Trasformate di Laplace

Pietro ZECCA

23 novembre 2004

Indice

1 Trasformate di Laplace. **5**

1.1 Un esempio per iniziare. 5
1.2 Definizione ed esistenza 7
1.3 Proprietà delle trasformate di Laplace 10
1.4 La trasformata inversa. 15
1.5 La convoluzione. 16
1.6 Delta di Dirac. 18
1.7 Tavole di trasformazione 21
1.8 EDO a coef. costanti 23
1.8.1 Equazione integrale di Volterra 28
1.9 Trasformata di Fourier 29
1.9.1 Trasformate di Fourier del seno e coseno. 29
1.9.2 Proprietà della Trasformata di Fourier 30
1.10 Esercizi. 34
1.10.1 Risultati di alcuni esercizi. 45

Capitolo 1

Trasformate di Laplace.

1.1 Un esempio per iniziare.

Consideriamo una funzione $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $t \to f(t)$. Se la moltiplichiamo per $e^{-s\,t}$ ed integriamo il risultato rispetto a t nell'intervallo $[0, \infty)$,si ottiene una nuova funzione nella variabile s, se l'integrale esiste.

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\; e^{-s\,t}\, dt$$

NOTA: In questo Capitolo consideriamo la variabile s come se fosse reale. Tuttavia tutti i risultati ottenuti per s *reale* e $s > a$, per qualche valore reale di a, valgono anche quando s viene considerata come variabile complessa e Re $s > a$.

Questa nuova funzione $s \to F(s)$ viene chiamata *Trasformata di Laplace* della funzione $f(t)$.

Prima di studiare le proprietà principali di questa trasformata vogliamo illustrare una delle più utili applicazioni, considerando un problema semplice.

Supponiamo di voler risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dt} - y = e^{a\,t}\ , \quad t \geq 0 \tag{1.1}$$

per valori positivi della variabile t, che soddisfa la condizione iniziale

$$y(0) = -1 \tag{1.2}$$

Invece di determinare la soluzione dell'equazione differenziale (1.1) soggetta alla condizione (1.2) con i metodi classici (noti o meno che vi siano), procediamo nel seguente modo.

Facciamo la trasformata di Laplace di entrambi i membri della Equazione (1.1), moltiplicando entrambi i membri per $e^{-s\,t}$ ed integrando il risultato rispetto a t tra 0 e $+\infty$.. Otteniamo così l'equazione

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{dt}(t)\, e^{-s\,t}\, dt - \int_0^{+\infty} y\,(t)\, e^{-s\,t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{a\,t}\, e^{-s\,t}\, dt \tag{1.3}$$

Assumiamo, ovviamente, che tutti questi integrali esistano per un qualche intervallo di definizione della variabile s.

L'integrale sulla destra si calcola facilmente

$$\int_0^{\infty} e^{-s\,t} e^{a\,t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)\,t}\, dt = \left.\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a} \tag{1.4}$$

con l'integrale che ovviamente esiste quando $s > a$ e quindi l'esponenziale è decrescente.

Il primo integrale dell' Equazione (1.3) può essere formalmente integrato per parti, nel seguente modo

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{dt}(t)\, e^{-s\,t}\, dt &= y\,(t)\, e^{-s\,t}\Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} y\,(t)\, e^{-s\,t}\, dt \qquad (1.5)\\ &= -y\,(0) + s \int_0^{+\infty} y\,(t)\, e^{-s\,t}\, dt \\ &= 1 + s \int_0^{+\infty} y\,(t)\, e^{-s\,t}\, dt \end{aligned}$$

Si è assunto che il termine $y\,(t)\, e^{-s\,t}$ tenda a zero, per qualche valore di s, quando $t \to +\infty$. Ne segue che la trasformata della derivata dy/dt viene espressa in termini della trasformata di y e del valore della condizione iniziale.

Se si sostituiscono in (1.3) i risultati di (1.4) e (1.5), si ottiene

$$(s-1) \int_0^{+\infty} y\,(t)\, e^{-s\,t}\, dt = \frac{1}{s-a} - 1$$

o, che è lo stesso

$$\int_0^{+\infty} y\,(t)\, e^{-s\,t}\, dt = \frac{a+1-s}{(s-1)\,(s-a)} \tag{1.6}$$

Come si vede, il problema originario è stato ricondotto a quello della determinazione della funzione $y\,(t)$ la cui trasformata di Laplace è data dalla funzione a destra dell'equazione (1.6). Per determinare questa funzione, usiamo il metodo della scomposizione di una funzione razionale in frazioni parziali, ed otteniamo

$$\int_0^{+\infty} y\,(t)\, e^{-s\,t}\, dt = \frac{1}{a-1}\frac{1}{s-a} - \frac{a}{a-1}\frac{1}{s-1} \tag{1.7}$$

Riguardando l'equazione (1.4) si vede che $1/s-a$ è la trasformata di $e^{a\,t}$ dal che se ne deduce che il primo termine di (1.7) è la trasformata di $e^{a\,t}/\,(a-1)$ e che il secondo sembra essere la trasformata di $-a\,e^t/\,(a-1)$. Quindi (1.7) sarà soddisfatta se scriviamo

$$y=\frac{1}{a-1}\left(e^{a\,t}-ae^t\right), \tag{1.8}$$

quando $a\neq 1$. L'espressione corrispondente quando $a=1$ può essere ottenuto andando al limite per $a\to 1$. Si ottiene

$$y=(t-1)\;e^t\,.$$

Si può verificare che la soluzione ottenuta soddisfa l'equazione differenziale.

Tuttavia, non è per niente ovvio, a questo livello, che, per esempio, la (1.8) sia l'unica soluzione del problema (1.1-1.2), nel senso che mentre è noto che il problema (1.1-1.2) ha un'unica soluzione, non è per niente scontato che la (1.8) sia l'unica soluzione della (1.7).

.Potremmo essere in una situazione in cui la (1.7) ha più soluzioni, una sola delle quali soddisfa (1.1-1.2)..

Nel proseguo, studieremo le proprietà della trasformata di Laplace e stabiliremo le regole che soddisfi al trasformata e che rendono semplice la soluzione di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, o di sistemi di equazioni.

1.2 Trasformata di Laplace: definizione ed esistenza

Indicheremo la trasformata di Laplace di una funzione $f\,:\,[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $t\to f\,(t)$ con il simbolo $\mathcal{L}\left\{f\,(t)\right\}:[a,\infty)\to\mathbb{R},\;\; s\to\mathcal{L}\left\{f\,(t)\right\}(s)$. Essa è definita, come funzione della variabile s dall'integrale

$$\mathcal{L}\left\{f\,(t)\right\}=\int_0^{+\infty}f\,(t)\,e^{-s\,t}dt \tag{1.9}$$

per quei valori di s che rendono l'integrale convergente. Useremo spesso la notazione $s\to F\,(s)$ o più semplicemente F invece di $\mathcal{L}\left\{f\,(t)\right\}$.

L'integrale (1.9) può non definire alcuna funzione di s sia per l'infinità di discontinuità di f, o per un comportamento di f intorno a 0 o all'infinito che non permette la convergenza dell'integrale..

Tuttavia la presenza di un numero finito di discontinuità a salto, non danneggia l'esistenza dell'integrale.

NOTA Discontinuità a salto t_0 è una discontinuità a salto per f se esistono sia il limite sinistro che quello destro, pur essendo diversi.

$$\lim_{t\to t_0+}f\,(t)=f\,(t_0+)\;\;;\;\;\lim_{t\to t_0-}f\,(t)=f\,(t_0-)$$

Definizione 1 *Una funzione $f(t)$ è detta* continua a tratti *in un dominio limitato, se è possibile dividere il dominio in un numero finito di intervalli tali che f è continua in ognuno di questi ed i i punti di discontinuità sono dei salti.*

Esempio 2 *La funzione definita come*

$$f(t) = \begin{cases} 0\,, & t \leq 0 \\ 1\,, & 0 < t \leq 1 \\ 0\,, & t > 1 \end{cases}$$

è continua a tratti in tutto il dominio, con $f(0-) = 0$, $f(0+) = 1$, $f(1-)(1)$, $f(1+) = 0$.
Se invece consideriamo la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0\,, & t \leq 0 \\ 1/\sqrt{t}\,, & 0 < t \leq 1 \\ 0\,, & t > 1 \end{cases}$$

essa è continua tratti in ogni intervallo che non abbia lo 0 *come punto interno o di frontiera.*

Nello sviluppare il ragionamento sulle trasformate di Laplace *considereremo solo funzioni che siano continue a tratti su ogni intervallo che non contenga lo* 0 *come estremo.*

Allora se scriviamo l'integrale (1.9) nella forma

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{t_1} f(t)\, e^{-s\,t} dt + \int_{t_1}^{T} f(t)\, e^{-s\,t} dt + \int_T^{+\infty} f(t)\, e^{-s\,t} dt \quad (1.10)$$

il secondo esiste per tutti i valori positivi di t_1 e di T. Inoltre se $f(t)$ tende ad un limite finito quando $t \to 0+$ o se $|f(t)| \to +\infty$ per $t \to 0+$ in modo tale che per qualche valore di $n < 1$ il prodotto $t^n f(t)$ è limitato in 0, allora anche il primo integrale della (1.10) esiste.

Infine, una condizione sufficiente a garantire l'esistenza del terzo integrale della (1.10) , almeno per valori di s sufficientemente grandi, è la richiesta che $f(t)$ appartenga alla classe (piuttosto estesa) delle funzioni *di ordine esponenziale.* Cioè:

Definizione 3 *Una funzione $f(t)$ è detta di ordine esponenziale se, per qualche valore a il prodotto $e^{-at}|f(t)|$ è limitato per valori di t sufficientemente grandi, $t > T$. Indicando con M il valore di questa limitazione, ne segue che per $t > T$ si ha*

$$e^{-a\,t}|f(t)| < M \text{ o che è lo stesso } |f(t)| < Me^{at} \quad (1.11)$$

Esempio 4 *Una funzione limitata è una funzione di ordine esponenziale con* $a = 0$*,* e^{3t} *è una funzione di ordine esponenziale con* $a = 3$*. Altre funzioni di ordine esponenziale sono per esempio* $e^{at}\sin kt$ *e* t^n*. La funzione* e^{t^2} *non è invece di ordine esponenziale perché* $e^{-at}e^{t^2} = e^{t^2-at}$ *è non limitata per* $t \to +\infty$ *qualunque sia il valore di* a*.*

Se $f(t)$ è di ordine esponenziale ed integrabile, allora la sua primitiva $\int_0^t f(u)\,du$, oltre ad essere continuo è anche di ordine esponenziale.

Questo non è sempre vero per le derivate delle funzioni di ordine esponenziale, anche se ciò avviene nella maggior parte dei casi interessanti nella pratica.

Come esempio di caso eccezionale, potremmo considerare la funzione $\sin e^{t^2}$ che è di ordine esponenziale (è limitata) ma la cui derivata $2te^{t^2}\sin e^{t^2}$ non è di ordine esponenziale.

Se $f(t)$ è di ordine esponenziale e quindi soddisfa la (1.11) per $t > T$, allora si ha che

$$\left|e^{-s\,t}f(t)\right| < e^{-s\,t}\cdot M\,e^{a\,t} = M\,e^{-(s-a)\,t}\,.$$

Ne segue che poiché si è assunto f continua a tratti e l'integrale $\int_T^{+\infty} f(t)\,e^{-s\,t}dt$ esiste finito se $s > a$, il terzo integrale in (1.10) esiste per $s > a$.

