Capitolo 4

Introduzione alle equazioni alle derivate parziali

4.1 Generalità sulle equazioni alle derivate parziali

Un'equazione alle derivate parziali (EDP) di ordine n può essere vista come una relazione del tipo

$$F\left(x_1,\dots,x_m,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_m},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{n-1}\partial x_2},\dots,\frac{\partial^n u}{\partial x_m^n}\right)=0, \tag{4.1}$$

dove $u:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ è la funzione incognita delle variabili indipendenti $x_1,\dots,x_m$. Una funzione "sufficientemente regolare" che sostituita insieme alle sue derivate parziali nella (4.1), renda tale relazione vera identicamente in un aperto U di $\mathbb{R}^m$ è detta soluzione della (4.1) in U.

C'è da notare che non tutte le derivate parziali devono necessariamente apparire in una equazione alle derivate parziali, si pensi a quelle viste nel capitolo precedente.

Conviene essere più precisi sulla regolarità richiesta ad una soluzione. **Noi richiederemo che u sia continua assieme a tutte le sue derivate fino all'ordine n, cioè che u sia di classe C^n.** Tale definizione è però troppo restrittiva per alcune applicazioni. In realtà, lo spazio di funzioni in cui si cerca la soluzione dipende dal problema in esame; per esempio, potremmo limitarci a richiedere che u sia continua assieme a tutte le sue derivate che compaiono esplicitamente nell'equazione.

Notazione. Per brevità, conviene adottare una notazione un po' più compatta per le derivate parziali. Data $u:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ scriveremo per esempio $u_{x_i}(x_1,\dots,x_m)$ invece di $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_m)$ e $u_{x_ix_j}(x_1,\dots,x_m)$ al posto di $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x_1,\dots,x_m)$.

Esempio 4.1.1. Data una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, consideriamo l'equazione alle derivate parziali $u_x(x,t)=f(t)$. Supponiamo di essere interessati al problema di determinarne le soluzioni che soddisfano $u(0,t)=\sin t$.

Per ottenere una soluzione integriamo entrambe i membri rispetto a x. Si ottiene $u(x,t) = f(t)x + g(t)$. Imponendo la condizione $u(0,t) = \sin t$, si ottiene $g(t) = \sin t$. Quindi $u(x,t) = f(t)x + \sin t$.

Esempio 4.1.2. Data una funzione $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione alle derivate parziali $u_{xt}(x,t) = f(x,t)$. Per determinarne alcune soluzioni integriamone entrambe i membri successivamente rispetto a t e ad x. Integrando rispetto a t si ottiene

$$u_x(x,t) = \int_{t_0}^{t} f(x,\tau)\ \mathrm{d}\tau + g(x) = F(x,t) + g(x)$$

dove $F(x,t) = \int_{t_0}^{t} f(x,\tau)\ \mathrm{d}\tau$. Integrando rispetto ad x, si ottiene

$$u(x,t) = \int_{x_0}^{x} F(\xi,t) + g(\xi)\ \mathrm{d}\xi + h(t).$$

Esercizio 4.1.3. Cercare le soluzioni di $u_{xt} = t$ che soddisfano $u(x,0) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4.1.4. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ costanti, trovare le soluzioni di $au_x + bu_t = 0$ soddisfacenti $u(x,0) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. *Suggerimento: usare le sostituzioni*

$$\xi(x,t) = bx + at, \quad \eta(x,t) = bx - at, \quad \omega\big(\xi(x,t), \eta(x,t)\big) = u(x,t).$$

Si ottiene $u_x = b(\omega_\xi + \omega_\eta)$ *e* $u_t = a(\omega_\xi - \omega_\eta)$ *e l'equazione di partenza si riduce a* $\omega_\xi = 0$.

In quanto segue saremo particolarmente interessati alle *equazioni lineari*. La (4.1) è detta *lineare* se si ha $F = H - f$ con H lineare rispetto a u ed alle derivate di u che vi compaiono, ed f dipendente solo da $x_1, \ldots, x_n$. Se $f = 0$, la (4.1) è detta *lineare omogenea*. La H è la *parte omogenea* mentre la f è il termine noto della (4.1).

