b/c) , \quad a_n = [(c/b)^n - (b/c)^n] A_n , \quad b_n = [(c/b)^n - (b/c)^n] B_n ,$$

si ha come risultato finale

$$u(\rho, \theta) = \frac{\log(\rho/c)}{2 \log(b/c)} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(c/\rho)^n - (\rho/c)^n}{(c/b)^n - (b/c)^n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (1.12)$$

dove a_0, a_n, b_n sono i coefficienti di Fourier dello sviluppo di $f(\theta)$. ■

1.1. Esercizi.

- (1) Risolvere l'equazione

$$\rho^2 \frac{d^2 R_n}{d\rho^2} + \rho \frac{dR_n}{d\rho} = 0$$

usando il metodo di riduzione d'ordine.

- (2) Risolvere l'equazione di Eulero-Cauchy

$$\rho^2 \frac{d^2 R_n}{d\rho^2} + \rho \frac{dR_n}{d\rho} - n^2 R_n = 0 , \quad n = 1, 2, \dots$$

- (3) Mostrare che

$$\frac{1}{1 - re^{i\phi}} + \frac{1}{re^{-i\phi}} - 2 = \frac{2r \cos \phi - 2r^2}{1 - 2r \cos \phi + r^2} .$$

- (4) Mostrare che le soluzioni delle equazioni

$$\rho^2 \frac{d^2 R_n}{d\rho^2} + \rho \frac{dR_n}{d\rho} - n^2 R_n = 0 , \quad R_n(c) = 0 ,$$

sono

$$R_n(\rho) = -(\rho/c)^n + (c/\rho)^n , \quad n = 1, 2, \dots .$$

- (5) Trovare la soluzione dell'Esempio (83) se $f(\theta) = u_0$, costante. Il risultato è in accordo con la fisica del problema? Spiegare.

- (6) Trovare la soluzione dell'Esempio (83)

(a) Se

$$f(\theta) = \begin{cases} 0 , & -\pi < \theta < 0 \\ 100 , & 0 < \theta < \pi . \end{cases}$$

(b) Calcolare $u(c, 0)$, $u(c, \pi/2)$, $u(c, \pi)$, $u(c, -\pi)$ e $u(0, 0)$.

(Sugg.: usare l'integrale di Poisson.)

- (7) Modificare l'Esempio (84) in modo tale che la superficie esterna sia isolata e risolvere il problema risultante. Quali restrizioni vanno messe su $f(\theta)$?

- (8) Trovare la funzione armonica nella regione $1 < \rho < c$, $0 < \theta < \pi$, se $u = u_0$ per $\rho = cm$ e tutti gli altri bordi sono tenuti a zero.
- (9) Trovare la temperatura stazionaria nel quadrante $1 < \rho < c$, $0 < \theta < \pi/2$, se i bordi $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$ sono tenuti a zero, il bordo $\rho = c$ è isolato ed il restante bordo è tenuto a temperatura costante u_0 .
- (10) Trovare la temperatura stazionaria nel quadrante $1 < \rho < c$, $0 < \theta < \pi/2$, se la temperatura dei bordi $\rho = 1$ e $\rho = c$ è tenuta a zero e $f(\theta)$ rispettivamente, mentre gli altri due bordi sono isolati.
- (11) Trovare la temperatura stazionaria nella regione non limitata $\rho > c$ se $u(c, \theta) = f(\theta)$, $-\pi < \theta \leq \pi$.
- (12) Data una regione ad anello $a < \rho < b$ si ha che le due facce sono isolate, il bordo interno $\rho = a$ è tenuto a temperatura 100° , mentre quella esterna $\rho = b$ è tenuta a 0° . Trovare la distribuzione di temperatura nella regione.
- (13) Risolvere il seguente problema

$$\begin{aligned}
 E.D.P. \quad & \nabla^2 u = 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 < \rho < c, \\
 C.B. \quad & u(c, \theta) = 100, \quad 0 < \theta < \pi/4, \\
 & u(c, \theta) = 0, \quad \pi/4 < \theta < 2\pi.
 \end{aligned}$$

- (14) Trovare la temperatura stazionaria in un settore di 45° del cerchio unitario se la temperatura dei due segmenti è tenuta a zero, mentre quella della porzione curva del bordo è data da $f(\theta)$.
- (15) Data l'equazione stazionaria della membrana

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dz}{d\rho} \right) = 0, \quad 1 < \rho < \rho_0, \quad z(1) = 0, \quad z(\rho_0) = z_0$$

- (a) Risolvere l'equazione.
 (b) interpretare fisicamente il problema.
- (16) Nell'Esempio (84) esaminare la soluzione quando $b \rightarrow 0$. Provare, poi, a risolvere il problema per $b = 0$ con la separazione delle variabili.
- (17) Dato il seguente problema

$$\begin{aligned}
 E.D.P. \quad & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad -\pi < \theta \leq \pi, \\
 C.B. \quad & u(1, \theta) = 100, \quad 0 < \theta \leq \pi, \\
 & u(1, \theta) = 0, \quad \pi < \theta < 2\pi,
 \end{aligned}$$

mostrare che la soluzione è

$$u(\rho, \theta) = \frac{100}{\pi} \arctan \left[\frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2} \cot(\pi - \theta) \right].$$

(18) la soluzione dell'Eq.(1.8) è per un problema di Dirichlet interno. Mostrare che la soluzione del problema di Dirichlet esterno è:

$$\begin{aligned} u(\rho, \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{\rho} \right)^n \cos n(\theta - s) \right] ds, \quad \rho > c, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\rho^2 - c^2)}{c^2 - 2\rho c \cos(\theta - s) + \rho^2} f(s) ds, \quad \rho > c. \end{aligned}$$

(19) Nell'Esercizio 17 variare la regione da $0 < \rho < 1$ a $\rho > 1$, lasciando inalterate le altre condizioni. Trovare la soluzione limitata del problema.

2. Coordinate cilindriche; funzioni di Bessel

Prima di considerare le equazioni d'onda e di diffusione in coordinate polari e cilindriche, è necessario avere una maggior conoscenza delle funzioni di Bessel, che è quello che cercheremo di fare in questo paragrafo.

Ricordiamo come sono definite le **coordinate cilindriche in rapporto a quelle cartesiane**.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$

L'equazione di Laplace in coordinate cilindriche è data da

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (2.1)$$

Applicando, come al solito, il metodo di separazione delle variabili ed assumendo quindi

$$u(\rho, \theta, z) = R(\rho) \Theta(\theta) Z(z),$$

sostituendo nell'equazione si ha

$$\frac{\Theta Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{RZ}{\rho^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + R\Theta \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0,$$

e dividendo per $R\Theta Z/\rho^2$ si ha

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{\rho^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}.$$

Poiché il membro sinistro dell'equazione è indipendente da θ , l'equazione può essere soddisfatta solo se entrambi i membri sono costanti. Da cui

$$-\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

mentre una seconda separazione delle variabili da

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{n^2}{\rho^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\lambda^2 .$$

Abbiamo immediatamente indicato la prima costante come n^2 perché ciò forza Θ e quindi u ad essere periodica di periodo 2π in θ . Abbiamo chiamato la seconda costante genericamente $-\lambda^2$ perché in realtà non vogliamo che Z e quindi u sia periodica in z .

Separando le variabili, abbiamo quindi ridotto l'equazione di Laplace nelle seguenti tre equazioni lineari ordinarie

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \lambda^2 Z = 0 , \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + n^2 \Theta = 0 , \quad n = 0, 1, 2, \dots , \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R = 0 . \quad (2.4)$$

Le soluzioni delle prime due equazioni sono immediate. Esse sono, rispettivamente

$$Z(\lambda z) = Ae^{\lambda z} + Be^{-\lambda z} \quad (2.5)$$

e

$$\Theta(n\theta) = C \cos n\theta + D \sin n\theta . \quad (2.6)$$

L'equazione (2.4) è una equazione di Bessel che ha come soluzioni indipendenti le funzioni $J_n(\lambda\rho)$ e $Y_n(\lambda\rho)$. La prima di queste equazioni è chiamata **funzione di Bessel del primo tipo di ordine n** , la seconda è la **funzione di Bessel del secondo tipo di ordine n** . ne segue che la soluzione generale dell'Eq.(2.4) può essere scritta come

$$R_n(\lambda\rho) = EJ_n(\lambda\rho) + FY_n(\lambda\rho) . \quad (2.7)$$

Le soluzioni dell'equazione di Laplace in coordinate cilindriche sono date dal prodotto delle equazioni (2.5), (2.6) e (2.7). Una funzione u che soddisfa l'equazione $\nabla^2 u = 0$ è detta *funzione armonica*, i prodotti di cui sopra sono anche chiamati **armoniche cilindriche**. Poiché $J_n(\lambda\rho)$ è definita per $\rho = 0$ mentre $Y_n(\lambda\rho)$ non lo è, va scelta la costante F uguale a zero se vogliamo che la soluzione sia limitata nell'origine. Dovremmo, inoltre, scegliere $A = 0$ se si richiede che $\lim_{z \rightarrow \infty} |u|$ esista e $\lambda \geq 0$.

Consideriamo più in dettaglio le funzioni J_n pensate come funzioni della variabile x , si ha

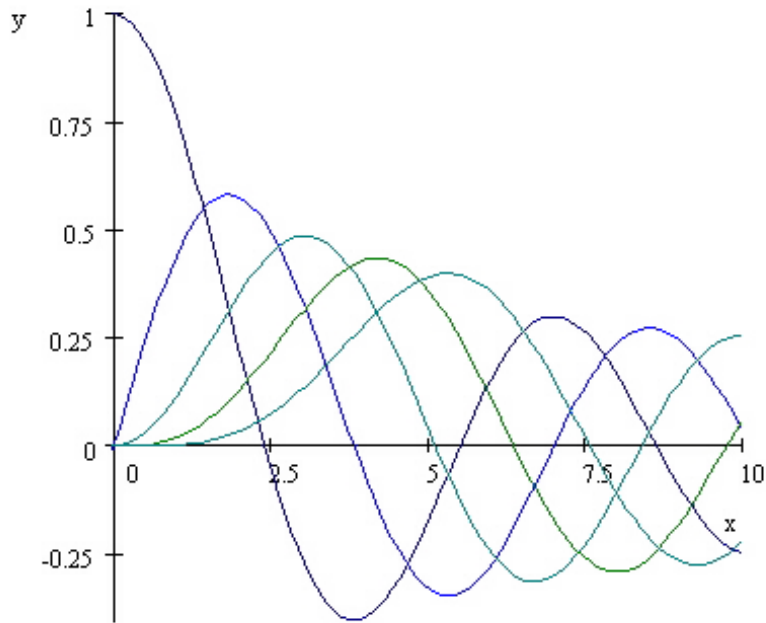
$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m+n} , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

come è stato trovato nel Paragrafo 1.5 . Esamineremo $J_0(x)$ e $J_1(x)$ in dettaglio. dall'Eq.(2.8) si ha

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots ,$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots .$$

Come si vede J_0 è una funzione pari, mentre J_1 è una funzione dispari. Non solo, le due funzioni, pur non essendo periodiche, sono oscillanti con una infinità di zeri che distano tra di loro quasi 2π . In realtà, la distanza tra due zeri successivi tende a 2π quando $x \rightarrow +\infty$. Inoltre, l'ampiezza delle oscillazioni decresce al crescere di x .