Quindi, per riassumere, la trasformata di Laplace di $f(t)$ esiste per s sufficientemente grande, se $f(t)$ soddisfa le seguenti condizioni:

Condizione 5 *In generale per le funzioni* $f(t)$ *supporremo le seguenti condizioni generali*
1) $f(t)$ *è continuo o continuo a tratti in ogni intervallo limitato* $t_1 \le t \le T$*, con* $t_1 > 0$;
2) $t^n\,|f(t)|$ *è limitato nell'intorno destro di* $t = 0$ *per qualche valore di* $n < 1$*;*
3) $e^{-at}\,|f(t)|$ *è limitato per* t *sufficientemente grande, per qualche valore di* $a > 0$*.*

Sebbene la trasformata possa esistere anche sotto condizioni più deboli, le condizioni qui indicate sono sufficientemente deboli da includere la maggior parte delle funzioni che si incontrano nella pratica.

Per riferimento matematico si ricorda che quando un integrale del tipo $\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-s\,t}dt$ esiste per $s = a$ esso esiste anche per tutti i valori di $s \ge a$. Inoltre, è vero che

$$\lim_{s\to c}\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-s\,t}dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-c\,t}dt \qquad \text{se } c \ge a\,, \tag{1.12}$$

che

$$\frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-s\,t}dt = \int_0^{+\infty}\frac{d}{ds}f(t)\,e^{-s\,t}dt = -\int_0^{+\infty} t\,f(t)\,e^{-s\,t}dt \quad \text{se } s \ge a \tag{1.13}$$

ed infine che

$$\int_\alpha^\beta \left[\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-s\,t}dt\right] ds = \int_0^\infty \left[\int_\alpha^\beta f(t)\, e^{-s\,t}ds\right] dt\,, \qquad \text{per } a \le \alpha \le \beta < +\infty\,. \tag{1.14}$$

Il fatto importante che ,in tutti questi casi, *per ogni trasformata di Laplace convergente*, si possano effettuare le operazioni date sotto il segno di integrale è di notevole utilità.

Il calcolo diretto della trasformata di Laplace può essere illustrato nei semplici casi seguenti:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{+\infty} e^{-s\,t}dt = -\left.\frac{e^{-s\,t}}{s}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{s} \quad (s > 0)\,. \tag{1.15}$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^{+\infty} te^{-s\,t}dt = -\left.\frac{e^{-s\,t}}{s^2}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{s^2} \quad (s > 0) \tag{1.16}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)\,t}dt = -\left.\frac{e^{-(s\,-a)t}}{s}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a} \quad (s > a)\,. \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin(at)\} &= \int_0^{+\infty} \sin(at)\; e^{-s\,t}dt = -\left.\frac{e^{-s\,t}}{s^2+a^2}\left(s\,\sin(at) + a\,\cos(at)\right)\right|_0^{+\infty} \\ &= \frac{a}{s^2+a^2} \qquad (s > 0)\,. \end{aligned} \tag{1.18}$$

1.3 Proprietà delle trasformate di Laplace

Dalle proprietà di linearità degli integrali si ottiene immediatamente la linearità della trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)\ , \qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{1.19}$$

Esempio 6 *Usando le equazioni (1.19) e (1.15) si ha:*

$$\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}e^{a\,t} - \frac{1}{2}e^{-a\,t}\right\} = \frac{1}{2(s-a)} - \frac{1}{2(s+a)} = \frac{a}{s^2-a^2}$$

Raggruppiamo le proprietà principali della trasformata nel seguente

Teorema 7

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - \left[s^{n-1}f(0+) + s^{n-2}\frac{df(0+)}{dt} + s^{n-3}\frac{d^2 f(0+)}{dt^2} + \cdots + \frac{d^{n-1}f(0+)}{dt^{n-1}}\right] \tag{1.20}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{1}{s}F(s) \tag{1.21}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{a\,t}f(t)\right\} = F(s-a) \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned}
\textit{Se } f(t) &= \begin{cases} 0\,, & t<a \\ g(t-a)\,, & t\geq a \end{cases} \quad \textit{con } a\geq 0, \quad \textit{allora} && (1.23)\\
f(t) &= H(t-a)\,g(t-a)\,, \quad \textit{da cui segue} && (1.24)\\
F(s) &= e^{-a\,s}G(s)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^n\,f(t)\right\} = (-1)^n\,\frac{d^nF(s)}{ds^n} \tag{1.25}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du\right\} = F(s)\,G(s) \tag{1.26}$$

In queste equazioni $n\in\mathbb{N}$.
In tutti i casi, esclusa l'equazione (1.20), si suppone che le funzioni $f(t)$ e $g(t)$ soddisfino le condizioni delle funzioni di ordine esponenziali. Nel caso dell'equazione (1.20) vanno imposte delle condizioni più restrittive che permettano a $\frac{d^nf(t)}{dt^n}$ di essere di ordine esponenziale. Queste condizioni le espliciteremo durante la dimostrazione.

Non daremo un dimostrazione formale, ma alterneremo dimostrazioni ed esempi di applicazione delle proprietà precedenti.

L'equazione (1.20) stabilisce una delle proprietà più importanti della trasformata di Laplace. Essa esprime la trasformata di ogni derivata di una funzione in termini della trasformata della funzione stessa e delle derivate di ordine inferiore valutate per $t=0$ (o più precisamente, il limite destro a zero del valore di queste derivate, $\lim_{t\to 0+} f^{(i)}(t)\,, i=0,...,n-1$).
Iniziamo a dimostrarla per $n=1$.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^{+\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-s\,t}dt$$

integrando per parti si ha

$$\int_0^{+\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-s\,t}dt = \left.e^{-s\,t}f(t)\right|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)\;e^{-s\,t}dt$$

se $f(t)$ è di ordine esponenziale e $df(t)/dt$ è continuo a tratti in ogni intervallo $(0,T)$.
Poiché $f(t)$ è di ordine esponenziale, il primo termine a destra tende a zero quando $t\to+\infty$. Ne segue che si ha

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0+)\;. \tag{1.27}$$

In modo analogo, nel caso $n = 2$, l'integrazione per parti da

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} &= \int_0^{+\infty} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} e^{-s\,t} dt \\
&= e^{-s\,t} \frac{df(t)}{dt}\bigg|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-s\,t} dt \\
& \quad e^{-s\,t} \frac{df(t)}{dt}\bigg|_0^{+\infty} + s\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\},
\end{aligned}$$

se df/dt è continua e d^2f/dt^2 e continuo a tratti. Se df/dt è anche di ordine esponenziale il primo termine a destra tende ancora a zero per $t \to +\infty$ ed usando l'equazione (1.27) si ottiene

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} = s^2 F(s) - sf(0+) - \frac{df(0+)}{dt} \tag{1.28}$$

le equazioni (1.27) e (1.28) sono casi particolari della (1.20). La dimostrazione generale della (1.20) segue, per induzione, dal risultato generale

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s\mathcal{L}\left\{\frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}}\right\} - \frac{d^{n-1} f(0+)}{dt^{n-1}}\,.$$

se $d^{n-1}f(t)/dt^{n-1}$ è continua e $d^n f(t)/dt^n$ continua a tratti, e se $f(t)$, $df(t)/dt$, ...,$d^n f(t)/dt^n$ sono di ordine esponenziale.

Otteniamo così il seguente risultato: *L'equazione (1.20) vale se $f(t)$ e le sue prime $n-1$ derivate sono continue su ogni intervallo del tipo $(0,T)$, se $d^n f(t)/dt^n$ è (almeno) continuo a tratti su ogni intervallo del tipo $(0,T)$, e se $f(t)$ e le sue prime n derivate sono di ordine esponenziale.*

Esempio 8 *Se consideriamo la funzione $f(t) = \sin(at)$, allora, dalla (13a) si ha*

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}\,.$$

L'equazione (1.27) allora ci dice

$$\mathcal{L}\{a\cos(at)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\sin(at)\right\} = s\frac{a}{s^2+a^2} - \sin(0)\;,$$

ed usando la (1.19) *si ha*

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}\,.$$

In particolare, per la classe di funzioni considerate, si vede che *se una funzione e le sue prime $n-1$ derivate si annullano per $t = 0$ (o per $t \to 0+$), la trasformata della sua n-esima derivata è ottenuta moltiplicando la trasformata di f per la funzione s^n.*

L'equazione (1.21) si dimostra in modo simile Usando ancora la proprietà di integrazione per parti, e ricordando che

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(u)\,du = f(t)$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} &= \int_0^{+\infty} e^{-s\,t}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\}dt \\
&= \left[\frac{e^{-st}}{-s}\int_0^t f(u)\,du\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_0^t e^{-s\,t} f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{s}F(s)\ ,
\end{aligned}$$

Il termine $\left[\frac{e^{-st}}{-s}\int_0^t f(u)\,du\right]_0^{+\infty}$ si annulla al limite superiore quando $t \to +\infty$ poiché f ed anche $\int_0^t f(u)\,du$ sono di ordine esponenziale. Allora, in generale *se una funzione è integrata nell'intervallo* $(0,t)$, *la trasformata dell'integrale si ottiene, da quella della funzione, dividendo per* s.

Se il limite inferiore dell'integrale non è zero, si ottiene facilmente la formula

$$\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(u)\,du\right\} = \frac{1}{s}F(s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(u)\,du\,. \tag{1.29}$$

(Provare a dimostrarlo).

Le equazioni (1.22) e (1.23) esprimono le cosiddette *proprietà di traslazione* della trasformata di Laplace. La dimostrazione della prima proprietà segue immediatamente dalla definizione, poiché la trasformata di $e^{a\,t}f(t)$ è data da

$$\int_0^{+\infty} e^{-s\,t}\left[e^{a\,t}f(t)\right]dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} f(t)\,dt$$

e l'ultima espressione differisce da $F(s)$ solo dal fatto che s è sostituita da $s-a$.

Ne segue che *se una funzione è moltiplicata per* $e^{a\,t}$, *la trasformata del risultato è ottenuta sostituendo la variabile* s *con* $s-a$ *nella trasformata della funzione originale*. In altri termini la trasformata della funzione $e^{a\,t}f(t)$ si ottiene da quella di $f(t)$ traslando la trasformata di $f(t)$ di a unità nella direzione positiva di s.

Esempio 9 *Se consideriamo la funzione* $f(t) = \sin(bt)$, *l'equazione (1.18) ci dice che* $F(s) = b/\left(s^2+b^2\right)$, *e la (1.22) ci dice che*

$$\mathcal{L}\left\{e^{a\,t}\sin(bt)\right\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}\,.$$

Supponiamo adesso che una funzione sia definita come $g(t)$ per $t \geq 0$ e zero per valori negativi di t. Indichiamo la sua trasformata con $G(s)$. Se trasliamo adesso la funzione di a unità nella direzione positiva per t si ottiene la funzione $g(t-a)$ per $t \geq a$ e zero altrimenti.
L'equazione (1.23) afferma che *la trasformata della funzione traslata si ottiene moltiplicando la trasformata della funzione originaria per* $e^{-a\,s}$.

Per provare questa proprietà, notiamo che poiché la funzione traslata si annulla per $0 \leq t \leq a$, la sua trasformata è definita dall'integrale

$$\int_a^{+\infty} e^{-s\,t} g(t-a)\; dt.$$

Operiamo il cambiamento di variabile $y = t - a$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} e^{-s\,t} g(t-a)\; dt &= \int_0^{+\infty} e^{-s\,(y+a)} g(y)\; dy \\ &= e^{-a\,s} \int_0^{+\infty} e^{-s\,y} g(y)\; dy = e^{-a\,s} G(s) \end{aligned}$$

in accordo all'equazione (1.23).