4.1.1 Un esempio: soluzioni radiali dell'equazione di Laplace

Consideriamo, in $\mathbb{R}^n$, l'equazione

$$u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n} = 0 \tag{4.2}$$

(detta *equazione di Laplace*. A causa della simmetria di quest'equazione cerchiamo, tra tutte le possibili soluzioni, quelle *radiali* cioè quelle che dipendono solamente dalla distanza dall'origine. In altre parole, siamo interessati alle soluzioni della forma $u(x_1, \ldots, x_n) = v(r)$ con $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Si ha, per $i = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_i}{r} \quad (x_1, \ldots, x_n) \neq 0.$$

Scrivendo $u(x_1,\dots,x_n) = v(r)$, si ottiene

$$u_{x_i}(x_1,\dots,x_n) = v'(r)\frac{x_i}{r},$$
$$u_{x_ix_i}(x_1,\dots,x_n) = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right),$$

per $i = 1,\dots,n$. Da cui segue

$$\sum_{k=1}^{n} u_{x_kx_k}(x_1,\dots,x_n) = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r).$$

Quindi, dalla (4.2) segue

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0$$

Risolvendo questa equazione differenziale (ordinaria) si trovano, a seconda della dimensione n, due famiglie di soluzioni:

$n = 2$	$n \geq 3$
$a \ln r + b$	$\frac{a}{r^{n-2}} + b$

con a e b costanti.

4.2 Alcune equazioni provenienti dalla fisica

Prendiamo in esame qualche esempio di equazioni alle derivate parziali provenienti dalla fisica ed i principali problemi ad esse associati. Per maggiore semplicità cercheremo sempre soluzioni C^2 definite su un aperto di $\mathbb{R}^n$ assumendo che esse siano (almeno) di classe C^1 in un intorno della chiusura di tale aperto.

4.2.1 Equazione di continuità

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitato e racchiuso da una superficie Γ regolare. La variazione della massa di un sistema materiale (per es. un fluido) che occupa Ω deve essere uguale alla quantità di massa che attraversa Γ. Esprimiamo questo concetto matematicamente. Sia $\rho(x,y,z,t)$ la densità di massa nel punto (x,y,z) al tempo t e sia $m(t)$ la massa contenuta in Ω all'istante t. Ovviamente

$$m(t) = \int_\Omega \rho(x,y,z,t)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z,$$

conseguentemente[1]

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t) = \int_\Omega \frac{\partial\rho}{\partial t}(x,y,z,t)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z.$$

[1] Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale

Ora, sia $v(x,y,z,t)$ il campo di velocità al tempo t del sistema materiale che occupa Ω (si può pensare ad esempio ad un fluido composto di tantissime particelle materiali; in tale caso $v(x,y,z,t)$ è la velocità della particella che all'istante t occupa la posizione (x,y,z)). Il tasso di variazione della massa in Ω è uguale alla velocità con cui il sistema materiale entra o esce attraverso Γ, cioè è uguale al flusso di v attraverso Γ. Ovvero[2]

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t) = -\int_\Gamma \rho(x,y,z,t)\langle v(x,y,z,t), n(x,y,z)\rangle \ \mathrm{d}S$$

dove $n(x,y,z)$ rappresenta la normale a Γ uscente da Ω e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è il prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$. Per ogni t fissato, per il teorema della divergenza quest'ultimo integrale è uguale a[3]

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,\big(\rho(x,y,z,t)v(x,y,z,t)\big) \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z.$$

Ne segue che

$$\int_\Omega \left\{ \frac{\partial\rho}{\partial t}(x,y,z,t) - \mathrm{div}\,\big(\rho(x,y,z,t)v(x,y,z,t)\big) \right\} \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z = 0.$$

L'arbitrarietà di Ω implica che deve valere

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,y,z,t) - \mathrm{div}\,\big(\rho(x,y,z,t)v(x,y,z,t)\big) = 0, \tag{4.3}$$

che è anche detta *equazione di continuità*.