Bessel $J_\nu(z)$, $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$

nel risolvere i problemi al bordo, gli zeri delle $J_n(x)$, cioè le radici di $J_n(x) = 0$ sono importanti. Un'altra relazione utile è la seguente

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) , \quad n = 1, 2, \dots , \quad (2.9)$$

che può essere ottenuta dall'Eq.(2.8). In forma differenziale l'Eq.(2.9) diventa

$$d [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) dx$$

ed integrando tra 0 e c ($c > 0$), si ha

$$x^n J_n(x)|_0^c = \int_0^c x^n J_{n-1}(x) dx ,$$

o

$$\int_0^c x^n J_{n-1}(x) dx = c^n J_n(c) .$$

Per $n = 1$ questa si riduce a

$$\int_0^c x J_0(x) dx = c J_1(c) , \quad (2.10)$$

risultato che useremo più avanti.

2.0.1. *Ortogonalità delle funzioni di Bessel.* le funzioni di Bessel di primo tipo soddisfano, sotto certe condizioni, una **relazione di ortogonalità**. L'equazione di Bessel di ordine n può essere scritta come

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} + (\lambda^2 x^2 - n^2) u = 0 . \quad (2.11)$$

Una soluzione particolare di questa equazione è $u = J_n(\lambda x)$. In modo analogo, data l'equazione

$$x^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + x \frac{dv}{dx} + (\mu^2 x^2 - n^2) v = 0 \quad (2.12)$$

si ha che la soluzione è $v = J_n(\mu x)$.

Moltiplicando adesso la (2.11) per v/x e la (2.12) per u/x e sottraendo, si ha

$$vx \frac{d^2 u}{dx^2} + v \frac{du}{dx} + (\lambda^2 x^2 - n^2) \frac{uv}{x} - ux \frac{d^2 v}{dx^2} - u \frac{dv}{dx} - (\mu^2 x^2 - n^2) \frac{uv}{x} = 0 .$$

Questa equazione può essere scritta come

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - \mu^2) xuv &= ux \frac{d^2 v}{dx^2} - vx \frac{d^2 u}{dx^2} + u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{dx} \left[x \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right] . \end{aligned}$$

Per $c > 0$ si ha

$$(\lambda^2 - \mu^2) \int_0^c x u v dx = \left[x \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right]_0^c ,$$

o, rimpiazzando u e v con i loro valori $J_n(\lambda x)$ e $J_n(\mu x)$ si ha

$$(\lambda^2 - \mu^2) \int_0^c x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = x [\mu J_n(\lambda x) J_n'(\mu x) - \lambda J_n(\mu x) J_n'(\lambda x)] \Big|_0^c ,$$

da cui si ottiene

$$\int_0^c x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = \frac{c}{(\lambda^2 - \mu^2)} [\mu J_n(\lambda c) J_n'(\mu c) - \lambda J_n(\mu c) J_n'(\lambda c)] .$$

Ne segue che

$$\int_0^c x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = 0 ,$$

sempre che $\lambda \neq \mu$ e

$$\mu J_n(\lambda c) J_n'(\mu c) - \lambda J_n(\mu c) J_n'(\lambda c) = 0 . \quad (2.13)$$

L'Eq.(2.13) vale se λc e μc sono radici diverse di

- (1) $J_n(x) = 0$, perché in tal caso $J_n(\lambda c) = 0$ e $J_n(\mu c) = 0$;
- (2) $J'_n(x) = 0$, perché in tal caso $J'_n(\lambda c) = 0$ e $J'_n(\mu c) = 0$;
- (3) $hJ_n(x) + xJ'_n(x) = 0$, dove $h > 0$.

Per vedere questa ultima condizione, notare che se λc e μc sono radici diverse di $hJ_n(x) + xJ'_n(x) = 0$, ne segue che

$$hJ_n(\lambda c) + \lambda cJ'_n(\lambda c) = 0, \quad \text{e} \quad hJ_n(\mu c) + \lambda cJ'_n(\mu c) = 0 .$$

Moltiplicando la prima per $\mu J'_n(\mu c)$ e la seconda per $\lambda J'_n(\lambda c)$ e sottraendo, si ha

$$h [\mu J_n(\lambda c) J'_n(\mu c) - \lambda J_n(\mu c) J'_n(\lambda c)] = 0$$

o

$$\mu J_n(\lambda c) J'_n(\mu c) - \lambda J_n(\mu c) J'_n(\lambda c) = 0 ,$$

che è identica alla (2.13). Infine, osserviamo che se $h = 0$ nella condizione 3), questa si riduce alla 2).

Abbiamo quindi mostrato che le funzioni di Bessel $J_n(\lambda x)$ e $J_n(\mu x)$ sono ortogonali nell'intervallo $0 < x < c$ con *funzione peso* x , se $\lambda \neq \mu$ e vale una delle condizioni 1), 2) o 3).

2.1. Serie di Fourier-Bessel. Vogliamo notare che sebbene l'equazione differenziale di Bessel non soddisfi le condizioni di un sistema di Sturm-Liouville regolare (vedere il Paragrafo 2.2), essa ricade nella classe speciale dei problemi di tipo singolare discussi nel paragrafo 2.7 .Abbiamo infatti dimostrato che le autofunzioni di questo problema singolare di tipo Sturm-Liouville sono ortogonali.

E' possibile dimostrare che le autofunzioni normalizzate che costruiremo in questo paragrafo formano un insieme completo con funzione peso $w(x) = x$ rispetto alla classe delle funzioni lisce a tratti nell'intervallo $(0, c)$. Questo significa che è possibile rappresentare funzioni lisce a tratti con serie di Bessel del primo tipo, chiamate **serie di Fourier-Bessel**.

Siano $c\lambda_j$, $j = 1, 2, 3, \dots$, le radici positive (gli zero) dell'equazione $J_n(\lambda c) = 0$. Queste radici si possono trovare, per ragioni di calcolo, tabulate in varie tavole matematiche. Per esempio, se $n = 0$, allora approssimativamente $c\lambda_1 = 2,405$, $c\lambda_2 = 5,520$, $c\lambda_3 = 8,654$, etc.

Consideriamo adesso la rappresentazione della funzione f nell'intervallo $(0, c)$:

$$f(x) = A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + A_3 J_n(\lambda_3 x) + \dots \quad (2.14)$$

Se vogliamo trovare il valore del coefficiente A_j basta moltiplicare entrambi i membri dell'Eq.(2.14) per $xJ_n(\lambda_j x)$ ed integrare rispetto ad x tra 0 e c . per l'ortogonalità delle funzioni rispetto alla funzione peso

$w(x) = x$ si ha

$$A_j = \frac{\int_0^c x f(x) J_n(\lambda_j x) dx}{\int_0^c x J_n^2(\lambda_j x) dx}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.15)$$

Vogliamo, adesso, calcolare il denominatore dell'espressione sopra. per fare questo, torniamo all'equazione di Bessel di ordine n

$$xu'' + u' + \left(\lambda_j^2 x - \frac{n^2}{x} \right) u = 0 .$$

Una soluzione particolare di questa equazione è $u = J_n(\lambda_j x)$. Moltiplicando per il fattore integrante $2u'x$ si ottiene

$$2x^2 u' u'' + 2(u')^2 x + \left(\lambda_j^2 x - \frac{n^2}{x} \right) 2x u' u = 0 ,$$

o

$$2x u' (x u'' + u') + (\lambda_j^2 x^2 - n^2) 2u u' = 0 . \quad (2.16)$$

Usando il fatto che

$$\frac{d}{dx} (x u')^2 = 2x u' (x u'' + u')$$

e

$$\frac{d}{dx} u^2 = 2u u' ,$$

possiamo scrivere l'equazione differenziale (2.16) nel seguente modo

$$\frac{d}{dx} (x u')^2 + (\lambda_j^2 x^2 - n^2) \frac{d}{dx} u^2 = 0 .$$

Integrando tra 0 e c , si ha

$$\int_0^c d(x u')^2 + \int_0^c (\lambda_j^2 x^2 - n^2) d(u^2) = 0 .$$

Integrando per parti il secondo integrale, si ha

$$(x u')^2 \Big|_0^c + u^2 (\lambda_j^2 x^2 - n^2) \Big|_0^c - 2\lambda_j^2 \int_0^c x u^2 dx = 0 .$$

Ricordando che $u = J_n(\lambda_j x)$, $u' = \lambda_j J_n'(\lambda_j x)$ quest'ultima espressione diventa

$$\lambda_j^2 c^2 [J_n'(\lambda_j c)]^2 + J_n^2(\lambda_j c) (\lambda_j^2 c^2 - n^2) + n^2 J_n^2(0) = 2\lambda_j^2 \int_0^c x J_n^2(\lambda_j x) dx . \quad (2.17)$$

Poiché $J_n(\lambda_j c) = 0$ e $J_n(0) = 0$ per $n = 1, 2, 3, \dots$, l'Eq.(2.17) si riduce a:

$$\int_0^c x J_n^2(\lambda_j x) dx = \frac{c^2}{2} [J_n'(\lambda_j c)]^2 . \quad (2.18)$$

Ne segue che i coefficienti A_j diventano

$$A_j = \frac{2}{c^2 [J_n'(\lambda_j c)]^2} \int_0^c x f(x) J_n(\lambda_j x) dx , \quad j = 1, 2, 3, \dots . \quad (2.19)$$

Possiamo quindi scrivere l'equazione di Fourier-Bessel (2.14) come

$$f(x) = \frac{2}{c^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_j x)}{[J_n'(\lambda_j c)]^2} \int_0^c s f(s) J_n(\lambda_j s) ds .$$

Questa uguaglianza nella rappresentazione di $f(x)$ non va presa alla lettera. Come nel caso della serie di Fourier, questa serie converge al valor medio dove questa ha una discontinuità a salto ed al valore della funzione nei punti di discontinuità. L'equazione (2.18) esprime il **quadrato della norma** delle autofunzioni $J_n(\lambda_j x)$. Quindi, per la norma della funzione si ha

$$\|J_n(\lambda_j x)\| = \frac{c}{\sqrt{2}} J_n'(\lambda_j c) .$$

L'insieme

$$\left\{ \frac{\sqrt{2} J_n(\lambda_1 x)}{c J_n'(\lambda_1 c)}, \frac{\sqrt{2} J_n(\lambda_2 x)}{c J_n'(\lambda_2 c)}, \frac{\sqrt{2} J_n(\lambda_3 x)}{c J_n'(\lambda_3 c)}, \dots \right\}$$

è un insieme ortonormale nell'intervallo $(0, c)$ con funzione peso $w(x) = x$, nel caso in cui i λ_j siano tali che $J_n(\lambda_j c) = 0$.

nel caso che i λ_j siano tali che $h J_n(\lambda_j c) + \lambda_j c J_n'(\lambda_j c) = 0$, risolvendo per $J_n'(\lambda_j c)$ si ha

$$J_n'(\lambda_j c) = -\frac{h}{\lambda_j c} J_n(\lambda_j c) . \quad (2.20)$$

Sostituendo questo valore nella (2.19) si ottiene la seguente formula per i coefficienti della serie di Fourier-Bessel:

$$A_j = \frac{2\lambda_j^2}{(\lambda_j^2 c^2 - n + h^2) J_n^2(\lambda_j c)} \int_0^c x f(x) J_n(\lambda_j x) dx , \quad j = 1, 2, 3, \dots . \quad (2.21)$$

La formula (2.21) non è valida per $j = 1$ nel caso in cui $h = 0$ e $n = 0$. In questo caso l'Eq.(2.20) diventa

$$J_0'(\lambda_j c) = 0 ,$$

si ha, cioè, che $\lambda_j c$ è uno zero della funzione $J_0'(x)$. il primo zero di $J_0'(x)$ si ha per $x = 0$; per cui $\lambda_1 = 0$. D'altra parte $J_0(0) = 1$ ed il

coefficiente dell'integrale (2.21) può essere calcolato usando la regola dell'Hospital. Quindi

$$A_1 = \frac{2}{c^2} \int_0^c x f(x) dx . \quad (2.22)$$

Riassumiamo i vari casi nella seguente lista. Possiamo vedere dalla lista che *la definizione* dei λ_j è una parte importante nella rappresentazione in serie di Fourier-Bessel.