Esempio 10 *Sia* $f(t) = \sin(t - t_0)$ *per* $t \geq t_0$ *e* $f(t) = 0$ *per* $t < t_0$. *Poiché la trasformata di* $g(t) = \sin(t)$ *è* $G(s) = \left(1 + s^2\right)^{-1}$ *ne segue che*

$$F(s) = \frac{e^{-t_0\,s}}{1+s^2}\,.$$

D'altra parte, se questa relazione è nota, l'argomento inverso permette di determinare $f(t)$.

Per ottenere l'equazione (1.25) basta semplicemente derivare entrambi i membri dell'equazione

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-s\,t} f(t)\; dt$$

n volte rispetto alla variabile s ricordando che siamo nelle condizioni per le quali è lecito derivare sotto il segno d'integrale per tutti quei valori di s per i quali la trasformata esiste, come abbiamo affermato precedentemente.

Esempio 11 *L'equazione (1.25) afferma che per trovare la trasformata di* t^n *è sufficiente derivare la trasformata dell'unità* n *volte rispetto ad* s *e moltiplicare il risultato per* $(-1)^n$. *Si ottiene quindi*

$$\mathcal{L}\{t^n\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

dove n *è un intero positivo o zero, con la convenzione (nota) che* $0! = 1$.

1.4 La trasformata inversa.

Nell'applicazione della trasformata di Laplace, incontriamo spesso il problema inverso, cioè quello di determinare quale funzione ha una data trasformata. Usiamo la notazione $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ per indicare la trasformata inversa di Laplace della funzione $F(s)$; cioè se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, allora

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} .$$

Per determinare la trasformata inversa di una data funzione $F(s)$ è necessario trovare una funzione $f(t)$ che soddisfi l'equazione

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = F(s) .$$

Si può dimostrare che la soluzione di questa equazione (chiamata *equazione integrale*) se esiste è unica. Quindi, *se si conosce una funzione che abbia una data trasformata, questa è unica.* Questo risultato è noto come *teorema di Learch.*

> Più precisamente, il teorema di Learch afferma che due funzioni che hanno la stessa trasformata di Laplace non possono differire su di un intervallo di lunghezza positiva. Quindi, per esempio, l'equazione (1.15) mostra che la soluzione continua di
>
> $$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{s}$$
>
> è $f(t) = 1$; cioè $\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1$. Tuttavia è chiaro che se consideriamo la funzione $g(t)$ definita come zero per $t = 1$ ed uguale all'unità in tutti gli altri punti, o comunque una funzione che differisce da $f(t)$ in un numero finito di punti, il valore dell'integrale è lo stesso. Quindi questa nuova funzione è una soluzione. tale soluzioni "artificiali" non sono però di alcuna utilità nelle applicazioni.

Comunque, la ricerca diretta della trasformate inverse coinvolgono metodi legati alla teoria delle funzioni complesse di variabile complessa che vanno al di là di quanto intendiamo sviluppare.

In letteratura è facile trovare tavole con le funzioni e le loro trasformate tabulate, ed il loro uso, unito alle proprietà che sono state dimostrate sopra, è sufficiente per la maggior parte degli scopi di questo corso.

Va comunque puntualizzato che non tutte le funzioni della variabile s sono trasformate, ma che la classe di tali funzioni è fortemente ristretta dalla richiesta di continuità e dal soddisfacimento di una condizione di comportamento per $s \to +\infty$.

Un risultato utile in questa direzione è il seguente

Teorema 12 *Se $f(t)$ è continua tratti in ogni intervallo limitato $0 \leq t \leq T$ e di ordine esponenziale, allora $F(s) \to 0$ per $s \to +\infty$ ($\operatorname{Re} s \to +\infty$); inoltre $sF(s)$ è limitata per $s \to +\infty$.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue dal fatto che in questi casi

$$|f(t)| < M\,e^{a\,t} \quad \text{e} \quad \left|f(t)\,e^{-s\;t}\right| < M\,e^{-(s-a)t}$$

per qualche valore di a ed M. Ne segue che

$$\begin{aligned} |F(s)| &= \left|\int_0^{+\infty} e^{-s\,t} f(t)\;dt\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-s\,t}\,|f(t)|\;dt \\ &\leq M \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)\,t} dt \leq \frac{M}{s-a}\,. \end{aligned}$$

La tesi del teorema segue dal fatto che $\frac{M}{s-a}$ tende a zero e $s\frac{M}{s-a}$ è limitato per $s \to +\infty$ ($\operatorname{Re} s \to +\infty$). ■

Quindi, per esempio, funzioni come $1, s/(s+1), 1/\sqrt{s}$ e $\sin(s)$ non possono essere trasformate di funzioni che soddisfano le condizioni date.

Come Corollario vale il seguente risultato

Corollario 13 *Se f è continua, df/dt continua a tratti su ogni intervallo limitato $0 \leq t \leq T$ e sono entrambe di ordine esponenziale, allora*

$$\lim_{s \to +\infty} s\,F(s) = f(0+) \tag{1.30}$$

Il risultato segue dal fatto che il teorema precedente stabilisce che il membro sinistro dell'equazione (1.27) tende a zero per $s \to +\infty$. Esso è utile in quei casi quando è necessario conoscere solo il *valore iniziale* di f e la trasformata di f è nota.

1.5 La convoluzione.

Accade frequentemente che, sebbene una data funzione $H(s)$ non sia la trasformata di una funzione nota, essa possa essere espressa come il prodotto di due funzioni, ognuna delle quali è la trasformata di una funzione nota. E' cioè possibile scrivere

$$H(s) = F(s)\;G(s)$$

dove $F(s)$ e $G(s)$ sono le trasformate di $f(t)$ e $g(t)$ rispettivamente..

Supponiamo che queste funzioni soddisfino la Condizione (5). In questo caso, l'equazione (1.26) stabilisce che il prodotto $F(s)\;G(s)$ è la trasformata della funzione definita dall'integrale $\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du$. Questo integrale è chiamato *la convoluzione* o *prodotto di convoluzione* di f e g e viene indicato con il simbolo $f * g$. Il prodotto di convoluzione è commutativo, cioè $f * g = g * f$.

Prima di dimostrare la (1.26) ne illustriamo una sua applicazione.

Esempio 14 *Vogliamo determinare* $\mathcal{L}^{-1}\{a/s\,(s-a)\}$*. Ricordando la (1.15) e la (1.17) e scrivendo la funzione data nella forma*

$$\frac{a}{s}\frac{1}{s-a} = F(s)\,G(s)$$

si ha che $f(t) = a$ *e* $g(t) = e^{a\,t}$*. L'equazione (1.26) stabilisce che il prodotto è la trasformata della funzione*

$$f * g = \int_0^t a\,e^{au}du = e^{a\,t} - 1\,.$$

Se si intercambiano le funzioni, si ha

$$g * f = \int_0^t a\,e^{a(t-u)}du = a\,e^{a\,t}\int_0^t e^{-au}du = a\,e^{a\,t}\frac{1}{a}\left(1 - e^{-a\,t}\right) = e^{a\,t} - 1$$

esattamente come prima.
In questo caso lo stesso risultato può essere raggiunto senza fare uso della convoluzione, usando la (1.21) e la (1.17), o espandendo il prodotto con il metodo delle somme parziali nella forma

$$\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s}$$

ed usando poi le (1.15) e (1.17).

L'equazione (1.26) può essere ottenuto formalmente come segue. dalla definizione, il membro destro della (1.26) può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} F(s)\,G(s) &= \left[\int_0^{+\infty} e^{-s\,v} f(v)\,dv\right]\int_0^{+\infty} e^{-s\,u} g(u)\,du \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-s\,(u+v)} f(v)\,g(u)\,dv\,du \\ & \int_0^{+\infty} g(u)\left[\int_0^{+\infty} e^{-s\,(u+v)} f(v)\,dv\right]du \end{aligned}$$

avendo usato u e v come variabili di integrazione per le due trasformate. Se nell'integrale interno operiamo il seguente cambiamento di variabile

$$v = t - u\,,\quad dv = dt$$

ne segue che

$$\int_0^{+\infty} e^{-s\,(u+v)} f(v)\,dv = \int_u^{+\infty} e^{-s\,t} f(t-u)\,dt\,,$$

quindi

$$F(s)\,G(s) = \int_0^{+\infty} g(u)\left[\int_u^{+\infty} e^{-s\,t} f(t-u)\,dt\right]du\,.$$

Scambiando l'ordine di integrazione nell'integrale doppio e cambiando i limiti di integrazione di conseguenza, come indicato in Figura (1.5) , otteniamo formalmente

$$\begin{aligned} F(s)\, G(s) &= \int_0^{+\infty} \left[\int_u^{+\infty} e^{-s\,t} f(t-u)\; g(u)\; du \right] dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s\,t} \left[\int_0^{t} f(t-u)\; g(u)\; du \right] dt \\ &= \mathcal{L}\left\{ \int_0^{t} f(t-u)\; g(u)\; du \right\} \end{aligned}$$

in accordo alla (1.26). Lo scambio di ordine di integrazione è legittimo poiché f e g sono integrabili.

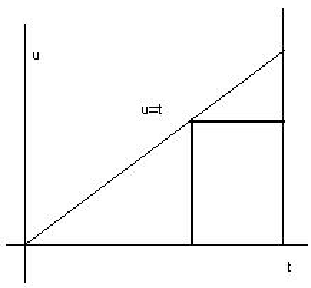


Figura 1.5

1.6 Delta di Dirac.

Abbiamo considerato il caso delle funzioni di ordine esponenziale. Vogliamo adesso trattare il caso della funzione di Dirac, che non solo non è un una funzione di ordine esponenziale, ma di fatto non è neanche una funzione, ma si presta bene a considerare le forze di tipo impulsivo.

Consideriamo la funzione $f(t)$ così definita

$$f(t) = \begin{cases} 1/t_0\,, & 0 < t < t_0 \\ 0 & t \geq t_0 \end{cases}$$

si ha che

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \int_0^{t_0} \frac{1}{t_0}\, dt = 1$$

qualunque sia il valore di t_0. La trasformata di questa funzione è

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{t_0} \int_0^{+\infty} e^{-s\,t} dt = \frac{1 - e^{-s t_0}}{s\, t_0}\,.$$

Se adesso facciamo il limite per $t_0 \to 0+$ il valore di $f(t)$ nell'intervallo $(0, t_0)$ cresce senza limiti, mentre, allo stesso tempo, la lunghezza dell'intervallo $(0, t_0)$ si stringe verso zero in modo tale che $\int_0^{t_0} f(t)\, dt$ mantiene il valore unitario.

passando al limite, siamo di fronte ad un oggetto matematico che vale *"infinito"* nel punto $t = 0$ e *zero* altrove, ma che mantiene la proprietà che che il suo integrale attraverso $t = 0$ rimane unitario. Per quanto riguarda la trasformata di Laplace, facendo uso della regola dell'Hospital, si ottiene

$$\lim_{t_0 \to 0+} \frac{1 - e^{-st_0}}{s\, t_0} = \lim_{t_0 \to 0+} \frac{s\, e^{-st_0}}{s} = 1\,.$$

Si ha così che *la trasformata di $f(t)$ tende all'unità per $t \to 0+$.*

Se t rappresenta il tempo e $f(t)$ la forza, allora $\int_0^{t_0} f(t)\, dt$ rappresenta *l'impulso* generato dalla forza $f(t)$ agente nell'intevallo $(0, t_0)$. Ne segue che, per $t \to 0+$ possiamo dire, con abuso di linguaggio, che siamo di fronte ad *un impulso unitario al tempo $t = 0$ dovuto ad una forza "infinita" agente su un intervallo di tempo di ampiezza zero.* Alla luce di questa interpretazione, la forma limite della $f(t)$ viene chiamata *funzione unitaria di impulso.* Se la indichiamo col simbolo $\delta(t)$ siamo portati a scrivere che

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1\,. \tag{1.31}$$

La "funzione" $\delta(t)$ è spesso chiamata Delta di Dirac.