Se il sistema materiale considerato è un fluido incomprimibile (cioè tale che ρ è costante) allora l'equazione di continuità si riduce a

$$\mathrm{div}\,\big(v(x,y,z,t)\big) = 0$$

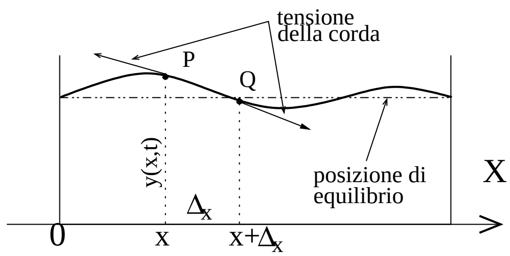
4.2.2 L'equazione della corda vibrante

Consideriamo un sistema meccanico costituito da una fune leggera, flessibile tesa tra due punti fissati che compia delle oscillazioni piccole rispetto alla posizione di equilibrio. In particolare, facciamo le seguenti ipotesi semplificatorie:

1. Non c'è gravità, resistenza dell'aria o altro fattore smorzante del moto.
2. Il moto avviene in un piano.
3. I punti della corda si muovono su linee rette perpendicolari alla linea retta che corrisponde alla posizione di equilibrio.
4. Il movimento di ogni punto, in confronto alla lunghezza della corda è piccolo.
5. In ogni punto della corda l'angolo tra la corda e la linea di equilibrio è piccolo.

[2] è un integrale superficiale!

[3] La divergenza del campo vettoriale v è data da $\mathrm{div}(v) = v_x + v_y + v_z$; nel nostro caso t è considerato fissato.



Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\{x, y\}$ con l'asse x coincidente con la posizione di equilibrio della corda. Il moto della corda risulterà quindi completamente descritto da una funzione $y(x, t)$ che esprime l'ordinata al tempo t del punto di ascissa x. In questo modo, l'ipotesi (4) significa che $y(x, t)$ è piccolo, mentre la (5) significa che $y_x(x, t)$ è piccolo. Le ipotesi (4) e (5) prese insieme implicano che la tensione F della corda può essere considerata costante.

Siano P e Q due punti di ascissa rispettivamente x e $x + \Delta_x$. e siano φ e $\varphi + \Delta_\varphi$ gli angoli formati dalla corda con la direzione dell'asse x nei punti P e Q. Siano inoltre $x + \theta\Delta_x$, $0 \leq \theta \leq 1$, la posizione del centro di massa dell'arco $\widehat{PQ}$ e M la sua massa. Per l'ipotesi (5) M può essere approssimata con $\rho\Delta_x$.

La forza (esercitata dalla corda) agente nel punto Q in direzione y ha intensità $F\sin(\varphi + \Delta_\varphi)$ mentre quella agente nel punto P ha intensità $F\sin(\varphi)$. Di conseguenza, la forza agente sull'arco $\widehat{PQ}$, tenendo conto della direzione è $F\big(\sin(\varphi+\Delta_\varphi) - \sin(\varphi)\big)$. L'accelerazione del centro di massa dell'arco $\widehat{PQ}$ è data da $y_{tt}(x+\theta\Delta_x, t)$. Applicando le leggi della dinamica al moto del centro di massa, si ha

$$\rho\Delta_x y_{tt}(x + \theta\Delta_x, t) = F\big(\sin(\varphi + \Delta_\varphi) - \sin(\varphi)\big). \tag{4.4}$$

Per l'ipotesi (5), $\sin(\varphi)$ può essere sostituito con $\tan(\varphi)$ che, a sua volta, può essere approssimata da $y_x(x, t)$. Considerazioni analoghe possono essere fatte per $\sin(\varphi + \Delta_\varphi)$ e $y_x(x + \Delta_x, t)$. Con queste considerazioni l'equazione (4.4) diventa:

$$\begin{aligned}\rho\Delta_x y_{tt}(x + \theta\Delta_x, t) =& F\big(y_x(x + \Delta_x, t) - y_x(x, t)\big)\\ =& F\Delta_x y_{xx}(x, t)\end{aligned}$$

Dividendo per Δ_x e facendo tendere $\Delta_x \to 0$. Si ottiene

$$y_{tt}(x, t) = c^2 y_{xx}(x, t) \tag{4.5}$$

dove $c^2 = \frac{F}{\rho} > 0$.

L'equazione (4.5) è un importante rappresentante di quella famiglia di equazioni del secondo ordine note come *equazioni iperboliche*. Essa è un caso particolare della cosiddetta *equazione delle onde* in $\mathbb{R}^n$

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = f(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{4.6}$$

che descrive molti fenomeni ondulatori.

Consideriamo per esempio le vibrazioni di una membrana elastica omogenea che in 'posizione di riposo' occupa una regione Ω del piano xy, con contorno $\partial\Omega$

soggetta alla forza tempo-dipendente $f(t, x, y)$. Allora, con opportune unità di misura, la funzione $u(t, x, y)$ che rappresenta la forma della membrana in dipendenza dal punto e dal tempo soddisfa la (4.6).