Serie di Fourier Bessel: $f(x) = \sum_{j=1} A_j J_n(\lambda_j x)$

Valori di λ_j che interessano: $J_n(\lambda_j c) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Coefficienti: $A_j = \frac{2}{c^2 [J'_n(\lambda_j c)]^2} \int_0^c x f(x) J_n(\lambda_j x) dx$, $j = 1, 2, 3, \dots$

Valori di λ_j che interessano: $h J_n(\lambda_j c) + \lambda_j c J'_n(\lambda_j c) = 0$, $h \geq 0$, $j = 1, 2, 3, \dots$

Coefficienti: $A_j = \frac{2\lambda_j^2}{(\lambda_j^2 c^2 - n + h^2) J_n^2(\lambda_j c)} \int_0^c x f(x) J_n(\lambda_j x) dx$, $j = 1, 2, 3, \dots$

Valori di λ_j che interessano: $J'_0(\lambda_j c) = 0$,

Coefficienti: $A_1 = \frac{2}{c^2} \int_0^c x f(x) dx$

$$A_j = \frac{2\lambda_j^2}{c^2 J_0^2(\lambda_j c)} \int_0^c x f(x) J_0(\lambda_j x) dx, \quad j = 2, 3, 4, \dots$$

ESEMPIO 85. *Calcolare*

$$\int_0^1 x^3 J_0(x) dx .$$

SOLUZIONE 85. *Usiamo l'integrazione per parti ponendo $u = x^2$ e $v' = x J_0(x)$. Dopo aver ricordato la (2.10), si ha*

$$\int_0^1 x^3 J_0(x) dx = x^3 J_1(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x^2 J_1(x) dx .$$

Applicando la (2.9), si ottiene

$$\int x^2 J_1(x) dx = x^2 J_2(x) .$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 J_0(x) dx &= x^3 J_1(x) - 2x^2 J_2(x) \Big|_0^1 \\ &= J_1(1) - 2J_2(1) . \end{aligned}$$

Inoltre, poiché (vedi Esercizi)

$$J'_n(x) + \frac{n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) ,$$

e

$$J'_n(x) - \frac{n}{x}J_n(x) = -J_{n+1}(x) ,$$

sottraendo quest'ultima equazione dalla precedente si ha

$$\frac{2n}{x}J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) . \quad (2.23)$$

L'equazione (2.23), ponendo $n = 2$ e $x = 1$ da come risultato

$$J_2(1) = 2J_1(1) - J_0(1)$$

da cui segue che

$$\int_0^1 x^3 J_0(x) dx = 2J_0(1) - 3J_1(1) = 0,210 .$$

ESEMPIO 86. Scrivere la serie di Fourier-Bessel della funzione $f(x) = 1$ in termini di $J_0(\lambda_j x)$ nell'intervallo $[0, 1]$, dove i λ_j sono tali che $J_0(\lambda_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots$.

SOLUZIONE 86. Dall'Eq.(2.19) prendendo $n = 0$ e $c = 1$, si ha

$$A_j = \frac{2}{J_1^2(\lambda_j)} \int_0^1 x J_0(\lambda_j x) dx , \quad j = 1, 2, \dots ,$$

e ponendo $s = \lambda_j x$, usando l'Eq.(2.10) si ha

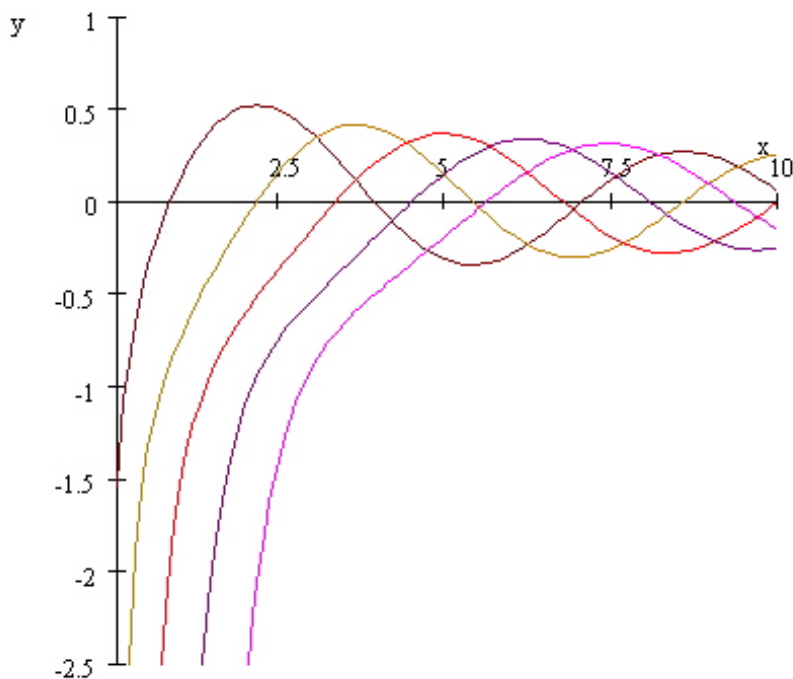
$$A_j = \frac{2}{[\lambda_j J_1(\lambda_j)]^2} \int_0^{\lambda_j} s J_0(s) ds = \frac{2}{J_1(\lambda_j)} .$$

Ne segue che

$$f(x) = 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j x)}{\lambda_j J_1(\lambda_j)} . \quad (2.24)$$

2.2. Funzioni di Bessel di secondo tipo. Concludiamo il paragrafo con un breve escursus sulle funzioni di Bessel di secondo tipo di ordine n . E' la seconda soluzione linearmente indipendente dell'equazione differenziale di Bessel, che può essere ottenuta dalla prima col metodo

di variazione dei parametri. Omettiamo i dettagli dei conti ed esaminiamo in dettaglio solo la funzione $Y_0(x)$.



Bessel $Y_\nu(z)$, $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$

Nel grafico sono riportati i grafici delle funzioni $Y_j(x)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$ nell'intervallo $(0, 10]$. La funzione $Y_0(x)$ è data da

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[J_0(x) \left(\log \frac{x}{2} + \gamma \right) \right] + \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \frac{11x^6}{13824} + \dots \right) \quad (2.25)$$

dove il termine γ è chiamata costante di Eulero. E' un numero irrazionale definito da

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) = 0,577215 .$$

Ciò che è importante notare è che tutte le funzioni di Bessel di secondo tipo contengono il termine $\log(x/2)$. Ne segue che $\lim_{x \rightarrow 0} Y_n(x) = -\infty$. Poiché noi cerchiamo soluzioni limitate dei problemi che affrontiamo, non useremo mai le funzioni di Bessel del secondo tipo. Vogliamo solo ricordare, tuttavia, che queste ultime sono utili nella risoluzione di problemi che coinvolgono onde elettromagnetiche in cavi coassiali.

2.3. Esercizi.

- (1) Ottenere l'equazione (2.1) dall'equazione (1.2).

- (2) Usare il test del rapporto per mostrare che la serie (2.8) che rappresenta la funzione di Bessel di primo tipo di ordine n converge per tutti gli x .
- (3) Usare l'equazione (2.8) per dimostrare le seguenti proprietà
- $J'_0(0) = 0$
 - $J_1(0) = 0$
 - $J_1(-x) = -J_1(x)$
 - $J'_0(x) = -J_1(x)$
 - $xJ'_n(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, \dots$
 - $\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, \dots$
- (4) Verificare che $x = 0$ è un punto singolare regolare dell'equazione differenziale di Bessel (2.11)
- (5) Ottenere l'equazione (2.23)
- (6) trovare la soluzione generale di ognuna delle seguenti equazioni differenziali
- $\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + xy = 0$
 - $4xy'' + 4y' + y = 0$
 - $\frac{d^2y}{dx^2} + ye^x = 0$
- (7) Supponendo che $J_0(\lambda_j) = 0$, provare che
- $\int_0^1 J_1(\lambda_j s) ds = 1/\lambda_j$
 - $\int_0^{\lambda_j} J_1(s) ds = 1$
 - $\int_0^\infty J_1(\lambda_j s) ds = 0$
- (8) Provare che
- $\int_0^x J_0(s) J_1(s) ds = -\frac{1}{2}[J_0(x)]^2$
 - $\int_0^x s^2 J_0(s) J_1(s) ds = \frac{1}{2}x^2 [J_1(x)]^2$
- (9) Sviluppare ognuna delle seguenti funzioni in serie di Fourier-Bessel rispetto alle $J_0(\lambda_j x)$ nell'intervallo $(0, c)$, do $J_0(\lambda_j c) = 0$. (*Nota:* i coefficienti sono dati dall'Eq.(2.19), ma non è necessario calcolare gli integrali.)
- $f(x) = 1$
 - $f(x) = x^2$ (*Nota:* usare la seguente formula di riduzione:
- $$\int_0^x s^n J_0(s) ds = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1} J_0(x) - (n-1)^2 \int_0^x s^{n-2} J_0(s) ds, \quad n = 2, 3, \dots$$
- $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ 1/x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
- (10) Scrivere la rappresentazione in serie di Fourier-Bessel per ognuna delle seguenti funzioni:
- $f(x) = x$, $x \in (-1, 1)$ in termini di $J_1(\lambda_j x)$ dove i λ_j sono le radici positive dell'equazione $J_1(\lambda) = 0$.

- (b) $f(x) = x^3$, $x \in [0, 1)$ in termini di $J_1(\lambda_j x)$ dove i λ_j sono le radici positive dell'equazione $J_1(\lambda) = 0$.
- (11) Mostrare che ognuna delle seguenti è un'equazione di Bessel
- (a) $\frac{dy}{dx} + ay^2 + \frac{1}{x}y + \frac{1}{a} = 0$ (Questa è una *equazione di Riccati*, ma la sostituzione $y = \frac{1}{az} \frac{dz}{dx}$ la trasforma in una equazione di Bessel).
- (b) $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [\lambda^2 r^2 - n(n+1)] R = 0$ (Questa equazione si ottiene quando l'*equazione di Helmholtz*² in coordinate sferiche è risolto per separazione delle variabili. Operare la sostituzione $R(\lambda r) = Z(\lambda r) / (\lambda r)^{1/2}$ che la trasforma in una equazione di Bessel di ordine $n + 1/2$)
- (c) $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{n}{k} y = 0$ (Questa è una *equazione di Fourier*, ma la sostituzione $x\sqrt{n/k} = z$ la trasforma in una equazione di Bessel).
- (12) nell'equazione differenziale di Bessel di ordine $1/2$, operare la sostituzione $y = u/\sqrt{x}$ per ottenere

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = 0 .$$

Risolvere questa equazione per ottenere

$$y = c_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} .$$

- (13) Dimostrare che:

(a)

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x} \sin x .$$

(b)

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x} \cos x .$$

- (14) Calcolare

$$\int_0^x s^n J_{n-1}(s) ds$$

(**Sugg.:** Usare l'esercizio 3f) .

- (15) Dimostrare che

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x) .$$

- (16) L'equazione

$$y'' + \frac{1}{x} y' - y = 0$$

è chiamata *equazione di Bessel modificata di ordine zero*.

²Hermann Von Helmholtz (1821 - 1894) chirurgo militare tedesco che passò alla matematica nel 1871)

(a) Mostrare che la soluzione è

$$J_0(ix) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

A volte si scrive $I_0(x) = J_0(ix)$ dove la $I_0(x)$ è chiamata *funzione di Bessel modificata del primo tipo di ordine zero*.