Se, per esempio, t rappresenta la *distanza* lungo l'asse di una sbarra e $f(t)$ rappresenta l'intensità del *carico distribuito*, allora $\delta(t)$ può essere considerata come la rappresentazione formale di una *unità di carico concentrata*, applicata nel punto $t = 0$.

> **NOTA** Il procedimento descritto può essere operato anche con altri tipi di funzione, in particolare con funzioni che sono continue e anche con derivate continue come ad esempio $\delta_n(t) = 2\sqrt{n/\pi}\exp\left\{-n\, x^2\right\}\ 0 \le x + \infty$ (funzioni gaussiane). Per ognuna di queste l'integrale nel dominio vale l'unità e nel passaggio al limite per $n \to +\infty$ si ha che $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}\{\delta_n(t)\} = 1$. Tutte le gaussiane sono infinitamente derivabili.

Allo stesso modo, se consideriamo la funzione

$$g(t) = \begin{cases} -\frac{1}{t_0^2}\,, & 0 < t < t_0 \\ \frac{1}{t_0^2}\,, & t_0 < t < 2t_0 \\ 0 & t \ge 2\,t_0 \end{cases}$$

ne segue che

$$\int_0^{+\infty} (t - t_0)\, g(t)\, dt = \int_0^{2t_0} (t - t_0)\, g(t)\, dt = 1\,.$$

Cioè, *il momento della forza* $g\,(t)$, relativamente al punto t_0 è unitario ed il valore rimane se mandiamo $t_0 \to 0+$.

La trasformata di $g\,(t)$ vale

$$\mathcal{L}\,\{g\,(t)\} = -\frac{1}{t_0^2}\left\{\int_0^{t_0} e^{-s\,t}dt - \int_{t_0}^{2t_0} e^{-s\,t}dt\right\} = -\frac{1}{s\,t_0^2}\left(1-e^{-s\,t_0}\right)^2 \;.$$

Usando nuovamente la regola dell'Hospital per calcolare il limite della trasformata, per $t_0 \to 0+$ si ottiene

$$\lim_{t_0\to 0+} -\frac{1}{s\,t_0^2}\left(1-e^{-s\,t_0}\right)^2 = -s\,.$$

la forma limite della $g\,(t)$ per $t_0 \to 0+$ è spesso indicata come *funzione di dipolo* a causa della sua interpretazione nella teoria dei campi elettrici o in *dinamica dei fluidi.* Se indichiamo con $\delta'\,(t)$ il *negativo* del risultato, si scrive formalmente

$$\mathcal{L}\left\{\delta'\,(t)\right\} = s\,. \tag{1.32}$$

Interpretando ancora t come la distanza e $g\,(t)$ come *intensità del carico* $\delta'\,(t)$ può essere considerata come il *momento unitario negativo concentrato* applicato in $t = 0$.

Queste funzioni, indicate a volta come *funzioni singolari*, vengono trattate con rigore da un ramo della matematica chiamato *teoria delle distribuzioni* e sono di uso frequente nelle applicazioni fisiche. Sebbene esse non rispettino la condizione (7) e sebbene di fatto non siano funzioni, tuttavia *se il loro uso formale porta a risultati che possono essere interpretati fisicamente, allora nella pratica il risultato ottenuto può essere accettato come corretto.*

Se la singolarità si ha nel punto $t = a$ piuttosto che per $t = 0$ indichiamo le corrispondenti funzioni con il simbolo $\delta\,(t-a)$ e $\delta'\,(t-a)$ e ri-applicando il procedimento precedente si ottengono i seguenti risultati formali

$$\mathcal{L}\,\{\delta\,(t-a)\} = e^{-a\,s} \tag{1.33}$$

$$\mathcal{L}\left\{\delta'\,(t-a)\right\} = s\,e^{-a\,s} \tag{1.34}$$

Da notare che lo stesso risultato si ottiene applicando la proprietà di traslazione (1.23) alle equazioni (1.31) e (1.32).

1.7 Tavole di trasformazione

Ricordiamo qui di seguito alcune delle principali proprietà delle trasformate e riportiamo sotto una tabella con le trasformate di alcune funzioni semplici

Funzioni	*Trasformate*
$f(t)$	$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} \frac{d^{k-1} f(0)}{dt^{k-1}}$
$\int_0^t f(u)\,du$	$\frac{1}{s} F(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$\begin{cases} f(t-a), & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$	$e^{-as} F(s) \quad (a > 0)$
$\int_0^t f(u)\, g(t-u)\,du$	$F(s)\,G(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{+\infty} F(u)\,du$

Funzioni	*Trasformate*
1	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{1}{a-b}\left(e^{-bt} - e^{-at}\right)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{b-a}\left(be^{-bt} - ae^{-at}\right)$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
$\sin at$	$\frac{a}{a^2+s^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{a^2+s^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$t \sin at$	$\frac{2as}{(a^2+s^2)^2}$
$t \cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(a^2+s^2)^2}$
$\sin at - at \cos at$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$
$t \sinh at$	$\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$
$t \cosh at$	$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$
$at \cosh at - \sinh at$	$\frac{2a^3}{(s^2-a^2)^2}$

Funzioni	*Trasformate*
$e^{-bt} \sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$
$e^{-bt} \cos at$	$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$
$\sin at \cosh at - \cos at \sinh at$	$\frac{4a^3}{s^4+4a^4}$
$\sin at \sinh at$	$\frac{2a^2 s}{s^4+4a^4}$
$\sinh at - \sin at$	$\frac{2a^3}{s^4-a^4}$
$\cosh at - \cos at$	$\frac{2a^2 s}{s^4-a^4}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-a)$	$e^{-a\,s}$
$\delta'(t)$	s
$\delta(t)$	$se^{-a\,s}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n > 0)$	$\frac{1}{s^n}$
$t^n \quad (n > -1)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!} \quad (n > 0)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$\frac{(n-1)-at}{(n-1)!} t^{n-2} e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^n}$

Sebbene la trasformata di funzioni semplici possa, spesso, essere trovata direttamente dalle tavole (ne esistono anche molto estese), il calcolo della trasformata inversa richiede di frequente una certa dose di amnipolazione e calcolo.

Si vuole determinare la trasformata inversa della funzione $\frac{s^2}{(s^2+4)^2}$ .Per iniziare notiamo che

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} = \frac{1}{4}t\,\sin 2t\,.$$

Osserviamo adesso che le tavole ci dicono che nel caso in cui $f(0)=0$ si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{sF(s)\right\} = \frac{df}{dt}\,, \tag{1.35}$$

ne segue che

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}t\,\sin 2t\right) = \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{t}{2}\cos 2t\,.$$

Quando una data $F(s)$ è una funzione razionale, rapporto di due polinomi, il metodo delle frazioni parziali può essere usato per determinare l'antitrasformata, usando le tavole.

Supponiamo che

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}\,,$$

dove $D(s)$ è un polinomio di grado n con n zeri reali e distinti $a_1, a_2, \cdots, a_n$ e $N(s)$ è un polinomio di grado $n-1$ o minore, ne segue che

$$\begin{aligned}
\frac{N(s)}{D(s)} &= \frac{N(a_1)}{D'(a_1)}\frac{1}{s-a_1} + \frac{N(a_2)}{D'(a_2)}\frac{1}{s-a_2} + \cdots \frac{N(a_n)}{D'(a_n)}\frac{1}{s-a_n} \\
&= \sum_{m=1}^{n}\frac{N(a_m)}{D'(a_m)}\frac{1}{s-a_m}\,,
\end{aligned}$$

ne segue che

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{N(s)}{D(s)}\right\} = \sum_{m=1}^{n}\frac{N(a_m)}{D'(a_m)}e^{a_m t} \tag{1.36}$$

Se gli zeri di $D(s)$ hanno molteplicità maggiore di uno o se sono complessi, bisogna ricorrere ai metodi generali di espansione nelle frazioni parziali.

Esempio 15 *Determinare l'antitrasformata della funzione* $\frac{s^2+1}{s^3+3s^2+2s}$.
Si ha che $N(s) = s^2+1$ *e* $D(s) = s^3+3s^2+2s = s(s+1)(s+2)$. *Le radici di* $D(s)$ *sono:* $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = -2$. *Poiché* $D'(s) = 3s^2+6s+2$ *, si ha che*

$$\begin{aligned}
N(a_1) = 1\,, \quad D'(a_1) = 2\,,\\
N(a_2) = 2\,, \quad D'(a_2) = -1\,,\\
N(a_3) = 5\,, \quad D'(a_3) = 2\,,
\end{aligned}$$

quindi l'equazione (1.36) dice che

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s^3+3s^2+2s}\right\} = \frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-t}\,.$$

Esempio 16 *Per determinare l'antitrasformata di* $1/\left(s+1\right)\left(s^2+1\right)$*, espandiamo la funzione nella forma*

$$\frac{1}{\left(s+1\right)\left(s^2+1\right)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+1}.$$

Si vede facilmente che $A=-B=C=1/2$*. Da cui*

$$\frac{1}{\left(s+1\right)\left(s^2+1\right)}=\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+1}.$$

L'osservazione delle tavole permette di affermare che

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+1\right)\left(s^2+1\right)}\right\}=\frac{1}{2}\left(e^{-t}+\sin t-\cos t\right).$$

Esempio 17 *Calcolare* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\}$.
Si ha che

$$\frac{s}{s^2+4s+5}=\frac{s}{\left(s+2\right)^2+1}=\frac{\left(s+2\right)-2}{\left(s+2\right)^2+1}.$$

dalle tavole si ricava che

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\}=e^{-2t}\left(\cos t-2\sin t\right).$$

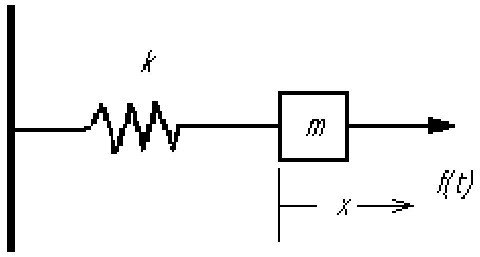
1.8 Applicazione alle Equazioni Differenziali lineari a coefficienti costanti.

La proprietà $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f\left(t\right)\right\}=s^nF\left(s\right)-\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}\frac{d^{k-1}f(0)}{dt^{k-1}}$ fa si che ogni equazione differenziale a coefficienti costanti, *con condizioni date per* $t=0$, può essere trasformata in una *equazione algebrica lineare* che determina la trasformata di Laplace della soluzione, sempre che il termine noto soddisfi la proprietà di ammettere trasformata.

la soluzione si trova quindi antitrasformando la funzione così determinata. Se il termine noto è di ordine esponenziale, la stessa proprietà vale per la soluzione e le sue derivate.

Per esemplificare il ragionamento fatto sopra, consideriamo il caso di *vibrazioni forzate* di una massa m attaccata ad una molla di costante elastica

k.



Oscillatore forzato

L'equazione differenziale che regge il moto della massa m è $\left(\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}\right)$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = f\left(t\right)\,. \tag{1.37}$$

Inoltre, se supponiamo la massa a riposo all'equilibrio per $t = 0$ si hanno le condizioni iniziali

$$x\left(0\right) = \frac{dx}{dt}\left(0\right) = 0 \tag{1.38}$$

Se indichiamo con $X\left(s\right)$ e $F\left(s\right)$ le trasformate di $x\left(t\right)$ e $f\left(t\right)$ rispettivamente, la trasformata dell'equazione (1.37) diventa

$$ms^2X\left(s\right) + kX = F\left(s\right)\,.$$

Indicando con

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{1.39}$$

la trasformata della soluzione del problema è data da

$$X\left(s\right) = \frac{1}{m}\frac{F}{s^2+\omega_0^2}\,. \tag{1.40}$$

Poiché $1/\left(s^2+\omega_0^2\right)$ è la trasformata di $\left(\sin\omega_0 t\right)/\omega_0$, questo prodotto può essere considerato come la trasformata del prodotto di convoluzione delle funzioni $\left(\sin\omega_0 t\right)/\omega_0$ e $f\left(t\right)$, si ha perciò

$$x\left(t\right) = \frac{1}{m\,\omega_0}\int_0^t f\left(u\right)\sin\omega_0\left(t-u\right)\,du\,. \tag{1.41}$$

Tuttavia, in molte occasioni, invece di usare la formula generale (1.41), è più conveniente determinare la soluzione direttamente dall'Equazione (1.40). Consideriamo alcuni casi interessanti.