Tipici problemi che si possono porre in relazione alla (4.6) sono i seguenti (scriviamoli **a titolo puramente esemplificativo** nel caso di due sole variabili spaziali):

Problema di Cauchy-Dirichlet Si cerca una soluzione di (4.6) che soddisfi

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,0) &= h(x,y), \\ u_t(x,y,0) &= k(x,y), \end{aligned}\right\} \quad (x,y) \in \Omega, \tag{4.7}$$

$$u(x,y,t) = \phi(x,y,t), \qquad (x,y) \in \partial\Omega, \quad t > 0 \tag{4.8}$$

dove h, k e φ sono funzioni assegnate. Nel caso in cui $\partial\Omega = \emptyset$ la condizione (4.8) ovviamente scompare. Per esempio, per la (4.5) nel caso di lunghezza infinita della corda il problema assume la forma

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = c^2 y_{xx}(x,t), \\ u(x,0) = h(x), \\ u_t(x,0) = k(x), \end{cases}$$

con h e k funzioni assegnate.

Problema di Cauchy-Neumann Si cerca una soluzione dell'equazione (4.6) che soddisfi la condizione (4.7) ed in più, invece di assegnare per ogni istante la posizione del bordo come nella (4.8) fissiamo la derivata nella direzione normale n al bordo in ogni istante, cioè sostituiamo la (4.8) con la *condizione di Neumann*:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t) = \psi(x,y,t) \quad (x,y) \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{4.9}$$

dove n è un versore normale a $\partial\Omega$ e ψ è una funzione assegnata.

4.2.3 Equazione del calore (o di diffusione)

Consideriamo il problema della conduzione del calore in una sbarretta (1-dimensionale) omogenea e isotropa. Supponiamo per fissare le idee che la sbarretta sia disposta lungo l'asse x. Se $u(x,t)$ rappresenta la temperatura all'istante t nel punto di ascissa x, k è la conduttività termica, c il calore specifico e ρ la densità, allora la funzione u soddisfa l'equazione

$$\frac{c\rho}{k} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t).$$

Questa equazione è un rappresentante della famiglia di equazioni del secondo ordine dette *paraboliche.* è un caso particolare della cosiddetta *equazione di diffusione* in $\mathbb{R}^n$

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = f(t, x_1, \ldots, x_n). \tag{4.10}$$

Questa equazione descrive, con un'opportuna scelta delle unità di misura, la diffusione di calore in un corpo omogeneo e isotropo, in questo caso f rappresenta la quantità di calore per unità di volume prodotta o sottratta da una sorgente (positiva o negativa) presente nel corpo. La (4.10) può anche rappresentare la diffusione di un fluido in un dato ambiente in questo caso u rappresenta la densità del fluido e f è, come sopra, un termine di sorgente.

I problemi tipici che si pongono per la (4.10) sono (ci limitiamo per semplicità ed **a titolo puramente esemplificativo** al caso di tre sole variabili spaziali):

Problema di Cauchy-Dirichlet Assumiamo che un dato corpo occupi la regione Ω dello spazio. Conoscendo la temperatura all'istante iniziale di tutti i punti di Ω, e conoscendo in ogni istante ($t > 0$) quale è la temperatura dei punti del bordo, si vuole conoscere la temperatura dei punti di Ω per ogni $t > 0$. Cioè si cerca una soluzione di (4.10) che soddisfi

$$u(x, y, z, 0) = h(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega, \tag{4.11}$$

$$u(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega, \quad t > 0 \tag{4.12}$$

dove h e φ sono funzioni assegnate. Nel caso in cui $\partial\Omega = \emptyset$, per esempio se $\Omega = \mathbb{R}^3$ la condizione (4.8) ovviamente scompare.