(b) Trovare l'intervallo di convergenza di $I_0(x)$.

(17) Dimostrare che $Y_0'(x) = -Y_1(x)$.

(18) Dividendo per x l'equazione di Bessel (2.11), mostrare che ha la forma di una equazione di Sturm-Liouville.

(19) Mostrare che

$$J_{n-2}(x) = \frac{2(n-1)}{x} J_{n-1}(x) - J_n(x) \quad n = 2, 3, \dots$$

(20) Considerare la serie

$$2 \sum_{j=1}^{\infty} [\lambda_j J_1(\lambda_j)]^{-1}$$

ottenuta dalla (2.24) per $x = 0$

(a) Mostrare che questa è una serie a segni alterni.

(b) Usando il criterio di Leibnitz dimostrare che la serie converge.

3. Coordinate sferiche; polinomi di Legendre

Coordinate sferiche (r, ϕ, θ) sono correlate a quelle cartesiane dalla relazione

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned}$$

con $r \geq 0$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Potremmo trovare l'espressione del Laplaciano in coordinate sferiche partendo da quello in coordinate cartesiane ed usando le relazioni precedenti.

Preferiamo però farlo partendo dal Laplaciano in coordinate cilindriche

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (3.1)$$

Se si fissa la coordinata ϕ allora u è funzione di ρ e z . Ricordando che

$$z = r \cos \theta, \quad \rho = r \sin \theta,$$

si ha che

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \frac{\rho}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{z}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (3.2)$$

Per trovare $\partial r/\partial \rho$ e $\partial \theta/\partial \rho$ abbiamo usato le relazioni $z^2 + \rho^2 = r^2$ e $\rho/z = \tan \theta$. Ne segue che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{z}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right),$$

e ricordando da (3.2) che

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\rho}{r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{z}{r^2}$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\rho}{r} + \frac{1}{r} u_r + u_r \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} \frac{z}{r^2} + u_\theta z \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r^2} \right) \\ &= \frac{\rho}{r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\rho}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \frac{z}{r^2} \right) + \frac{1}{r} u_r + u_r \rho \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\rho}{r} \right) \\ &\quad + \frac{z}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \frac{\rho}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{z}{r^2} \right) + u_\theta z \left(\frac{2}{r^3} \frac{\rho}{r} \right) \\ &= \frac{\rho^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2\rho}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\rho^2}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{z^4}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2\rho z}{r^4} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo calcoliamo $\partial^2 u/\partial z^2$. Si ha

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{z}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + z \frac{\partial u}{\partial r} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{z}{r} + \frac{z}{r} \left(\frac{z}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \right) \\ &\quad - \rho \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(-\frac{2}{r^3} \right) \frac{z}{r} - \frac{\rho}{r^2} \left[\frac{z}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} - \left(-\frac{\rho}{r^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{z^2}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{z^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\rho z}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{2\rho z}{r^4} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\rho^2}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} u_{zz} + u_{\rho\rho} &= \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{r^2 - z^2 + r^2 - \rho^2}{r^3} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left(\frac{z^2 + \rho^2}{r^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \left(\frac{z^2 + r^2}{r^4} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, aggiungendo l'equivalente dei termini

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial r} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2},$$

si ha

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad (3.3)$$

che è il Laplaciano in coordinate sferiche.

3.1. Soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche.

L'equazione di Laplace in coordinate sferiche è

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 .$$

Una forma equivalente è la seguente

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 . \quad (3.4)$$

Cerchiamo, come al solito, la soluzione per separazione delle variabili,

$$u(r, \phi, \theta) = R(r) \Phi(\phi) \Theta(\theta)$$

che sostituiamo nella (3.4). Si ottiene

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \Phi \Theta \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(R \Phi \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R \Theta \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0 .$$

Dividendo, adesso, per $R\Phi\Theta/r^2 \sin^2 \theta$ si ha

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} .$$

poiché il membro sinistro dell'equazione non dipende da ϕ , si ha

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = m^2 , \quad m = 0, 1, 2, \dots , \quad (3.5)$$

dove, come sempre, la prima costante di separazione m è scelta essere un intero non-negativo in modo che la funzione Φ sia periodica di periodo 2π in ϕ .

Separando ancora le variabili, si ottiene

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = - \left[\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] = \lambda ,$$

dove non si conosce quale valore debba avere la costante di separazione λ . Abbiamo quindi ridotto l'equazione di Laplace nelle tre equazioni differenziali ordinarie lineari omogenee del secondo ordine

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 , \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 , \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \lambda R = 0 . \quad (3.8)$$

Da notare che mentre la prima e terza equazione contengono una sola delle costanti di separazione, la seconda le contiene entrambe.

Il prodotto delle soluzioni di queste tre equazioni sono anche chiamate **armoniche sferiche**. L'Eq.(3.6) è a coefficienti costanti e la sua soluzione generale è

$$\Phi_m(\phi) = A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

dove, come al solito, A_m e B_m sono costanti arbitrarie che vanno determinate dalle condizioni al bordo. L'Eq.(3.8) può essere riscritta nella forma

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - \lambda R = 0.$$

Questa è una equazione di Eulero-Cauchy che può essere risolta ponendo $R(r) = r^k$. In tal caso si ha

$$r^2 k(k-1)r^{k-2} + 2rkr^{k-1} - \lambda r^k = 0$$

o,

$$(k^2 + k - \lambda)r^k = 0.$$

Quindi $R(r) = r^k$ è una soluzione se $k^2 + k - \lambda = 0$. Se scegliamo $k = n$, allora $\lambda = n(n+1)$ e ancora, se si prende $k = -(n+1)$ ancora una volta si ha $\lambda = n(n+1)$. Ne segue che scegliendo $\lambda = n(n+1)$ l'Eq.(3.8) ammette due soluzioni linearmente indipendenti r^n e $r^{-(n+1)}$, quindi la soluzione generale può essere scritta nella forma

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}. \quad (3.10)$$

per risolvere la (3.7) operiamo la seguente sostituzione:

$$x = \cos \theta, \quad \Theta(\theta) = y(x), \quad \frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin \theta \frac{d}{dx}.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) &= -\sin \theta \frac{d}{dx} \left(\sin \theta \frac{dx}{d\theta} \frac{d\Theta}{dx} \right) \\ &= \sin \theta \frac{d}{dx} \left(\sin^2 \theta \frac{dy}{dx} \right) \\ &= \sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right]. \end{aligned}$$

Con queste sostituzioni la (3.7) diventa

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

o, in forma equivalente

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0 \quad (3.11)$$

L'equazione (3.11) è chiamata **equazione differenziale di Legendre di ordine m** . La sua soluzione generale, che si può trovare con il metodo di soluzione per serie, è

$$y_{n,m}(x) = c_{n,m}P_n^m(x) + d_{n,m}Q_n^m(x) ,$$

dove $P_n^m(x)$ e $Q_n^m(x)$ sono chiamate **funzioni di Legendre del primo e secondo tipo**, rispettivamente. esse dipendono, come si vede, da m e da n oltre che dalla variabile x , mentre i coefficienti $c_{n,m}$ e $d_{n,m}$ dipendono sia da m che da n . Se $m = 0$ l'equazione (3.11) diventa

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 , \quad (3.12)$$

ed è nota come **equazione differenziale di Legendre**. Una soluzione particolare di questa equazione è $y = P_n(x)$, il polinomio di Legendre di grado n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Da notare che n deve essere non-negativo se si vuole che le soluzioni dell'equazione (3.12) siano limitate su $-1 \leq x \leq 1$. Una seconda soluzione linearmente indipendente è $Q_n(x)$ che ha una singolarità nei punti $x = \pm 1$ e può essere usata solo se $x \neq \pm 1$ cioè $\theta \neq 0, \theta \neq \pi$.

Il caso in cui u è indipendente da ϕ si ha che $m = 0$ (controllare con l'Eq.(3.9)). In questo caso l'equazione di Laplace in coordinate sferiche (3.4) si riduce all'equazione

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 ,$$

le cui soluzioni sono prodotti di

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}$$

e

$$\Theta_n(\theta) = E_n P_n(\cos \theta) + F_n Q_n(\cos \theta) , \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Voglio osservare che abbiamo fatto diverse semplificazioni per poter risolvere l'equazione di Laplace in coordinate sferiche. Questo non è stato fatto solo per semplificare gli aspetti matematici del problema. Vedremo nei paragrafi successivi che le modellizzazioni di molte applicazioni portano al nostro approccio semplificato. Va comunque notato che la natura delle costanti di separazione m e λ dipendono dalle condizioni al bordo del singolo problema.

3.1.1. Polinomi di Legendre. Nel Paragrafo 1.5.3 abbiamo risolto l'equazione differenziale di Legendre col metodo di Frobenius, ottenendo i **polinomi di Legendre** $P_n(x)$. Ricordiamo qui i primi polinomi,

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 , & P_1(x) &= x , & P_2(x) &= \frac{1}{2} (3x^2 - 1) , \\ P_3(x) &= \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) , & P_4(x) &= \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3) . \end{aligned}$$

ed alcune loro proprietà:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & P_{2n+1}(0) = 0 \\
 (b) \quad & P_n(1) = 1 \\
 (c) \quad & P_n(-1) = (-1)^n \\
 (d) \quad & P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x) \quad , \quad n = 1, 2, \dots \\
 (e) \quad & xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x) \quad , \quad n = 1, 2, \dots \\
 (f) \quad & P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x) \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad .
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Notiamo che la proprietà (f) è la somma delle proprietà (d) e (e). Possiamo dimostrare la proprietà (d) dalla definizione di polinomi di Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k! (n-2k)! (n-k)!} x^{n-2k} \quad , \tag{3.14}$$

dove $N = n/2$ se n è pari e $N = (n-1)/2$ se n è dispari. Si ha

$$\begin{aligned}
 P_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (2n-2k+2)!}{k! (n-2k+1)! (n-k+1)!} x^{n-2k+1} \\
 P'_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (2n-2k+2)! (n-2k+1)}{k! (n-2k+1)! (n-k+1)!} x^{n-2k} \\
 P'_n(x) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (2n-2k)! (n-2k)}{k! (n-2k)! (n-k)!} x^{n-2k-1} \\
 xP'_n(x) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (2n-2k)! (n-2k)}{k! (n-2k)! (n-k)!} x^{n-2k} \\
 P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (2n-2k+2)! (n-2k+1)}{k! (n-2k+1)! (n-k+1)!} x^{n-2k} \\
 &\quad - \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (2n-2k)! (n-2k)}{k! (n-2k)! (n-k)!} x^{n-2k} \\
 P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) &= (2n-2k+1-n+2k) \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k! (n-2k)! (n-k)!} x^{n-2k} \\
 &= (n+1) P_n(x) \quad .
 \end{aligned}$$

La proprietà (e) segue in maniera analoga.

Ortogonalità dei Polinomi di Legendre. Vogliamo adesso mostrare sotto quali condizioni i polinomi di Legendre sono ortogonali. La proprietà di ortogonalità è essenziale, come noto, nella soluzione dei problemi al bordo.