(1) Supponiamo che un impulso istantaneo di ampiezza I sia applicato al tempo $t = 0$. Allora, $f(t) = I\delta(t)$ e $F(s) = I$, da cui si ha

$$X(s) = \frac{I}{m}\frac{1}{s^2+\omega_0^2}\,, \quad x(t) = \frac{I}{m\omega_0}\sin\omega_0 t \quad (t > 0)\ . \tag{1.42}$$

Quindi, in questo caso, il moto è una vibrazione sinusoidale di ampiezza $I/m\omega_0$ e frequenza angolare ω_0. ω_0 è anche chiamato *frequenza propria* del sistema. Da notare, che in questo caso la condizione iniziale $x'(0) = 0$ apparentemente non è soddisfatta. Tuttavia, la velocità non si può annullare quando si applica un impulso perché la quantità di moto $mv = I$ deve essere impartito dall'impulso al sistema, in accordo alla legge di moto di Newton. Possiamo supporre che x e $v = dx/dt$ siano zero su un intervallo infinitesimo di tempo che segue $t = 0$ e che in conseguenza dell'applicazione dell'impulso la velocità, improvvisamente assume il valore I/m mentre si instaura il moto sinusoidale. Interpretazioni di questo tipo sono spesso necessarie quando si trattano problemi in cui compaiono "funzioni singolari".

2) Se viene applicata una forza esterna di tipo sinusoidale, $f(t) = A\sin\omega t$, ne segue che

$$X(s) = \frac{A\omega}{m}\frac{1}{\left(s^2+\omega_0^2\right)\left(s^2+\omega^2\right)}\,,$$

o, dopo aver espanso in termini di frazioni parziali

$$X(s) = \frac{A\omega}{m\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\left(\frac{1}{s^2+\omega_0^2} - \frac{1}{s^2+\omega^2}\right)$$

da cui, antitrasformando, si ottiene

$$x(t) = \frac{A\omega}{m\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\left(\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$$

o, che è lo stesso

$$x(t) = \frac{A}{m\omega_0\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\left(\omega\sin\omega_0 t - \omega_0\sin\omega t\right)\ . \tag{1.43}$$

Se $\omega \neq \omega_0$, il moto è composto da due *modi* di vibrazione, una (il *modo naturale*) alla frequenza naturale ω_0, mentre l'altro (il *modo forzato*) alla frequenza imposta dalla forza. Nel caso in cui il sistema venga eccitato alla sua frequenza naturale ($\omega = \omega_0$), il moto può essere determinato considerando la forma limite dell'equazione (1.43) per $\omega \to \omega_0$, o più facilmente, notando che in questo caso

$$X(s) = \frac{A\omega_0}{m}\frac{1}{\left(s^2+\omega_0^2\right)^2}\,.$$

Usando le tavole si vede che

$$x(t) = \frac{A}{2m\omega_0^2}\left(\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t\right) . \tag{1.44}$$

L'ultimo termine dell'equazione (1.44) mostra che, quando la frequenza di eccitazione è uguale alla frequenza naturale, l'ampiezza dell'oscillazione cresce indefinitamente col tempo. Questo caso è chiamato *risonanza.*

In modo analogo, se $f(t) = A\cos\omega_0 t$ ne segue che

$$x(t) = \frac{A}{2m\omega_0} t\sin\omega_0 t\,.$$

3) Se, per $t > 0$ si applica una forza costante $f(t) = A$ ne segue che

$$X(s) = \frac{A}{m}\frac{1}{s\left(s^2+\omega_0^2\right)} = \frac{A}{m\omega_0^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right),$$

e controllando dalle tavole, si ha

$$x(t) = \frac{A}{m\omega_0^2}\left(1 - \cos\omega_0 t\right) . \tag{1.45}$$

In questo caso, la massa oscilla con la sua frequenza naturale tra i punti $x = 0$ e $x = 2A/m\omega_0^2 = 2A/k$, quando lo smorzamento è assente.

4) Se si considera di applicare una forza costante nell'intervallo finito $0 < t < t_0$ e nessuna forza agisce per $t > t_0$, ne segue che la trasformata di Laplace di $f(t)$ è data da $F(s) = (A/s)\left(1 - e^{-st_0}\right)$, da cui

$$X(s) = \frac{A}{m}\frac{1-e^{-st_0}}{s\left(s^2+\omega_0^2\right)} = \frac{A}{m}\left[\frac{1}{s\left(s^2+\omega_0^2\right)} - \frac{e^{-st_0}}{s\left(s^2+\omega_0^2\right)}\right] .$$

La trasformata inversa del primo termine è data dalla Equazione (1.45) e, ricordando la regola di trasformazione per la traslazione, si ha che

$$x(t) = \frac{A}{m\omega_0^2}\left\{\left(1-\cos\omega_0 t\right) - H(t-t_0)\left[1 - \cos\omega_0(t-t_0)\right]\right\} . \tag{1.46}$$

Ne segue che nell'intervallo $0 < t < t_0$ la massa oscilla alla sua frequenza naturale ($H(t-t_0)$ è zero per $t < t_0$) con ampiezza A/k, intorno al punto $x = A/k$; tuttavia, dopo che la forza si annulla (per $t > t_0$) la massa oscilla intorno al punto di equilibrio ($x = 0$), alla stessa frequenza, ma con ampiezza $(2A/k)\sin\frac{1}{2}\omega_0 t_0$. Se $t_0 = 2\pi/\omega_0 = T$, dove T è il periodo del modo naturale di vibrazione, allora $x(t) = 0$ per $t \geq t_0$, così che la massa ritorna nella posizione di equilibrio quando la forza viene rimossa, e rimane poi in quella posizione.

L'uso della trasformata di Laplace è particolarmente vantaggioso nel caso si consideri un sistema di equazioni differenziali lineari. Illustriamo il metodo usando un esempio.

Vogliamo risolvere il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} - y &= e^t\,, \\ \tfrac{dy}{dt} + x &= \sin t\,, \end{aligned} \tag{1.47}$$

che soddisfa le condizioni

$$x\,(0) = 1\,, \quad y\,(0) = 0\,. \tag{1.48}$$

Le trasformate delle (1.47) che soddisfano le condizioni (1.48) sono

$$\begin{aligned} sX\,(s) - Y\,(s) &= \frac{1}{s-1} + 1 \\ X\,(s) + sY\,(s) &= \frac{1}{s^2+1} \end{aligned}$$

dalle quali, risolvendo, si ottiene

$$\begin{aligned} X\,(s) &= \frac{s}{(s-1)\,(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{\left(s^2+1\right)^2} \\ Y\,(s) &= \frac{s}{(s-1)\,(s^2+1)} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{\left(s^2+1\right)^2} \end{aligned}$$

Usando il metodo delle frazioni parziali, si ottiene

$$\begin{aligned} X\,(s) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{\left(s^2+1\right)^2}\right] \\ Y\,(s) &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}\right] \end{aligned} \tag{1.49}$$

e con l'uso delle tavole per la valutazione dell'antitrasformate si ha

$$\begin{aligned} x\,(t) &= \frac{1}{2}\left(e^t + 2\sin t + \cos t - t\cos t\right) \\ y\,(t) &= \frac{1}{2}\left(-e^t - \sin t + \cos t + t\sin t\right) \end{aligned} \tag{1.50}$$

Per finire, vogliamo illustrare l'esistenza di casi eccezionali che si possono verificare nel caso di sistemi di equazioni.

Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + y &= 0\,, \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y &= e^t\,, \end{aligned} \tag{1.51}$$

che soddisfa le condizioni

$$x\,(0) = 1, \;\; x'\,(0) = 0, \;\; y\,(0) = 0\,. \tag{1.52}$$

Le equazioni trasformate sono

$$\begin{aligned} sX(s)+Y(s) &= 1 \\ s^2X(s)+(s+1)Y(s) &= s+\frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

dalle quali segue che

$$X(s)=\frac{2}{s}-\frac{1}{s-1}\,, \quad Y(s)=\frac{1}{s-1}\,. \tag{1.53}$$

la trasformata inversa di queste espressioni sono

$$x(t)=2-e^t\,, \quad y(t)=e^t\,. \tag{1.54}$$

Tuttavia, queste soluzioni non soddisfano le condizioni iniziali (1.52). La soluzione generale del sistema (1.51), che può essere trovata con i metodi tradizionali, è della forma

$$x(t)=C-e^t\,, \quad y(t)=e^t$$

dove C è una costante arbitraria. Ne segue che solo il valore iniziale di $x(t)$ è arbitrario, quindi il problema, così come è stato impostato, non è risolubile.

L'esempio mostra che, *nel caso di sistemi di equazioni*, sebbene il metodo della trasformata di Laplace dia la corretta soluzione, se questa esiste, esso può dare luogo a soluzioni erronee che non soddisfano le condizioni iniziali date. Quindi, nei casi dubbi, va sempre controllato che le condizioni iniziali siano soddisfatte.

1.8.1 Equazione integrale di Volterra

L'equazione

$$y(t)=f(t)+\int_0^t y(s)\,g(t-s)\;ds \tag{1.55}$$

è chiamta *equazione integrale di Volterra.* La funzione $y(t)$ è incognita, mentre f e g sono date.

L'approcio alla soluzione di questa equazione con l'uso della trasformata di Lapalce è particolarmente conveniente.

Come si note, infatti, questa equazione puo' anche essere formalmente scritta nella forma

$$y(t)=f(t)+(y*g)(t)$$

dove $f*g$ indica il proddotto di convoluzione delle due funzioni.

Applicando la trasformata di Laplace ad entrambi i membri dell'equazione, si ottiene:

$$Y(s)=F(s)+Y(s)\,G(s) \tag{1.56}$$

da cui

$$Y(s) = \frac{F(s)}{1 - G(s)}.$$

L'uso della antitrasformata permette di trovare $y(t)$.

Esempio 18 *Consideriamo l'equazione integrale*

$$y(t) = \sin t + \int_0^t \sin 2(t-u)\, y(u)\, du$$

prendendo la trasformata di Laplace di questa equazione si ha:

$$Y(s) = \frac{1}{1+s^2} + \frac{2}{4+s^2} Y(s)$$

o che è lo stesso

$$Y(s) = \frac{\left(4+s^2\right)}{\left(1+s^2\right)\left(2+s^2\right)} = \frac{3}{1+s^2} - \frac{2}{2+s^2}.$$

invertendo si ottiene

$$y(t) = 3\sin t - \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}t\right).$$

1.9 Trasformata di Fourier

Vogliamo qui definire la trasformata di Fourier di una funzione. Esiste una corrispondenza stretta tra trasformata di Laplace e Fourier, quest'ultima essendo definita da

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \overline{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ist}\, dt. \tag{1.57}$$

Si può dimostrare la trasformata di Fourier è invertibile e che la trasformata inversa è definita da

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\overline{f}(s)\right\} = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(s)\, e^{ist} ds.$$

1.9.1 Trasformate di Fourier del seno e coseno.

Se $f(t)$ è una funzione *pari* $(f(t) = f(-t))$, ricordando che $e^{-ist} = \cos st - i\sin st$, e che il prodotto di una funzione pari con una dispari è dispari, si può definire la trasformata di Fourier dei coseni come

$$\mathcal{F}_C\{f(t)\} = \overline{f_C}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, \cos st\, dt. \tag{1.58}$$

con inversa

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\overline{f}_C(s)\right\} = f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \overline{f}(s)\cos st\, ds$$

In modo del tuto analogo, se f è *dispari*, la trasformata di Fourier dei seni è definita da

$$\mathcal{F}_S\{f(t)\} = \overline{f_S}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\sin st\, dt\,. \tag{1.59}$$

con inversa

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\overline{f_S}(s)\right\} = f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \overline{f}(s)\sin st\, ds$$

Le tre trasformazioni sopra definite, (1.57÷1.59) sono lineari. Funzioni che siano definite a priori solo per $t \geq 0$, possono essere estere a tutto $\mathbb{R}$ per parità o per disparità.