Problema di Cauchy-Neumann Assumiamo che un dato corpo occupi la regione Ω dello spazio. Conoscendo la temperatura all'istante iniziale di tutti i punti di Ω, e conoscendo in ogni istante ($t > 0$) la quantità di calore scambiata tra il corpo e l'ambiente in ogni punto di $\partial\Omega$, si vuole conoscere la temperatura dei punti di Ω per ogni $t > 0$. Si cerca cioè una soluzione dell'equazione (4.10) che soddisfi la condizione (4.11) e (al posto della (4.12))

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z, t) = \psi(x, y, z, t) \quad (x, y, z) \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{4.13}$$

dove n è un versore normale a $\partial\Omega$ e ψ è una funzione assegnata. (Questa si chiama: *condizione di Neumann.*)

4.2.4 Equazioni di Laplace e di Poisson

Consideriamo in $\mathbb{R}^n$ l'operatore differenziale $\Delta u \mapsto \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$. L'equazione di Poisson può essere scritta come segue:

$$\Delta u = f(x_1, \ldots, x_n). \tag{4.14}$$

La sua versione omogenea (cioè con $f = 0$):

$$\Delta u = 0$$

è detta equazione di Laplace. L'equazione (4.14) è un tipico rappresentante della classe delle equazioni del secondo ordine note come *ellittiche.*

Abbiamo già visto, nel caso di due sole variabili, una situazione in cui l'equazione di Laplace si presenta naturalmente (si veda pagina 13). Solitamente le equazioni di Laplace e Poisson rappresentano dei fenomeni stazionari.

Consideriamo, ad esempio un corpo omogeneo e isotropo che occupa una regione Ω dello spazio $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che in Ω siano presenti delle sorgenti (positive o negative) di calore e che f, rappresentante la quantità di calore prodotta o assorbita per unità di volume in ogni punto del corpo, sia indipendente dal tempo. Allora la distribuzione del calore in Ω, con un'opportuna scelta delle unità di misura, obbedisce all'equazione (4.14).

Un altro esempio, stavolta in due sole dimensioni spaziali, è il seguente: Consideriamo una membrana elastica omogenea che in posizione di riposo occupa la regione Ω del piano xy. Se $f(x, y)$ rappresenta la forza per unità di superficie applicata in direzione verticale (rispetto al piano xy) nel punto di coordinate (x, y), la membrana si incurverà assumendo la forma $z = u(x, y)$. Sotto opportune ipotesi e con un'opportuna scelta delle unità di misura u obbedisce all'equazione (4.14).

Usiamo la situazione descritta in quest'ultimo esempio per introdurre i due problemi che si incontrano più frequentemente nell'ambito delle equazioni ellittiche. Anche qui, per semplicità ed **a titolo puramente esemplificativo** considereremo solo il caso di due dimensioni spaziali.

Problema di Dirichlet Supponiamo che una membrana elastica omogenea sia fissata al sostegno di una curva chiusa $\Gamma : I \mapsto \mathbb{R}^3$, I un intervallo. Assumiamo inoltre che sulla membrana agisca una forza diretta lungo l'asse z; sia f la forza per unità di superficie. Vogliamo conoscere la forma assunta dalla membrana.

Se indichiamo con γ la curva nel piano xy su cui si proietta Γ ed indichiamo con Ω la regione di piano racchiusa da γ, per risolvere il problema dobbiamo cercare una soluzione di (4.14) in Ω che soddisfi

$$u\big(\xi(s), \eta(s)\big) = \zeta(s), \quad s \in I, \tag{4.15}$$

dove $\Gamma(s) = \big(\xi(s), \eta(s), \zeta(s)\big)$. Spesso la (4.15) viene scritta come segue:

$$u = \zeta, \quad \text{su } \partial\Omega$$

che è chiaramente equivalente.

Problema di Neumann Consideriamo una membrana elastica su cui agisce una forza f come nel problema di Dirichlet. Assumiamo che il bordo della membrana non sia fissato ma libero di scorrere verticalmente e sia sottoposto all'azione di una forza di densità lineare ψ diretta verticalmente. Per determinare le posizioni di equilibrio, **se esistono**, si deve trovare una soluzione della (4.14) che soddisfi

$$\frac{\partial u}{\partial n}\big(\xi(s), \eta(s)\big) = \psi(s) \quad s \in I, \tag{4.16}$$

dove n è un versore normale a $\partial\Omega$. Questa, che si chiama *condizione di Neumann*, è spesso scritta nella forma equivalente:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \psi, \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Se u è sufficientemente regolare e la curva γ è assegnata nella forma implicita $g(x, y) = 0$, la condizione (4.16) si può chiaramente scrivere:

$$\langle \nabla u, \nabla g \rangle = \psi \quad \text{in ogni punto di } \partial\Omega.$$

4.3 Principio di sovrapposizione

I problemi studiati fino qui, ed altri che vedremo più avanti, sono esempi di *problemi lineari*, nel senso che sia l'equazione sia le condizioni supplementari (condizioni iniziali, condizioni al bordo) sono lineari.