Cominciamo dal fatto che i polinomi di Legendre soddisfano l'equazione differenziale di Legendre

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2) P_n'(x)] + n(n+1) P_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

moltiplicando questa equazione per $P_m(x)$ ed integrando tra -1 ed 1 , si ha

$$\int_{-1}^1 P_m(x) \frac{d}{dx} [(1-x^2) P_n'(x)] dx + n(n+1) \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad (3.15)$$

Integrando per parti il primo integrale, si ha

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_m(x) \frac{d}{dx} [(1-x^2) P_n'(x)] dx \\ &= P_m(x) P_n'(x) (1-x^2) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1-x^2) P_n'(x) P_m'(x) dx . \end{aligned}$$

Il primo termine è nullo per la presenza del termine $(1-x^2)$. Quindi l'Eq.(3.15) diventa

$$- \int_{-1}^1 (1-x^2) P_n'(x) P_m'(x) dx + n(n+1) \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 .$$

Poiché entrambi m ed n sono interi positivi, scambiandoli tra loro si ha

$$- \int_{-1}^1 (1-x^2) P_m'(x) P_n'(x) dx + m(m+1) \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 .$$

Sottraendo le due equazioni tra di loro si ottiene

$$(n-m)(n+m+1) \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 .$$

Supponiamo che $n \neq m$. Allora $n-m \neq 0$ da cui segue che $n+m+1 \neq 0$, ne segue che

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad n \neq m . \quad (3.16)$$

Questo mostra che l'insieme

$$\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots\}$$

è un insieme ortogonale su $[-1, 1]$ con funzione peso $w(x) = 1$.

Nelle applicazioni i polinomi di Legendre sono spesso espressi in termini dell'angolo θ . Sia $x = \cos \theta$, $dx = -\sin \theta d\theta$ e cambiamo i limiti di integrazione di conseguenza. Allora l'Eq.(3.16) diventa

$$\int_{\pi}^0 P_m(\cos \theta) P_n(\cos \theta) (-\sin \theta) d\theta, \quad m \neq n$$

o

$$\int_0^\pi \sin \theta P_m(\cos \theta) P_n(\cos \theta) d\theta = 0, \quad m \neq n.$$

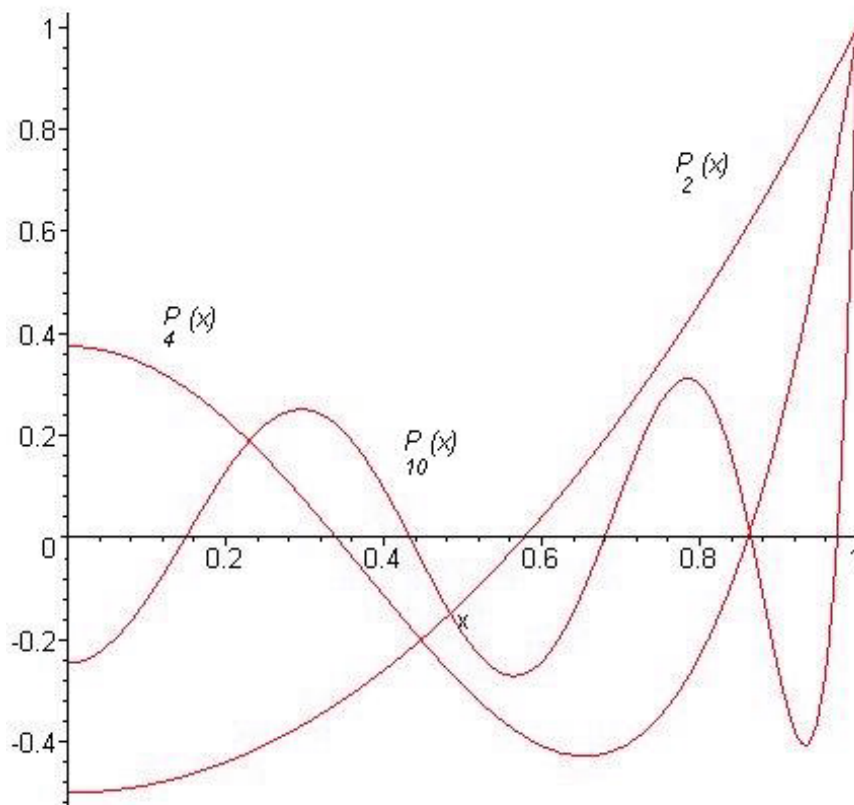
Quindi l'insieme

$$\{P_0(\cos \theta), P_1(\cos \theta), P_2(\cos \theta), \dots\}$$

è un insieme ortonormale nell'intervallo $0 \leq \theta \leq \pi$ con funzione peso $w(\theta) = \sin \theta$. Se nell'Eq.(3.16) sostituiamo n con $2n$ ed m con $2m$, allora

$$\int_{-1}^1 P_{2m}(x) P_{2n}(x) dx = 2 \int_0^1 P_{2m}(x) P_{2n}(x) dx = 0, \quad n \neq m.$$

In altre parole, i polinomi di Legendre di grado *pari* sono ortogonali nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$ con funzione peso uno. In modo simile i polinomi di grado *dispari* sono ortogonali nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$ con funzione peso uno.



Polinomi di Legendre

3.2. Serie di Legendre. La proprietà di ortogonalità dei polinomi di Legendre rendono possibile rappresentare certe funzioni in **serie di Legendre**, come serie, cioè, dei polinomi di Legendre. Questa rappresentazione è possibile perché l'equazione differenziale di Legendre

(3.12) insieme ad appropriate condizioni al bordo, costituiscono un problema regolare di Sturm-Liouville. Inoltre, si può mostrare che i polinomi di Legendre normalizzati formano un **insieme ortonormale completo** rispetto a funzioni lisce a tratti su $(-1, 1)$. Per una funzione di questo tipo possiamo scrivere

$$f(x) = A_0 P_0(x) + A_1 P_1(x) + A_2 P_2(x) + A_3 P_3(x) + \dots .$$

Per trovare A_2 , per esempio, moltiplichiamo per $P_2(x)$ ed integriamo nell'intervallo $[-1, 1]$. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) P_2(x) dx &= A_0 \int_{-1}^1 P_0(x) P_2(x) dx \\ &+ A_1 \int_{-1}^1 P_1(x) P_2(x) dx \\ &+ A_2 \int_{-1}^1 P_2(x) P_2(x) dx \\ &+ A_3 \int_{-1}^1 P_3(x) P_2(x) dx + \dots \end{aligned}$$

A causa della proprietà di ortogonalità delle $P_n(x)$, ogni integrale a destra è zero eccetto il terzo. Quindi

$$\int_{-1}^1 f(x) P_2(x) dx = A_2 \int_{-1}^1 [P_2(x)]^2 dx ,$$

dal quale si ottiene

$$A_2 = \frac{\int_{-1}^1 f(x) P_2(x) dx}{\int_{-1}^1 [P_2(x)]^2 dx} .$$

Ogni coefficiente A_n può essere trovato nello stesso modo, così in generale si ha

$$A_n = \frac{\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx}{\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx} . \quad (3.17)$$

Rimane il problema di sapere quanto vale il denominatore della (3.17). Diamo il risultato, senza entrare nei particolari dei calcoli. Si ha

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} , \quad (3.18)$$

da cui segue che l'insieme

$$\left\{ \frac{P_0(x)}{\sqrt{2}}, \frac{P_1(x)}{\sqrt{2/3}}, \frac{P_2(x)}{\sqrt{2/5}}, \dots \right\}$$

è ortonormale nell'intervallo $[-1, 1]$ con funzione peso uno. Ne risulta che

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

le serie di Legendre hanno qualcosa in comune con le serie di Fourier. Se una funzione è definita solo nell'intervallo $(0, 1)$, può essere rappresentata, per esempio, da una serie di polinomi di Legendre pari estendendo la funzione in modo pari, o Legendre dispari estendendo la funzione in modo dispari.

ESEMPIO 87. *Data la funzione*

$$f(x) = 2(1-x), \quad 0 < x < 1,$$

trovare i primi due termini delle rappresentazioni in serie di Legendre (a) usando i polinomi di grado pari, (b) polinomi di grado dispari.

SOLUZIONE 87. *Nel caso (a) operiamo una estensione pari della funzione, ottenendo così*

$$A_{2n} = (4n+1) \int_0^1 f(x) P_{2n}(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Si ha

$$\begin{aligned} A_0 &= 2 \int_0^1 (1-x) dx = 1, \\ A_2 &= 5 \int_0^1 (1-x)(3x^2-1) dx = -\frac{5}{4}; \end{aligned}$$

da cui

$$f(x) = P_0(x) - \frac{5}{4}P_2(x) + \dots$$

Per il caso (b) va fatta una estensione dispari della funzione data, ottenendo

$$A_{2n+1} = (4n+3) \int_0^1 f(x) P_{2n+1}(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

Osserviamo che l'integrando è pari anche in questo caso. Quindi

$$\begin{aligned} A_1 &= 6 \int_0^1 (1-x)x dx = 1, \\ A_3 &= 7 \int_0^1 (1-x)(5x^3-3x) dx = -\frac{7}{4}, \end{aligned}$$

così che

$$f(x) = P_1(x) - \frac{7}{4}P_3(x) + \dots$$

Da notare, ovviamente che in (b) si ha che $f(0) = 0$.

3.2.1. *Funzioni di Legendre del secondo tipo.* Chiudiamo questo paragrafo con una breve discussione sulle funzioni di Legendre del secondo tipo. Combinazioni lineari di queste e dei polinomi di Legendre formano la soluzione generale dell'equazione differenziale di Legendre (3.12) che riportiamo, per comodità,

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

La prima soluzione trovata sono i polinomi di Legendre di grado n , $u = P_n(x)$. Una seconda soluzione linearmente indipendente può essere trovata con il metodo di variazione dei parametri. Essa è data da

$$Q_n(x) = P_n(x) \int \frac{1}{(1 - x^2)[P_n(x)]^2} dx, \quad (3.22)$$

e quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$B_n P_n(x) + A_n P_n(x) \int \frac{1}{(1 - x^2)[P_n(x)]^2} dx. \quad (3.23)$$

Le funzioni $Q_n(x)$ sono

$$Q_0(x) = \int_0^x \frac{1}{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right),$$

$$Q_1(x) = x \int_0^x \frac{1}{x^2(1 - x^2)} dx = \frac{x}{2} \log \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) - 1,$$

e continuando in questo modo

$$Q_2(x) = \frac{1}{4} (3x^2 - 1) \log \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) - \frac{3}{2}x$$

$$Q_3(x) = \frac{x}{4} (5x^2 - 3) \log \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}.$$

Dalla definizione delle funzioni Q di Legendre segue che

$$Q_{2n}(-x) = P_{2n}(-x) \int \frac{-1}{(1 - x^2)[P_{2n}(x)]^2} dx$$

$$= -P_{2n}(x) \int \frac{1}{(1 - x^2)[P_{2n}(x)]^2} dx = -Q_{2n}(x),$$

e

$$Q_{2n+1}(-x) = P_{2n+1}(-x) \int \frac{-1}{(1 - x^2)[P_{2n+1}(x)]^2} dx$$

$$= P_{2n+1}(x) \int \frac{-1}{(1 - x^2)[P_{2n+1}(x)]^2} dx = Q_{2n+1}(x),$$

che combinati insieme possono essere scritti come

$$Q_n(-x) = (-1)^{n+1} Q_n(x).$$

Il termine

$$\log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

ha una singolarità nei punti $x = \pm 1$. In coordinate sferiche (r, ϕ, θ) queste singolarità vengono traslate in $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ per la relazione $x = \cos \theta$. Abbiamo ottenuto le funzioni $Q_n(x)$ in forma chiusa. Esse possono essere espresse come serie sviluppando il termine $\log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ in serie di Mac Laurin usando la relazione

$$\log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right), \quad -1 < x < 1.$$