Esempio 19 *Trovare la trasformata di Fourier della funzione e^{-t} pensata definita per $t \geq 0$ ed estesa a tutta la retta reale per disparità.*
Usando la (1.59) si ottiene

$$\mathcal{F}_S\left\{e^{-t}\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\sin st\, dt = \frac{s}{s^2+1}\,.$$

La formula per la trasformata inversa ci dice che

$$e^{-t} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{s}{s^2+1}\sin st\, ds\,,\quad t>0$$

da cui,fissato $t=k$, con un minimo di elaborazione si ha che

$$\frac{\pi}{2}e^{-k} = \int_0^{+\infty}\frac{x\,\sin kx}{x^2+1}\,dx, \tag{1.60}$$

mentr, per $k<0$ si ha

$$-\frac{\pi}{2}e^{k} = \int_0^{+\infty}\frac{x\,\sin kx}{x^2+1}\,dx, \tag{1.61}$$

1.9.2 Proprietà della Trasformata di Fourier

Convoluzione

Una osservazione della struttura della trasformata di Fourier ci dice immediatamente che per essa vale una proprietà di trasformazione analoga a quella della convoluzione per la trasformata di Laplace

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)\,g(u)\,du\right\} = \overline{f}(s)\,\overline{g}(s)\ .$$

dove $\overline{f}(s)$ e $\overline{g}(s)$ sono le trasformate di Fourier di f e g rispettivamente.

Trasformata della derivata

Ancora, se conosciamo la trasformata di $f(t)$, integrando per parti si ha che

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt}\, e^{-ist}\, dt \\
&= \left[f(t)\, e^{-ist}\right]_{-\infty}^{+\infty} + i\, s \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\; e^{-ist}\, dt = i\, s\, \overline{f}(s)
\end{aligned}$$

sempre che $f(t) \to 0$ per $t \to \pm\infty$, (condizione necessaria per l'esistenza dell'integrale).

In modo del tutto simile si ottiene che

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} = (i\, s)^2\; \overline{f}(s)$$

ed in generale, supponendo che $f^{(n-1)}(t) \to 0$ per $t \to \pm\infty$, si ha

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = (i\, s)^n\; \overline{f}(s)\ .$$

Assumendo che $f'(t)$ sia una funzione pari (trasformata di Fourier del coseno) si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_C\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} &= \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} \cos st\, dt \\
&= \left[f(t) \cos t\right]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} f(t)\; \sin st\, dt \\
&= -f(0) + s\, \overline{f_S}(s)
\end{aligned}$$

assumendo sempre che $f(t) \to 0$ per $t \to +\infty$.

Ancora, si ha che

$$\mathcal{F}_C\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} = -f'(0) - s^2\, \overline{f_C}(s)$$

In modo del tutto analogo, assumendo che $f'(t)$ sia una funzione dispari (trasformata di Fourier del seno) si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_S\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} &= \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} \sin st\, dt \\
&= \left[f(t) \sin t\right]_0^{+\infty} - s \int_0^{+\infty} f(t)\; \cos s\, t\, dt \\
&= -s\, \overline{f_C}(s)
\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{F}_S\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} = s f'(0) - s^2\, \overline{f_S}(s)\ .$$

Esempio 20 *Trave elastica di lunghezza infinita soggetta ad un carico distributo.*
E' noto che la deflessione $u(x)$ di una barra elastica, soggetta ad un carico distribuito $w(x)$ (in Newton/metro) è data dalla seguente equazione differenziale

$$E\ I\ u'''' + k\ u = w(x)\ ,$$

dove E, I e k sono costanti fisiche (Modulo di Young, momento di inerzia e costante di elasticità).
Per risolvere l'equazione utilizziamo il metodo della trasformata di Fourier, ottenendo

$$\mathcal{F}\left\{E\ I\ u'''' + k\ u\right\} = \mathcal{F}\{w\}$$

Per la linearità della trasformata si ha

$$E\ I\mathcal{F}\left\{\ u''''\right\} + k\mathcal{F}\{\ u\} = \mathcal{F}\{w\}\,.$$

Si ottiene così

$$E\ I\,(i\ s)^4\,\overline{u} + k\ \overline{u} = \overline{w},$$

dove, ovviamente $\overline{u}$e $\overline{w}$ sono, rispettivamente, le trasformate di u e w e si è supposto che u, u', u'', u''' tendano a zero per $x \to \pm\infty$ e che $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|u^{(j)}(x)\right| dx$ converga per $j = 0, 1, 2, 3$.
Risolvendo per $\overline{u}$ si ha

$$\overline{u} = \frac{\overline{w}}{EI\ s^4 + k} = \frac{1}{EI\ s^4 + k}\overline{w}\ .$$

Come noto, la trasformata inversa del prodotto è il prodotto di convoluzione delle antitrasformate, cioè

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{EI\ s^4 + k}\right\} * \mathcal{F}^{-1}\{\overline{w}\}\,.$$

Poichè le tavole di trasformazione affermano che

$$\mathcal{F}\left\{e^{-a|x|/\sqrt{2}}\sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}|x| + \frac{\pi}{4}\right)\right\}, (a > 0) = \frac{2a^3}{s^4 + a^4}$$

se ne deduce che

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{EI\ s^4 + k}\right\} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}k}e^{-\alpha|x|}\sin\left(\alpha\,|x| + \frac{\pi}{4}\right),$$

dove $\alpha = [k/(4EI)]^{1/4}$ ed ovviamente $\mathcal{F}^{-1}\{\overline{w}\} = w(x)$.
Otteniamo perciò

$$u(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}k}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|(x-\tau)|}\sin\left(\alpha\,|(x-\tau)| + \frac{\pi}{4}\right) w(\tau)\,d\tau$$

.

Applicazione alle equazioni integrali. L'equazione

$$y(t) = f(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} y(s)\, g(t-s)\, ds \tag{1.62}$$

è chiamata *equazione integrale di Fredholm* (da notare che in questo caso gli estremi di integrazione sono fissati). La funzione $y(t)$ è incognita, mentre f e g sono date.

L'uso della trasformata di Fourier con le proprietà connesse permette di scrivere:

$$\overline{y}(s) = \overline{f}(s) + \overline{y}(s)\,\overline{g}(s) \tag{1.63}$$

da cui

$$\overline{y}(s) = \frac{\overline{f}(s)}{1 - \overline{g}(s)}.$$

L'uso della antitrasformata permette, come nel caso della trasformata di Laplace, di trovare $y(t)$

Esempio 21 *Risolvere l'equazione integrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, f(t-s)\, ds = \frac{1}{t^2+1}.$$

l'applicazione della trasformata di Fourier all'equazione porta a

$$\overline{f}(s)\,\overline{f}(s) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2+1}\right\}$$

Valutiamo il secondo membro, si ha

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2+1}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} e^{-ist}\, dt = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} \cos st\, dt.$$

Le funzioni in (1.60) e (1.61) sono la derivata della funzione integranda, dove k è sostuituito da s. Se ne ricava che

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2+1}\right\} = 2\frac{\pi}{2} e^{-|s|}$$

e quindi

$$\overline{f}(s) = \sqrt{\pi} e^{-|s|/2}.$$

Volendo trovare $f(t)$ bisogna calcolare

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\pi}e^{-|s|/2}e^{ist}ds \\
= & \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\int_{0}^{+\infty}e^{-s/2|s|+ist}ds+\int_{-\infty}^{0}e^{s/2+ist}ds\right) \\
= & \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\int_{0}^{+\infty}e^{s(it-1/2)}ds\int_{0}^{+\infty}e^{-s(it+1/2)}ds\right) \\
= & \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{-1}{it-\frac{1}{2}}+\frac{1}{it+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}\,.
\end{aligned}$$

1.10 Esercizi.

PARAGRAFO 1

1. Calcolare la soluzione dell'equazione
$$y'-\alpha y=e^{at}$$
tale che $y(0)=y_0$ con il metodo del §1. Assumere che $\alpha\neq a$.

2. Calcolare la soluzione dell'equazione
$$y'-ay=e^{at}$$
tale che $y(0)=y_0$ considerando il limite della soluzione dell'Esercizio 1 per $\alpha\to a$.

PARAGRAFO 2

3. Trovare la trasformata di Laplace di ognuna delle funzioni seguenti, usando la definizione

   (a) $e^{at}\cos kt$

   (b) $t^n e^{-at}$ (n intero positivo)

   (c) $\begin{cases}\sin t, & (0<t<\pi)\\ 0\,, & t>\pi\end{cases}$

   (d) $\begin{cases}0\,, & 0<t<a\\ 1\,, & a<t<b\\ 0\,, & t>b\end{cases}$

PARAGRAFO 3

4. Trovare la trasformata di Laplace di ognuna delle seguenti funzioni

   (a) t^3

(b) t^2e^{-3t}

(c) $\cos at \sinh at$

(d) $te^t \sin 2t$

(e) $t^2 \sin at$

(f) $e^{at} \cosh bt$

5. Trovare la trasformata di Laplace di ognuna delle seguenti funzioni

   (a) $\frac{d^3 f(t)}{dt^3}$

   (b) $\sum_{n=0}^{N} a_n t^n$

   (c) $te^t f(t)$

   (d) $\sum_{n=0}^{N} a_n \cos nt$

6. Il *Polinomio di Laguerre* è definito come

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} \left(t^n e^{-t}\right)$$

   Mostrare che

$$\mathcal{L}\{L_n(t)\} = \frac{n!}{s} \left(\frac{s-1}{s}\right)^n .$$

7. Provare che se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, e se $a > 0$, allora

   (a) $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

   (b) $\mathcal{L}^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)$

8. Mostrare che

$$\mathcal{L}\left\{\left(t\frac{d}{dt}\right)^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{d}{ds}\left(s\frac{d}{ds}\right)^{n-1} [sF(s)]$$

   dove $n \in \mathbb{N}$. (usare l'induzione)

9. Sia $f(t)$ periodica di periodo a definita come $f(t) = F(t)$ nell'intervallo $0 < t < a.$ $(f(t+a) = f(t))$. Scrivendo la trasformata di Laplace della f come

$$\int_0^a e^{-st} f(t)\, dt + \int_a^{2a} e^{-st} f(t)\, dt + \int_{2a}^{3a} e^{-st} f(t)\, dt + \cdots ,$$

operando in ognuno di essi il cambiamento di variabile $\tau = t - a$ mostrare che

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^a e^{-st} F(t)\, dt \left[1 + e^{-as} + e^{-2as} + e^{-3as} + \cdots\right]$$

da cui, per $s > 0$ si ottiene

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{\int_0^a e^{-st} F(t)\, dt}{1 - e^{-as}} \,.$$