3.3. Esercizi.

- (1) Mostrare che le equazioni (3.3) e (3.4) sono forme equivalenti dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche.
- (2) Verificare che r^n e r^{-n} sono soluzioni linearmente indipendenti dell'Eq.(3.8).
- (3) Provare le seguenti proprietà dei polinomi di Legendre (confronta con l'Eq.(3.13)).
 - (a) $P_{2n+1}(0) = 0$
 - (b) $P_n(-1) = (-1)^n$
 - (c) $xP'_n(x) = -P'_{n-1}(x) = nP_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$
 - (d) $P'_{2n}(0) = 0$
 - (e) $P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$
- (4) Provare che i polinomi di Legendre di grado dispari sono ortogonali su $0 \leq x \leq 1$.
- (5) Portare avanti i dettagli di conto per arrivare all'Eq.(3.18).
- (6) verificare l'Eq.(3.18) per $n = 0, 1, 2, 3$, calcolando il quadrato della norma direttamente da $P_n(x)$.
- (7) Mostrare che $P_0(x)$, $P_1(x)$ e $P_2(x)$ sono ortogonali su $-1 \leq x \leq 1$ con calcolo diretto.
- (8) Mostrare che l'intervallo di convergenza di $Q_n(x)$ è $-1 < x < 1$.
- (9) Mostrare che

$$\int_0^1 P_{2n}(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

- (10) Mostrare che

$$\int_{-1}^1 P'_n(x) P_m(x) dx = 1 - (-1)^{n+m},$$

- (11) Mostrare che

$$\int_{-1}^1 x [P_n(x)]^2 dx = 0.$$

(12) Esprimere ciascuno dei seguenti polinomi in termini di Polinomi di Legendre

(a) $ax + b$

(b) $ax^2 + bx + c$

(c) $ax^3 + bx^2 + cx + d$

(13) Mostrare che

$$P'_n(1) = \frac{n}{2}(n+1) .$$

(14) Nell'Esempio (87) trovare:

(a) I coefficienti A_0, A_1, A_2, A_3

(b) Calcolare A_4 e A_5 .

(c) Trovare i coefficienti nella rappresentazione in serie di Legendre della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 2(1-x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

(d) Calcolare $f(0)$ nella rappresentazione della parte (c).

(15) Ottenere i primi tre coefficienti non nulli nella rappresentazione in serie di Legendre delle funzioni:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = |x|, \quad -1 < x < 1 .$$

(16) Ottenere la formula

$$\int_x^1 P_n(s) ds = \frac{1}{2n+1} [P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)], \quad n = 1, 2, \dots .$$

(Sugg: Usare l'Eq.(3.13 (f)).

(17) Mostrare che se $f(x)$ è un polinomio di grado $m < n$ allora

$$\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = 0 .$$

(18) Una rappresentazione integrale di $P_n(x)$, chiamata *integrale di Laplace* è data da

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [x + (x^2 - 1)^{1/2} \cos \theta]^n d\theta .$$

Verificare questa rappresentazione per $n = 0, 1, 2, \dots$

(19) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 2x + 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

- (a) Sviluppala in serie di Legendre, scrivendo solo i primi quattro termini.
 (b) A quale valore converge la serie per $x = 0$? e per $x = -1/2$? e per $x = 1/2$?

(20) Sviluppate la serie di Legendre la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

(21) Data l'equazione differenziale di Legendre (3.12)

- (a) Scrivere l'equazione nella forma dell'equazione di Sturm-Liouville 2.2.6.
 (b) Usando la notazione del Paragrafo 2.2, mostrare che $r(b) = 0$ e che vale la prima condizione al bordo dell'Eq. 2.2.7

(22) Le funzioni associate di Legendre del primo tipo $P_n^m(x)$ sono soluzioni particolari dell'Eq.(3.11) definite nel seguente modo

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}.$$

- (a) Mostrare che $P_n^0(x) = P_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$
 (b) Mostrare che $P_n^m(x) = 0$ se $m > n$
 (c) Scrivere esplicitamente $P_1^1, P_2^1, P_3^1, P_2^2$ e P_3^2
 (d) Verificare che P_2^1 e P_3^1 sono ortogonali su $(-1, 1)$ usando la relazione di ortogonalità

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}, & n = k. \end{cases}$$

(e) Trovare

$$\int_{-1}^1 [P_2^2(x)]^2 dx.$$

(23) Mostrare che le soluzioni dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche possono essere scritte come

$$u(r, \phi, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}) (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) (c_{n,m} P_n^m(\cos \theta) + d_{n,m} Q_n^m(\cos \theta)).$$

(24) Ottenere la formula ricorrente

$$P_{n+1}(x) = \left(\frac{2n+1}{n+1} \right) x P_n(x) - \left(\frac{n}{n+1} \right) P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

(25) Qual'è la relazione, nell'Esempio (87), tra il termine A_0 con la funzione rappresentata dalla serie di Legendre? Generalizzare.

CHAPTER 9

Applicazioni

1. Problemi al bordo in coordinate cilindriche e sferiche

Adesso siamo pronti a risolvere alcuni problemi al bordo tridimensionali in coordinate cilindriche e sferiche. Negli esempi che seguono useremo molti dei risultati ottenuti nei Paragrafi 8.2 e 8.3 .

ESEMPIO 88. *Determinare lo stato stazionario della temperatura all'interno di una sfera solida di raggio b se la temperatura al bordo è data da $f(\cos\theta)$.*

SOLUZIONE 88. *Poiché la temperatura al bordo dipende solo da θ la soluzione è indipendente da ϕ . Si ha quindi il seguente problema:*

$$\begin{aligned} \text{E.D.P.} \quad \nabla^2 u(r, \theta) &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad 0 < b, \quad 0 < \theta < \pi, \\ \text{C.B.} \quad u(b, \theta) &= f(\cos \theta), \quad 0 < \theta < \pi. \end{aligned}$$

Usando la separazione delle variabili ed assumendo quindi che

$$u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta),$$

si ha

$$\Theta \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \Theta \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} R \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} R \frac{d\Theta}{d\theta} = 0$$

o, equivalentemente

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} - \frac{\cot \theta}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\theta} = \lambda.$$

Questo, per la parte radiale, porta all'equazione

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0,$$

la quale, per $\lambda = n(n+1)$ ha come soluzioni

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-(n+1)},$$

come dato dall'Eq.8.3.10 . Poiché cerchiamo la soluzione all'interno della sfera e la temperatura deve (ovviamente) essere limitata, questo implica che bisogna scegliere $D_n = 0$.

Per l'equazione in Θ si ottiene l'equazione differenziale di Legendre

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + n(n+1) \Theta = 0,$$

la cui soluzione generale è

$$\Theta_n(\theta) = E_n P_n(\cos \theta) + F_n Q_n(\cos \theta) .$$

Anche in questo caso, per mantenere la soluzione limitata bisogna scegliere $F_n = 0$. Ne segue che $u(r, \theta)$ consiste nella serie dei prodotti $r^n P_n(\cos \theta)$, quindi

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) ,$$

con i coefficienti A_n che devono essere determinati dalla condizione al bordo. Si ha quindi

$$u(b, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n b^n P_n(\cos \theta) = f(\cos \theta) ,$$

che mostra che la funzione $f(\cos \theta)$ può essere espressa come serie di Legendre. dall'Eq. 8.3.19 si ha

$$A_n b^n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

quindi la soluzione può essere scritta nella forma

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (r/b)^n P_n(\cos \theta) (2n+1) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \quad (1.1)$$

ESEMPIO 89. *Trovare lo stato stazionario della temperatura all'interno di un solido cilindro di raggio c ed altezza b , se la temperatura della superficie laterale è tenuta a zero, la base è isolata e il sopra è tenuto a 100° .*

SOLUZIONE 89. *Prendiamo l'asse del cilindro coincidente con l'asse z ed usiamo le coordinate cilindriche. Il problema non dipende dall'angolo θ . Abbiamo quindi il seguente problema:*

$$\begin{aligned} \text{E.D.P.} \quad & u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + u_{zz} = 0 , \quad 0 < \rho < c , \quad 0 < z < b , \\ \text{C.B.} \quad & u(c, z) = 0 \quad \quad \quad 0 < z < b , \\ & u_z(\rho, 0) = 0 \quad \quad \quad 0 < \rho < c , \\ & u(\rho, b) = 100 , \quad \quad \quad 0 < \rho < c . \end{aligned}$$

Se assumiamo che $u(\rho, z) = R(\rho) Z(z)$, l'equazione differenziale diventa

$$Z R'' + \frac{1}{\rho} Z R' + R Z'' = 0 ,$$

o

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{\rho R} = -\frac{Z'}{Z} = -\lambda^2 .$$

Abbiamo assunto che la costante di separazione sia negativa perché non vogliamo una soluzione periodica in z . Le equazioni differenziali risultanti, usando le condizioni al bordo omogenee sono

$$\begin{aligned} Z'' - \lambda^2 Z &= 0, & Z'(0) &= 0, \\ R'' + \frac{1}{\rho} R' + \lambda^2 R &= 0, & R(c) &= 0. \end{aligned}$$

Queste equazioni differenziali, simili alle equazioni (8.2.2) e (8.2.4) hanno come soluzione generale

$$Z(\lambda z) = A \cosh \lambda z + B \sinh \lambda z$$

e

$$R_0(\lambda \rho) = E J_0(\lambda \rho) + F Y_0(\lambda \rho).$$

Per avere soluzioni limitate scegliamo $F = 0$. La condizione $R(c) = 0$ implica che $J_0(\lambda c) = 0$, cioè λc è uno zero della funzione di Bessel $J_0(x)$. Chiamiamo questi zeri positivi $\lambda_j c$, $j = 1, 2, \dots$. Le equazioni in z hanno soluzioni

$$Z(\lambda_j z) = \cosh(\lambda_j z), \quad j = 1, 2, \dots$$

Allora si ha

$$u(\rho, z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cosh(\lambda_j z) J_0(\lambda_j \rho),$$

ed applicando la condizione al bordo non omogenea, si ha

$$u(\rho, b) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cosh(\lambda_j b) J_0(\lambda_j \rho) = 100,$$

che mostra che la funzione $f(\rho) = 100$ deve essere espressa come serie di Fourier-Bessel nell'intervallo $0 < \rho < c$. Usando l'Eq.(8.2.19) si ha

$$\begin{aligned} A_j &= a_j \cosh(\lambda_j b) = \frac{2}{c^2 [J_0'(\lambda_j c)]^2} \int_0^c 100 x J_0(\lambda_j x) dx \\ &= \frac{200}{c^2 [J_0'(\lambda_j c)]^2} \frac{1}{\lambda_j^2} \int_0^{\lambda_j c} s J_0(s) ds \end{aligned}$$

avendo fatto la sostituzione $s = \lambda_j x$. Allora, usando l'Eq.(8.2.10), abbiamo

$$A_j = a_j \cosh(\lambda_j b) = \frac{200}{\lambda_j c J_1(\lambda_j c)},$$

ricordando che $J_0'(x) = -J_1(x)$ e semplificando. Quindi

$$u(\rho, z) = \frac{200}{c} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \cosh(\lambda_j z)}{\lambda_j \cosh(\lambda_j b) J_1(\lambda_j c)}, \quad (1.2)$$

dove i $\lambda_j c$ sono radici positive di $J_0(\lambda) = 0$.

Nel prossimo esempio consideriamo l'equazione d'onda bi-dimensionale in una regione circolare.

ESEMPIO 90. Risolvere il seguente problema al bordo

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad z_{tt} &= \frac{a^2}{\rho} (\rho z)_\rho, & 0 < \rho < c, \quad t > 0, \\ C.B. \quad z(c, t) &= 0 & t > 0, \\ z_t(\rho, 0) &= 0 & 0 < \rho < c, \\ z(\rho, 0) &= f(\rho), & 0 < \rho < c. \end{aligned}$$

SOLUZIONE 90. Abbiamo una membrana omogenea di raggio c fissata al bordo circolare. Alla membrana è data una posizione iniziale $f(\rho)$ nella direzione dell'asse z e vogliamo conoscere la posizione della membrana ad ogni tempo t . Il fatto che la posizione iniziale dipenda solo da ρ indica che z è indipendente da θ . Separando le variabili arriviamo alle seguenti equazioni differenziali ed alle condizioni al bordo omogenee:

$$\begin{aligned} T'' + \lambda^2 a^2 T &= 0, & T'(0) &= 0, \\ \rho^2 R'' + \rho R' + \lambda^2 \rho^2 R &= 0, & R(c) &= 0. \end{aligned}$$

La costante di separazione è scelta in modo che il moto sia periodico in t , consistente con i dati fisici del problema. La seconda equazione ha soluzioni $J_0(\lambda_j \rho)$ con $J_0(\lambda_j c) = 0$, $j = 1, 2, \dots$. La soluzione è allora

$$z(\rho, t) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j J_0(\lambda_j \rho) \cos(\lambda_j a t).$$

per soddisfare la condizione al bordo non omogenea, usiamo ancora l'Eq. (8.2.19) per determinare gli A_j . Quindi

$$A_j = \frac{2}{c^2 [J_1(\lambda_j c)]^2} \int_0^c x f(x) J_0(\lambda_j x) dx, \quad j = 1, 2, \dots,$$

e

$$z(\rho, t) = \frac{2}{c^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \cos(\lambda_j a t)}{[J_1(\lambda_j c)]^2} \int_0^c x f(x) J_0(\lambda_j x) dx, \quad (1.3)$$

dove $\lambda_j c$ sono le radici positive di $J_0(x) = 0$.

ESEMPIO 91. Risolvere il seguente problema al bordo

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad u_t &= \frac{k}{\rho} (\rho z)_\rho, & 0 < \rho < c, \quad t > 0, \\ C.B. \quad u_\rho(c, t) &= 0 & t > 0, \\ C.I. \quad u(\rho, 0) &= f(\rho), & 0 < \rho < c. \end{aligned}$$

SOLUZIONE 91. In questo caso abbiamo un disco circolare omogeneo di raggio c il cui bordo esterno è isolato. Assumiamo che il flusso di calore è bi-dimensionale. Inoltre, la temperatura è indipendente da θ poiché la distribuzione di temperatura iniziale è funzione solo di ρ . Cerchiamo le temperature del disco al variare del tempo t . Usando la

separazione delle variabili, si hanno le seguenti equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{aligned} T' + k\lambda^2 T &= 0 \\ R'' + \frac{1}{\rho} R' + \lambda^2 R &= 0, \quad R'(c) = 0. \end{aligned}$$

Ancora una volta la costante di separazione è scelta negativa, perché vogliamo che $u_\rho(\rho, t)$ abbia limite zero quando $t \rightarrow \infty$. La seconda è una equazione di Bessel di ordine zero che ha come soluzione limitata la funzione $J_0(\lambda\rho)$. Applicando le condizioni date si ha

$$J_0'(\lambda c) = -\lambda J_1(\lambda c) = 0,$$

che dice che λc è uno zero di $J_1(x) = 0$. Chiamiamo questi zeri non negativi $\lambda_j c$, $j = 1, 2, \dots$, cioè $\lambda_1 c = 0$, $\lambda_2 c = 3.832$, $\lambda_3 c = 7.016$, etc. Abbiamo quindi una soluzione della forma

$$u(\rho, t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \exp(-k\lambda_j^2 t) J_0(\lambda_j \rho),$$

e, per soddisfare la condizione al bordo non omogenea, dobbiamo calcolare gli A_j usando l'Eq.(8.2.21) con $h = n = 0$ e l'Eq.(8.2.22). Ne segue che

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{c^2} \int_0^c x f(x) dx, \\ A_j &= \frac{2}{c^2 [J_0(\lambda_j c)]^2} \int_0^c x f(x) J_0(\lambda_j x) dx, \quad j = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

così che il risultato finale è

$$u(\rho, t) = A_1 + \sum_{j=2}^{\infty} A_j \exp(-k\lambda_j^2 t) J_0(\lambda_j \rho), \quad (1.4)$$

con A_1 e gli A_j definiti sopra e con $J_1(\lambda c) = 0$, $j = 1, 2, 3, \dots$.

Vogliamo qui richiamare l'attenzione alla similarità tra l'Eq.(1.4) e le soluzioni del Capitolo 7 nel quale abbiamo esaminato le proprietà delle serie di Fourier. Nelle serie di Fourier c'è il termine $a_0/2$, che rappresenta il valor medio della funzione rappresentata dalla serie. Anche l'Eq.(1.4) contiene un termine costante, A_1 . Una domanda si pone sul significato di quel termine. Il prossimo esempio da la risposta.

ESEMPIO 92. *Determinare la soluzione stazionaria del problema dell'Esempio (91)*

SOLUZIONE 92. *La soluzione richiesta si ottiene risolvendo il seguente problema:*

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = 0, \quad \frac{du}{d\rho}(c) = 0. \quad (1.5)$$

Lasciamo per esercizio mostrare che la soluzione dell'Eq.(1.5) è una costante.

D'altra parte, dall'Eq.(1.4) si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(\rho, t) = A_1 ,$$

che è una costante. Da considerazioni fisiche, tuttavia, è chiaro che la temperatura di equilibrio della regione debba essere una costante, che in qualche modo rappresenta il valor medio della distribuzione iniziale di temperatura $f(\rho)$. Ricordiamo dall'Analisi che il valor medio di una funzione $f(x, y)$ rispetto ad una regione R del piano xy è dato da

$$f_m = \frac{\iint_R f(x, y) \, dx \, dy}{\iint_R dx \, dy} . \quad (1.6)$$

In coordinate polari l'Eq.(1.6) diventa

$$f_m = \frac{\iint_R f(\rho, \theta) \rho \, d\rho \, d\theta}{\iint_R \rho \, d\rho \, d\theta} . \quad (1.7)$$

In questo esempio la regione R è un cerchio di raggio c e la funzione f è indipendente da θ . Ne segue che l'Eq.(1.7) diventa

$$f_m = \frac{\int_0^c \int_0^{2\pi} f(\rho) \rho \, d\rho \, d\theta}{\pi c^2} = \frac{2}{c^2} \int_0^c f(\rho) \rho \, d\rho ,$$

che è esattamente la definizione di A_1 . Quindi A_1 fornisce il valor medio di $f(\rho)$ sulla regione circolare, che è anche la soluzione del problema stazionario dell'Esempio (91).

In relazione a quest'ultimo esempio, vedere il Teorema sul valor medio di una funzione armonica.

ESEMPIO 93. Una semisfera solida di raggio b ha la faccia piana completamente isolata, mentre la temperatura della superficie curva è data da $f(\cos \theta)$. Trovare la temperatura stazionaria all'interno della sfera.

SOLUZIONE 93. Poiché la temperatura sulla superficie non dipende da ϕ , si ha la seguente formulazione matematica del problema.

$$E.D.P. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 , \quad 0 < \rho < b , \quad 0 < \theta < \pi/2 ,$$

$$C.B. \quad \begin{aligned} u_z(r, \pi/2) &= 0 & 0 < \rho < b , \\ u(b, \theta) &= f(\cos \theta) & 0 < \theta < \pi/2 . \end{aligned}$$

Poiché la variabile z non fa parte delle coordinate sferiche, dobbiamo riscrivere la condizione al bordo omogenea in termini di r e θ .

Ricordando che $z = r \cos \theta$ si ha

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial z} .$$

Quindi, per $\theta = \pi/2$ si ha

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} ,$$

e la condizione $u_z(r, \pi/2) = 0$ implica che $u_\theta(r, \pi/2) = 0$. Ricordando l'Esempio (88), si ha

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) ,$$

che è la soluzione limitata dell'equazione di Laplace. Quindi

$$u_\theta(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n (-\sin \theta) P'_n(\cos \theta)$$

da cui

$$u_\theta(r, \pi/2) = -\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P'_n(0) = 0 ,$$

da cui segue che n è pari (vedi Esercizio 3(d) del Paragrafo 8.3). la soluzione può essere allora scritta come

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^{2n} P_{2n}(\cos \theta) .$$

Usando, infine, la condizione al bordo non omogenea, si ha

$$u(b, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} b^{2n} P_{2n}(\cos \theta) = f(\cos \theta) ,$$

che implica che la funzione $f(\cos \theta)$ deve essere rappresentata, nell'intervallo $0 < \theta < \pi/2$, da una serie di Legendre di polinomi di grado pari. Possiamo usare l'Eq.(8.3.20) per calcolare i coefficienti. Quindi,

$$A_{2n} b^{2n} = (4m+1) \int_0^{\pi/2} f(\cos \theta) P_{2n}(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta ,$$

e la soluzione diventa:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (4m+1) \left(\frac{r}{b}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) \int_0^1 f(x) P_{2n}(x) \, dx . \quad (1.8)$$

Ricordiamo ancora una volta la procedura di aggiornare la soluzione tutte le volte che si hanno nuove informazioni per essa. Generalmente è preferibile usare prima le condizioni omogenee quando si risolvono le

equazioni differenziali ordinarie ottenute dalla separazione delle variabili ed usare alla fine, la condizione non omogenea sulla soluzione generale.

ESEMPIO 94. *Risolvere il problema*

$$E.D.P. \quad u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} + u_{zz} = 0, \quad 0 < \rho < c, \quad z > 0,$$

$$C.B. \quad \begin{aligned} u_{\rho}(c, z) + hu(c, z) &= 0 & h > 0, \quad z > 0 \\ u(\rho, 0) &= f(\rho) & 0 < \rho < c, \quad z > 0. \end{aligned}$$

SOLUZIONE 94. *Il problema può essere, per esempio, interpretato nel seguente modo. Si cerca la temperatura stazionaria (l'equazione non dipende dal tempo) in un cilindro circolare, semi-infinito, di raggio c . La prima condizione al bordo indica un trasferimento di calore per **convezione** attraverso la superficie laterale del cilindro, rispetto al mezzo circostante tenuto a temperatura zero. Detto altrimenti, la superficie laterale si raffredda in accordo alla **legge di raffreddamento di Newton**.*

La seconda dice che la temperatura della base del cilindro è funzione solo della variabile ρ .

Infine, ricordiamo che, per evidenti ragioni fisiche, la soluzione deve essere limitata, il che significa che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u(\rho, z) = 0$$

e che $u(\rho, z)$ è limitata nell'intorno dell'asse z , cioè per $\rho \rightarrow 0$.