10. Applicare il risultato dell'Esercizio 9 per trovare la trasformata di Laplace della funzione *onda quadra*, nella quale $F(t) = 1$ per $0 < t < 1/2$ e $F(t) = -1$ per $1/2 < t < 1$. Mostrare che tale trasformata vale
$$\frac{\left(1 - e^{-as/2}\right)^2}{s\left(1 - e^{-as}\right)} = \frac{1}{s}\frac{1 - e^{-as/2}}{1 + e^{-as/2}} = \frac{1}{s}\tanh\frac{as}{4} \,.$$

11. Mostrare che se $f(t)$ è la funzione onda quadra dell'esercizio precedente, allora $\int_0^t f(u)\, du$ è la *funzione d'onda triangolare*. Disegnare e trovare la sua trasformata

12. Sia $f(t)$ è la funzione a gradini, $f(t) = (n+1)\, b$ per $na < t < (n+1)\, a$. Mostrare che
$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{b}{s\left(1 - e^{-as}\right)} \,.$$

13. Mostrare che se $F(s)$ è la trasformata di $f(t)$ e se si possono scambiare gli integrali tra di loro,allora
$$\int_s^{\infty} F(v)\, dv = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} \,.$$
[il risultato vale per s grande a sufficienza, se $f(t)/t$ ammette trasformata]

    (a) usare il risultato ottenuto per dedurre le seguenti trasformate
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \cot^{-1} s \,, \quad \mathcal{L}\left\{\frac{1 - e^{-t}}{t}\right\} = \log\left(\frac{s}{s+1}\right) .$$

14. Ponendo formalmente $s = 0$ nel risultato dell'esercizio (13a), ottenere la formula
$$\int_0^{\infty} f(s)\, ds = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$$
(*il risultato è valido quando l'integrale a destra esiste*)

(a) Usare il risultato della parte (a) per mostrare che

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \log \frac{b}{a} \ \ (a, b > 0) \ .$$

(b) Mostrare che se $f)t = e^t$ non esistono entrambi i membri dell'uguaglianza in (a), mentre se $f(t) = e^t \sin t$ esiste l'integrale a sinistra ma non quello a destra.

15. Applicare la proprietà dell'Equazione (1.21) al risultato dell'esercizio 13, per ottenere la formula

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{f(u)}{u} du\right\} = \frac{1}{s} \int_s^\infty F(v)\, dv \,.$$

Assumendo inoltre che si possa applicare il risultato dell'esercizio 14, ottenere la formula

$$\mathcal{L}\left\{\int_t^\infty \frac{f(u)}{u} du\right\} = \frac{1}{s} \int_0^s F(v)\, dv \,.$$

[in entrambi i casi il risultato è valido se esiste l'integrale a sinistra. Non ha importanza che esista o meno $\int_0^\infty f(t)\, dt$.

16. Assumendo i risultati dell'esercizio 15, mostrare che

$$\mathcal{L}\{\mathrm{Si}(t)\} = \frac{1}{s} \cot^{-1} s \,, \ \ \mathcal{L}\{\mathrm{Ci}(t)\} = \frac{1}{s} \log \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \,, \ \ \mathcal{L}\{\mathrm{Ei}(t)\} = \frac{1}{s} \log \frac{1}{1+s} \,,$$

dove

$$\mathrm{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du \quad \mathrm{Ci}(t) = -\int_t^\infty \frac{\cos u}{u} du \,, \ \ \mathrm{Ei}(-t) = -\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \,.$$

PARAGRAFO 4

17. Indichiamo con $N(s)/D(s)$ il rapporto di due polinomi, senza fattori comuni, tale che il grado di $D(s)$ è maggiore di quello di $N(s)$. Supponiamo inoltre che $D(s)$ abbia n zeri reali e distinti $s = a_1, a_2, \ldots, a_n$. Mostrare che i coefficienti nello sviluppo in *frazioni parziali*

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{m=1}^{n} \frac{A_m}{s - a_m}$$

sono determinati dalle equazioni

$$A_m = \lim_{s \to a_m} (s - a_m) \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(a_m)}{D'(a_m)} \,.$$

Inoltre, mostrare che in questo caso

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{N(s)}{D(s)}\right\} = \sum_{m=1}^{n} \frac{N(a_m)}{D'(a_m)} e^{a_m t} \,.$$

18. Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e se

$$f(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_n t^n + \cdots$$

(su qualche intervallo intorno a $t = 0$) e

$$F(s) = \frac{B_0}{s} + \frac{B_1}{s^2} + \frac{B_2}{s^3} + \cdots + \frac{B_n}{s^{n+1}} + \cdots$$

(per valori di s sufficientemente grandi), mostrare che

$$A_n = \frac{B_n}{n!}.$$

19. Usando il test del rapporto, mostrare che se $\lim_{n\to\infty} |B_{n+1}/B_n| = s_0$ la seconda serie nell'Esercizio 18 converge per $s > s_0$. Dedurne che in questo caso $\lim_{n\to\infty} |A_{n+1}/A_n| = 0$, e che quindi la prima serie nell'Esercizio 18 converge *per tutti i valori di* t.

20. Usare i risultati dei due esercizi precedenti per trovare la trasformata inversa di ciascuna delle seguenti funzioni come serie di potenze in t.

    (a) $\sin \frac{1}{s}$

    (b) $\frac{1}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{1/s}{\sqrt{1+(1/s)^2}}$

21. Mostrare che se

$$\frac{d}{ds} F(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{g(t)}{t}.$$

[usare l'equazione (1.25) con $n = 1$]

    (a) Usare il risultato della parte (a) per dedurre che

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\cot^{-1} s\right\} = -\frac{\sin t}{t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\log \frac{s+1}{s}\right\} = \frac{1-e^{-t}}{t}.$$

    [Confrontare il problema 13(b)]

22. Usare il risultato dell'esercizio 21(a) per dedurre le seguenti formule

    (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\log \frac{s-b}{s-a}\right\} = \frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$,

    (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\tanh^{-1} \frac{s}{a}\right\} = \frac{\sinh at}{t}$.

23. Verificare l'Equazione (1.30) in ognuno dei casi seguenti

    (a) $f(t) = \cos at$

    (b) $f(t) = \sinh at$

    (c) $F(s) = \dfrac{s}{s^2 - a^2}$

    (d) $F(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+2s+2}$

24. Partendo dall'Equazione (1.27) e considerando la forma limite per $s \to 0$, ottenere la relazione

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = f(0) + \lim_{s\to 0} \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt$$

e, scambiando, in modo formale, il limite con l'integrale, ottenere il risultato

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = f(\infty)$$

dove $f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t)$. [Confrontare l'equazione (1.30). Il risultato è valido *quando l'integrale* $\int_0^\infty f'(t)\, dt$ esiste. In particolare *deve esistere il* $\lim_{t\to\infty} f(t)$.]

25. Mostrare che il risultato dell'Esercizio 24 è

    (a) Non valido, in particolare, nei casi in cui $F(s)$ è dato da:

$$\frac{1}{s-1}, \quad \frac{1}{s^2+1}, \quad \frac{1}{s(s^2-3s+2)}.$$

    (b) Mostrare che il risultato dell'Esercizio 24 *è* valido, in particolare, nei casi in cui $F(s)$ è data da

$$\frac{1}{s}, \quad \frac{1}{s+1}, \quad \frac{1}{s(s^2+3s+2)}.$$

PARAGRAFO 5

26. Determinare il prodotto di convoluzione di ognuna delle seguenti coppie di funzioni

    (a) $1,\ \sin at$

    (b) $t,\ e^{at}$

    (c) $e^{at},\ e^{bt}$

    (d) $\sin at, \sin bt$

27. Verificare l'Equazione (1.26) su ognuno dei casi considerati nell'Esercizio 26.

28. Se $F(s)$ è la trasformata di $f(t)$, esprimere la trasformata inversa di ognuna delle seguenti funzioni come un integrale:

    (a) $\dfrac{F(s)}{s+a}$

    (b) $\dfrac{F(s)}{s^2+a^2}$

    (c) $\dfrac{F(s)}{(s+a)^2}$

    (d) $\dfrac{F(s)}{(s+a)(s+b)}$

29. Supponiamo che $y(t)$ soddisfi l'*equazione integrale*

$$y(t) = f(t) + \int_0^t g(t-u)\,y(u)\,du\,,$$

dove $f(t)$ e $g(t)$ sono funzioni note aventi trasformate $F(s)$ e $G(s)$ rispettivamente.

(a) Mostrare che allora è

$$Y(s) = \frac{F(s)}{1-G(s)} = F(s) + \frac{G(s)}{1-G(s)}F(s)\ .$$

(b) Dedurne che la soluzione dell'equazione integrale è

$$y(t) = f(t) + \int_0^t h(t-u)\,f(u)\,du$$

dove $h(t)$ è la funzione la cui trasformata di Laplace è

$$H(s) = \frac{G(s)}{1-G(s)}\,.$$

(c) Studiare il caso particolare $g(t) = e^{-at}$.

(a) Mostrare che $s^{-n}F(s)$ è la trasformata della funzione

$$F(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-u)^{n-1} f(u)\,du\,,\quad n \in \mathbb{N}\,,$$

(b) Dedurne che

$$\overbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}^{n-volte} f(t) \overbrace{dt \cdots dt}^{n-volte} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-u)^{n-1} f(u)\, du \, .$$

PARAGRAFO 6

(a) Mostrare che

$$\int_a^b \delta(u-t_1) f(u)\, du = f(t_1) \quad \text{se} \quad a < t_1 < b \, .$$

se l'integrale è definito come il limite per $\varepsilon \to 0$ dell'integrale in cui $\delta(u-t_1)$ è sostituito con la funzione uguale a $1/(2\varepsilon)$ per $t_1 - \varepsilon < u < t_1 + \varepsilon$ e zero fuori.

(b) In modo simile ottenere la relazione

$$\int_a^b \delta'(u-t_1) f(u)\, du = -f'(t_1) \quad \text{se} \quad a < t_1 < b \, .$$

(c) Mostrare che la convoluzione di $\delta(t)$ con $f(t)$ è data da

$$\int_0^t \delta(u-t_1) f(t-u)\, du = \begin{cases} 0 & (t < t_1) \\ f(t-t_1) & (t > t_1) \end{cases}$$

essendo t e t_1 positivi.

30. Se la *funzione gradino* o *funzione di Heaviside* è definita come $H(t) = 1$ per $t > 0$ e $H(t) = 0$ per $t < 0$,

(a) mostrare che

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{1}{s} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{H(t-t_1)\} = \frac{e^{-st_1}}{s} \quad \text{per } t_1 \geq 0 \, .$$

(b) Osservando che $\mathcal{L}\left\{\delta'(t)\right\} = s\mathcal{L}\{\delta(t)\} = s^2\{\mathcal{L}H(t)\}$, indicare in che senso si può pensare a δ' come la derivata della δ a sua volta derivata della $H(t)$.