Usando la separazione delle variabili, $u(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$ si ha

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{\rho R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2,$$

con la costante di separazione negativa perché non vogliamo (non ha senso fisicamente) soluzioni periodiche in z . Arriviamo così alle due equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{aligned} \rho R'' + R' + \lambda^2 R &= 0, & R'(c) + hR(c) &= 0, \\ Z'' - \lambda^2 Z &= 0. \end{aligned}$$

La prima è una equazione differenziale di Bessel di ordine zero, la sua soluzione generale è

$$R(\lambda\rho) = AJ_0(\lambda\rho) + BY_0(\lambda\rho).$$

Prendiamo $B = 0$ perché $Y_0(\lambda\rho)$ non è limitato per $\rho \rightarrow 0$. Applicando la condizione al bordo si ha

$$\lambda J_0'(\lambda c) + hJ_0(\lambda c) = 0, \tag{1.9}$$

che definisce i valori positivi dei λ , che indichiamo con λ_j , $j = 1, 2, \dots$

La seconda equazione ha come soluzione generale

$$Z(\lambda_j z) = C_j \exp(\lambda_j z) + D_j \exp(-\lambda_j z),$$

nella quale prendiamo $C_j = 0$ per avere la soluzione limitata per $z > 0$. La soluzione viene quindi scritta come

$$u(\rho, z) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \exp(-\lambda_j z) J_0(\lambda_j \rho) .$$

La condizione non omogenea alla base del cilindro da:

$$u(\rho, 0) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0(\lambda_j \rho) = f(\rho) .$$

La funzione $f(\rho)$ viene quindi espressa in serie di Fourier-Bessel. Vista l'Eq.(1.9), i coefficienti A_j si ottengono dall'Eq.(8.2.21), cioè

$$A_j = \frac{2\lambda_j^2}{(\lambda_j^2 c^2 + h^2 c^2) J_0^2(\lambda_j c)} \int_0^c x f(x) J_0(\lambda_j x) dx , \quad 1, 2, \dots .$$

Quindi la soluzione può essere scritta come

$$u(\rho, z) = \frac{2}{c^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 \exp(-\lambda_j z) J_0(\lambda_j \rho)}{(\lambda_j^2 c^2 + h^2 c^2) J_0^2(\lambda_j c)} \int_0^c x f(x) J_0(\lambda_j x) dx , \quad (1.10)$$

dove i λ_j sono le radici positive dell'equazione

$$\lambda J_0'(\lambda c) + h J_0(\lambda c) = 0 , \quad h > 0 .$$

Abbiamo presentato alcuni esempi per mostrare come la simmetria circolare in un problema porti alle funzioni di Bessel e la simmetria sferica alle equazioni di Legendre. Abbiamo usato la separazione delle variabili per risolvere i problemi al bordo, visto che questa tecnica ci permette di trasferire le condizioni al bordo omogenee in condizioni omogenee per le corrispondenti equazioni differenziali ordinarie. Abbiamo anche usato la nostra conoscenza del problema fisico per assegnare, quando possibile, valori particolari alle costanti di separazione.

In conclusione, vogliamo sottolineare che il metodo di separazione delle variabili non è limitato solo a problemi rappresentati in coordinate cartesiane, polari, cilindriche o sferiche. Altri sistemi di coordinate potrebbero essere usati quali: coordinate ellittiche cilindriche, coordinate coniche, coordinate paraboliche, coordinate ellissoidali e paraboloidali.

2. Esercizi

(1) Nell'Esempio(88) mostrare che

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} - \frac{\cot \theta}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\theta} = -n(n+1)$$

è equivalente a

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + n(n+1) \Theta = 0 .$$

- (2) Mostrare che nell'Esempio(88) dobbiamo prendere $D_n = F_n = 0$ anche se la regione nella quale cerchiamo la soluzione non include i punti $r = 0$, $(b, 0)$ e (b, π) . Perché tali punti vanno esclusi? (**Sugg:** Osservare la e.d.p. che deve essere risolta).
- (3) Nell'Esempio (89) dire a quale formulazione matematica corrispondono le date condizioni al bordo della formulazione.
- (4) Fare tutti i conti che portano alla soluzione del problema dato nell'Esempio (89).
- (5) Risolvere l'equazione

$$Z'' - \lambda_j^2 Z = 0, \quad Z'(0) = 0$$

e confrontare la soluzione con l'Esempio (89).

- (6) Fare i conti in dettaglio per ottenere gli LA_j nell'Esempio (89).
- (7) Usare la separazione delle variabili per ottenere le equazioni differenziali ordinarie dell'Esempio (90)
- (8) Usare la separazione delle variabili per ottenere le equazioni differenziali ordinarie dell'Esempio (91).
- (9) Spiegare perché nell'Esempio (91) si deve avere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_\rho(\rho, t) = 0.$$

- (10) Trovare una soluzione del seguente problema

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = 0, \quad \frac{du}{d\rho}(c) = 0.$$

- (11) Trovare la soluzione del problema dell'Esempio (88) supponendo che la temperatura alla superficie sia tenuta costantemente a 100° . Il risultato è in accordo con ipotesi fisiche e col il Teorema 6 del paragrafo 6.1?
- (12) Trovare la soluzione del problema dell'Esempio (88) supponendo che la temperatura alla superficie sia data da $f(\cos \theta) = \cos \theta$ (**Sugg:** Ricordare che $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$).
- (13)¹
- (a) Porre $b = c = 1$ nell'Eq.(1.2) e scrivere i primi tre termini della somma.
 - (b) Usare il risultato della parte (a) per calcolare $u(0, 0)$.
 - (c) Il risultato della parte (b) è quello aspettato? Spiegare.
- (14) Trovare la soluzione del problema dell'Esempio (89) supponendo che la temperatura della base e della superficie laterale sia zero, mentre il sopra è tenuto a temperatura 100°
- (15) Quale sarebbe il risultato della separazione delle variabili nell'Esempio (90) se la costante fosse presa di segno opposto? In questo caso il risultato sarebbe compatibile con i dati fisici? Spiegare.

¹Questa non è una sfera solida.

- (16) Nell'Esempio (90) porre $f(\rho) = 1$ ed ottenere la soluzione dell'Eq.(1.3). Tale posizione iniziale è fisicamente possibile? Spiegare
- (17) Risolvere il problema dell'Esempio (91) supponendo che il bordo esterno del disco sia tenuto a temperatura zero invece di essere isolato, mentre tutte le altre condizioni rimangono inalterate.
- (18) Trovare la temperatura stazionaria all'interno di una semisfera solida di raggio b se la superficie piana è tenuta a temperatura zero ed il resto della superficie ha una distribuzione di temperatura $f(\cos\theta)$
- (19) Modificare l'Esercizio 18 prendendo $f(\cos\theta) = 100$ e trovare la soluzione.
- (20) Una semisfera solida di raggio b ha la superficie piana tenuta a temperatura 100° e la sua superficie curva isolata termicamente. Trovare la temperatura stazionaria all'interno della semisfera.
- (21) Nell'Esempio (93) porre $f(\cos\theta) = 100$ e trovare la soluzione.
- (22) Nell'Esempio (94) porre $f(\cos\theta) = 100$ e trovare la soluzione.
- (23) Nell'Esempio (94):
- Modificare la condizione omogenea in $u(c, z) = 0$, e trovare la soluzione.
 - Dare una interpretazione fisica del problema della parte (a).
- (24) Due sfere concentriche di raggio a e b ($a < b$) sono tenute a potenziale costante, rispettivamente V_1 e V_2 . Determinare il potenziale tra le sfere.
- (25) Una superficie sferica dielettrica di raggio b è posta in un campo elettrico uniforme di intensità E in direzione dell'asse z . Determinare il potenziale dentro e fuori la sfera. (**Sugg:** Sia il potenziale interno v che quello esterno V devono soddisfare l'equazione del potenziale. Le condizioni di continuità sono

$$v(b, \theta) = V(b, \theta) , \quad 0 < \theta < \pi ,$$

e

$$K v_r(b, \theta) = V_r(b, \theta) , \quad 0 < \theta < \pi , \quad K > 0 .$$

Inoltre,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r, \theta) = -Ez = -Er \cos\theta .$$

- (26) Trovare il potenziale di una sfera conduttrice di raggio b posta in un campo elettrico uniforme di intensità E nella direzione z . (**Sugg:** Ancora $\nabla u = 0$ con $u(b, \theta) = 0$ e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \theta) = -Ez = -Er \cos\theta .)$$

(27) Mostrare che le radici positive di

$$\lambda J'_0(\lambda c) + hJ_0(\lambda c) = 0, \quad h > 0,$$

sono le stesse di

$$KJ_0(\lambda c) + \lambda cJ'_0(\lambda c) = 0, \quad K > 0.$$

(28) Usare il fatto che $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ per mostrare che

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} P_1(\cos \theta).$$

(29) Mostrare che le funzioni

$$u(\rho, \phi, z) = \exp(-\lambda z) J_n(\lambda \rho) \cos n\phi$$

sono funzioni potenziale per $n = 1, 2, \dots$ (**Sugg:** Usare le formule di ricorrenza degli Esercizi 3(e) e 19 del Paragrafo 8.2).

(30) Una membrana elastica di raggio b è bloccata lungo la sua circonferenza. La sua posizione iniziale è $C(b^2 - \rho^2)$ induce la vibrazione della membrana. Mostrare che la soluzione è

$$z(\rho, t) = 8Cb^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho\lambda_j/b) \cos(a\lambda_j t/b)}{\lambda_j^3 J_1(\lambda_j)},$$

dove i λ_j sono le radici di $J_0(\lambda) = 0$.

(31) Dato il problema

$$E.D.P. \quad v_t = k \left(v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} v_{\rho} \right), \quad 0 < \rho < a, \quad t > 0,$$

$$C.B. \quad v(a, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(\rho, t) = 0,$$

$$C.I. \quad v(\rho, 0) = u_1 - u_0 \quad 0 < \rho < a.$$

(a) Trovarne la soluzione.

(b) Spiegare come il problema risolto in (a) segue dal seguente:

Un lungo cilindro di raggio a è inizialmente riscaldato in modo uniforme alla temperatura u_1 . La sua superficie è mantenuta a temperatura costante u_0 . Mostrare che la temperatura $u(\rho, t)$ è data da

$$u(\rho, t) = u_0 + 2(u_1 - u_0) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda_j^2 kt/a^2) J_0(\lambda_j \rho/a)}{\lambda_j J_1(\lambda_j)},$$

dove i λ_j sono le radici di $J_0(\lambda) = 0$.

(32) Un cilindro solido infinito, di raggio b è inizialmente tenuto a temperatura $f(\rho)$. Per $t > 0$ la superficie bordo $\rho = b$ dissipa calore per convezione in un mezzo a temperatura zero. (Vedi Esempio (94))

(a) Scrivere il problema in termini matematici.

(b) Ottenere la soluzione

$$u(\rho, t) = \frac{2}{b^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 \exp(-\lambda_j^2 kt) J_0(\lambda_j \rho)}{(h^2 + \lambda_j^2) J_0^2(\lambda_j b)} \int_0^b x f(x) J_0(\lambda_j x) dx ,$$

dove i λ_j sono le radici positive dell'equazione

$$\lambda J_0'(\lambda c) + h J_0(\lambda b) = 0 , \quad h > 0 .$$

(c) Mostrare che se $f(\rho) = 100$ la soluzione diventa

$$u(\rho, t) = \frac{200h}{b^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda_j^2 kt) J_0(\lambda_j \rho)}{(h^2 + \lambda_j^2) J_0^2(\lambda_j b)}$$

dove i λ_j sono quelli definiti in (b).

(33) Supponiamo che la temperatura in una sfera solida non dipenda da ϕ e θ .

(a) Mostrare che l'equazione del calore può essere scritta come

$$u_t = k \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right) .$$

(b) Mostrare che se nel risultato in (a) si opera il cambiamento di variabile

$$U(r, t) = r u(r, t) ,$$

l'equazione diventa la nota equazione del calore unidimensionale

(34) Nell'esempio (88) si è risolto un problema di Dirichlet interno per una sfera di raggio b . Risolvere il problema esterno di Dirichlet, cioè per $r > b$, lasciando le altre condizioni inalterate.

(35) Risolvere il seguente problema

$$\begin{aligned} E.D.P. \quad & u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + u_{zz} = 0 \quad 0 < \rho < a , \quad 0 < z < L , \\ C.B. \quad & u(a, z) = 0 , \quad 0 < z < L , \\ & u(\rho, L) = 0 , \quad 0 < \rho < a , \\ C.I. \quad & u(\rho, 0) = 100 \quad 0 < \rho < a . \end{aligned}$$