PARAGRAFO 7

31. Trovare la trasformata inversa di ciascuna delle seguenti funzioni

(a) $\dfrac{1}{s^2 + 3s + 2}$

(b) $\dfrac{s}{s^2 - 2s + 5}$

(c) $\dfrac{s+1}{s^4 + 1}$

(d) $\dfrac{2s+1}{s\,(s+1)\,(s+2)}$

(e) $\dfrac{1}{s^2\,(s^2+1)}$

(f) $\dfrac{e^{-s}}{s+1}$

32. Trovare la trasformata inversa di ciascuna delle seguenti funzioni

(a) $\dfrac{1}{s^3 + a^3}$

(b) $\dfrac{1 - e^{-s}}{s}$

(c) $\dfrac{1}{(s^2+a^2)\,(s^2+b^2)}$

33. Trovare la trasformata inversa di ciascuna delle seguenti funzioni

(a) $\dfrac{s+1}{s^2 + 2s + 2}$

(b) $\dfrac{s^2}{s^4 + 4a^4}$

(c) $\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$

(d) $\dfrac{s^2}{(s+a)^3}$

(e) $\dfrac{1}{(s^2+1)^3}$

(f) $\dfrac{1}{(s^2-1)^3}$

34. Determinare la trasformata inversa di ciascuna delle seguenti funzioni facendo un uso appropriato dello sviluppo

$$\frac{1}{1-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n , \quad |\alpha| < 1$$

e della Proprietà (1.23):

(a) $\dfrac{b}{s\left(1-e^{-as}\right)}$

(b) $\dfrac{1-e^{-as/2}}{s\left(1+e^{-as/2}\right)}$

(c) $\dfrac{\omega}{\left(1-e^{-\pi s/\omega}\right)\left(s^2+\omega^2\right)}$

(d) $\dfrac{\omega\left(1+e^{-\pi s/\omega}\right)}{\left(1-e^{-\pi s/\omega}\right)\left(s^2+\omega^2\right)}$

35. Sia $F(s) = G(s)/\left(1-e^{-as}\right)$ dove $g(t) = 0$ per $t > a$. Mostrare che $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ è una *funzione periodica* di periodo a che vale $g(t)$ nell'intervallo $0 < t < a$.

36. Mostrare che le trasformate nelle parti (b), (c) e (d) dell'Esercizio 36 possono essere scritte nella forma data dall'Esercizio 37 prendendo $G(s) = \left(1-e^{-as/2}\right)/s$ in (b) e $G(s) = \left(1+e^{-\pi s/\omega}\right)/\left(s^2+\omega^2\right)$ in (c) e (d), essendo $a = 2\pi/\omega$ in (c) e $a = \pi/\omega$ in (d).

37. Mostrare che la trasformata inversa di

$$F(s) = \frac{1}{s}\frac{e^{-Ps/8}+e^{-3Ps/8}}{1+e^{-Ps/2}}$$

è una funzione periodica di periodo P. e disegnarne il grafico.

PARAGRAFO 8

38. Risolvere i seguenti problemi facendo uso della trasformata di Laplace

(a) $\frac{dy}{dt} + ky = 0,\ \ y(0) = 1$

(b) $\frac{dy}{dt} + ky = 1,\ \ y(0) = 0$

(c) $\frac{dy}{dt} + ky = \delta(t-1)\,,\ \ y(0) = 1$

(d) $\frac{dy}{dt} + ky = f(t)\,,\ \ y(0) = y_0$

39. Risolvere i seguenti problemi facendo uso della trasformata di Laplace

(a) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0, \;\; y(0) = 1, \;\; \frac{dy(0)}{dt} = -1$

(b) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 2, \;\; y(0) = 0, \;\; \frac{dy(0)}{dt} = 1$

(c) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = \delta(t-1), \;\; y(0) = 1, \;\; \frac{dy(0)}{dt} = -1$

(d) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = f(t), \;\; y(0) = y_0, \;\; \frac{dy(0)}{dt} = y'(0)$

40. Risolvere i seguenti problemi facendo uso della trasformata di Laplace

(a) $\frac{d^4y}{dt^4} + 4y = 0, \;\; y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = \frac{d^2y(0)}{dt^2} = 0, \;\; \frac{d^3y(0)}{dt^3} = 1$

(b) $\frac{d^4y}{dt^4} + 4y = 4, \;\; y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = \frac{d^2y(0)}{dt^2} = \frac{d^3y(0)}{dt^3} = 0$

41. Usare la trasformata di Laplace per risolvere il seguente problema

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \delta(t-a), \;\; y(0) = 0, \; y(b) = 0$$

dove $0 < a < b$ scrivendo dapprima $dy(0)/dt = c$ e determinando poi c in modo tale che l'antitrasformata soddisfi la condizione $y(b) = 0$.

42. Pensando al problema della massa attaccata ad una molla, e supponendo la presenza di una forza di attrito proporzionale alla velocità, con costante di proporzionalità c,

(a) mostrare che l'equazione può essere scritta nella forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \left(\alpha^2 + \beta^2\right)x = \frac{1}{m}f(t)$$

con le abbreviazioni

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \;\; \alpha = \frac{c}{2m}, \;\; \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

(b) Assumendo che la massa m sia a riposo e che la forza esterna applicata sia costante di valore f_0, trovare l'equazione di moto. Considerare separatamente i casi in cui β è reale positivo, $\beta = 0$ e $\beta = i\gamma$, con γ reale. Discutere i tre casi e disegnare le curve che rappresentato il moto nei tre casi.

(c) Assumendo che la massa parta da ferma dalla posizione $x = a$ e che non sia presente alcuna forza esterna, studiare il moto del caso (8b).

43. Usare la trasformata di Laplace per risolvere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x &= -e^{-t} \\ \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + 2y &= 0 \end{aligned}$$

che soddisfa le condizioni iniziali

$$x(0) = -1\,, \quad y(0) = +1$$

PARAGRAFO 9

44. Mostrare che la trasformata di Fourier di di $e^{-a|t|}$, $a > 0$, è $2a/\left(s^2 + a^2\right)$. Usare il risultato per trovare la trasformata di $t^2 e^{-a|t|}$

45. Trovare la trasformata di Fourier in seni e coseni di e^{-2t}.

46. Usando il risultato dell'Esercizio 46, usando il teroema di inversione, mostrare che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{e}\,.$$

47. Usando la convoluzione di Fourier e ricordando l'Esercizio 45, risolvere l'equazione integrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{(t-u)^2 + 1} du = \frac{1}{t^2 + 4}\,.$$

1.10.1 Risultati di alcuni esercizi.

3. (a) $(s-a)/\left[(s-a)^2 + k^2\right]$
   (b) $n!/(s+a)^{n+1}$
   (c) $(1 + e^{-s\pi})/\left(s^2+1\right)$
   (d) $\left(e^{-sa} - e^{-sb}\right)/s$

4. (a) $6/s^4$
   (b) $2/(s+3)^3$
   (c) $a\left(s^2 - 2a^2\right)/\left(s^4 + 4a^4\right)$
   (d) $4(s-1)/\left(s^2 - 2s + 5\right)^2$
   (e) $\left(6as^2 - 2a^3\right)/\left(s^2 + a^2\right)^3$
   (f) $(s-a)/\left[(s-a)^2 - b^2\right]$

5. (a) $s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0)$
   (b) $\sum_{n=0}^{N} (n! a_n)/s^{n+1}$
   (c) $-F'(s-1)$
   (d) $\sum_{n=0}^{N} a_n s/\left(s^2 + n^2\right)$

11. $\left(\tanh \frac{1}{4} as\right)/s^2$

20. (a) $1-\frac{t^2}{2!3!}+\frac{t^4}{4!5!}-\frac{t^6}{6!7!}+\cdots$
    (b) $1-\frac{(t/2)^2}{(1!)^2}+\frac{(t/2)^4}{(2!)^2}-\frac{(t/2)^6}{(3!)^2}+\cdots$

26. (a) $(1-\cos at)/a$
    (b) $\left(e^{at}-1-at\right)/a^2$
    (c) $\left(e^{at}-e^{bt}\right)/(b-a)$
    (d) $(b\sin at-a\sin bt)/\left(b^2-a^2\right)$

28. b. $\frac{1}{a}\int_0^t f(t-u)\sin au du=\frac{1}{a}\int_0^t \sin a(t-u)\,du$
    d. $\frac{1}{b-a}\int_0^t\left(e^{-bu}-e^{-au}\right)f(t-u)\,du=\frac{1}{b-a}\int_0^t\left(e^{-b(t-u)}-e^{-a(t-u)}\right)f(u)\,du$

33. b. $e^t\cos 2t+\frac{1}{2}e^t\sin 2t$
    d. $\left(1+2e^{-t}-3e^{-2t}\right)/2$
    f. $e^{-(t-1)}$ per $t>1$, 0 per $0\le t<1$

34. (a) $(\sin at+at\cos at)/(2a)$
    c. $-e^{-t}+5e^{-2t}-4e^{-3t}$
    e. 1 per $0\le t<1$, 0 per $t>1$

35. b. $(s\sin at\cosh at+\cos at\sinh at)/(2a)$
    d. $\frac{1}{2}\left(2-4at+a^2t^2\right)e^{-at}$
    f. $\frac{1}{8}\left[\left(3+t^2\right)\sinh t-3t\cosh t\right]$

36. (a) Funzione gradino
    c. La funzione periodica di periodo 2π definita come $\sin\omega t$ tra $0<t<\pi/\omega$ e 0 per $\pi/\omega<t<2\pi/\omega$
    d. $|\sin\omega t|$

39. $0\,(0<t<P/8), 1\;(P/8<t<3P/8), 2\;(3P/8<t<5P/8), 1\;(5P/8<t<7P/8)$, $0\,(7P/8<t<P)$, ...

40. (a) $y=e^{-kt}$
    (b) $y=\left(1-e^{-kt}\right)/k$
    (c) $y=e^{-kt}$ per $0\le t\le 1$; $y=\left(1+e^k\right)e^{-kt}$ per $t>1$
    (d) $y=e^{-kt}\left[y_0+\int_0^t f(u)\,e^{ku}du\right]$

41. (a) $y=e^{-t}\cos t$
    (b) $y=1-e^{-t}\cos t$
    (c) $y=e^{-t}\cos t$ per $0\le t\le 1$, $y=e^{-t}\cos t+e^{-(t-1)}\sin(t-1)$ per $t\ge 1$

(d) $y = e^{-t}\left[y_0 \cos t + (y_0 + y_0') \sin t + \int_0^t f(u)\, e^u \sin(t-u)\, du\right]$

42. (a) $y = \frac{1}{4}(\sin t \cosh t - \cos t \sinh t)$

    (b) $y = 1 - \cos t \cosh t$

43. $$\begin{array}{rcll} y & = & [\sin t \sin(b-a)] / (\sin b) & \text{per} \quad 0 \le t \le a \\ y & = & [\sin a \sin(b-t)] / (\sin b) & per \quad a \le t \le b \end{array}$$

44. b. $x = \frac{f_0}{k}\left[1 - e^{-\alpha t}\left(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta}\sin \beta t\right)\right] \ \left(\beta^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 > 0\right)$

    $x = \frac{f_0}{k}\left[1 - e^{-\alpha t}(1 + \alpha t)\right] \ (\alpha = \omega_0)$

    $x = \frac{f_0}{k}\left[1 - \frac{\alpha+\gamma}{2\gamma}e^{-(\alpha-\gamma)t} + \frac{\alpha-\gamma}{2\gamma}e^{-(\alpha+\gamma)t}\right] \ \left(\gamma^2 = \alpha^2 - \omega_0^2 > 0\right)$

    c. $x = \left(ae^{-\alpha t}\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta}\sin \beta t\right) \ \left(\beta^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 > 0\right)$

    $x = ae^{-\alpha t}(1 + \alpha t) \ (\alpha = \omega_0)$

    $x = a\left[\frac{\alpha+\gamma}{2\gamma}e^{-(\alpha-\gamma)t} - \frac{\alpha-\gamma}{2\gamma}e^{-(\alpha+\gamma)t}\right] \ \left(\gamma^2 = \alpha^2 - \omega_0^2 > 0\right)$

45. $x = e^{-t}(\cos t + \sin t)$, $y = e^{-t}(1 + \sin t)$

46. $\dfrac{4a\left(a^2 - 3s^2\right)}{\left(s^2 + a^2\right)^3}$

47. (i) $\dfrac{s}{s^2+4}$, (ii) $\dfrac{2}{s^2+4}$

49. $\dfrac{1}{2\pi(1+t^2)}$