Il cosiddetto principio di sovrapposizione è uno strumento molto utile per il calcolo delle soluzioni nel caso di problemi **lineari**. Per illustrarlo, vediamo una notazione che permette di unificare tutti i problemi lineari. Una volta fissato lo spazio X di funzioni in cui cercare le soluzioni e lo spazio Y in cui sono assegnati i dati ed il 'termine noto' dell'equazione[4], tutti i problemi lineari possono essere schematizzati come segue:

L'equazione si può scrivere nella forma $\Lambda u = f$, dove $\Lambda : X \to Y$ è l'operatore lineare che rappresenta la parte omogenea dell'equazione e f è il termine noto. Per esempio, nel caso dell'equazione (4.5), $\Lambda u = u_{tt} - c^2 u_{xx}$ e $f = 0$.

Le condizioni supplementari (supponiamo ve ne siano r) si possono scrivere nella forma

$$\begin{gathered} L_1 u = \phi_1, \\ \vdots \\ L_r u = \phi_r, \end{gathered}$$

dove $L_i : X \to Y$, $I = 1, \dots r$, sono operatori lineari e $\phi_1, \dots, \phi_r \in Y$ sono i dati. Per esempio, per il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione (4.10) le condizioni sono due: (4.11) e (4.12). Queste si possono scrivere rispettivamente $L_1 u = \phi_1$ e $L_2 u = \phi_2$ con $L_1 u(x, y, z, t) = u(x, y, z, 0)$, $\phi_1 = h$, $L_2 u = u|_{\partial\Omega}$ e $\phi_2 = \varphi$.

[4]Nel nostro caso $X = C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $Y = C^0((\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ma, in generale, si possono cercare soluzioni ed assegnare condizioni anche in altri spazi, per esempio di funzioni meno regolari.

Conviene rappresentare in un'unica equazione sia l'equazione $\Lambda u = f$ che le condizioni supplementari. Per farlo introduciamo l'operatore lineare

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \Lambda \\ L_1 \\ \vdots \\ L_r \end{pmatrix} \qquad \text{ed il vettore} \quad \Phi = \begin{pmatrix} f \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_r \end{pmatrix}$$

Ogni problema lineare si può scrivere nella forma $\mathcal{L}u = \Phi$, con un'opportuna scelta degli operatori $\Lambda, L_1, \dots, L_r$ e degli elementi $f, \phi_1, \dots, \phi_r$.

La linearità dell'operatore $\mathcal{L}$ fa si che se u^1 e u^2 sono soluzione dei problemi $\mathcal{L}u = \Phi_1$ e $\mathcal{L}u = \Phi_2$ rispettivamente, allora, dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha u^1 + \beta u^2$ è soluzione del problema $\mathcal{L}u = \alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2$. In altre parole gli effetti dei dati iniziali si sommano (sovrappongono) nella soluzione. Questo fatto è noto come *principio di sovrapposizione*.[5]

Esempio 4.3.1. Esaminiamo il caso di una corda vibrante di lunghezza infinita. Se consideriamo il caso in cui sulla corda agisce una forza esterna non trascurabile (per esempio la di gravità), al posto dell'equazione (4.5) abbiamo

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x), \tag{4.17}$$

dove f rappresenta la forza esterna (per unità di lunghezza) agente nel punto di ascissa x.

Se la corda, nell'istante iniziale ha la forma $u(x,0) = h(x)$ ed i suoi punti hanno 'velocità verticale' $u_t(x,0) = k(x)$, per determinare il moto negli istanti successivi possiamo trovare le soluzioni u^1 e u^2 dei due problemi (ai valori iniziali)

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x), \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = h(x), \\ u_t(x,0) = k(x). \end{cases}$$

Per il principio di sovrapposizione, il moto della corda sarà dato da $u(x,t) = u^1(x,t) + u^2(x,t)$.

Il seguente esempio mostra che il principio di sovrapposizione **non** è valido in generale per equazioni non lineari.

Esempio 4.3.2. Le funzioni $v(x,y) = e^x$, $w(x,y) = e^{-y}$ sono soluzione dell'equazione (non lineare)

$$\left(u_x + u_y\right)^2 - u^2 = 0,$$

ma $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$ **non** è soluzione.

[5] Il principio di sovrapposizione può essere esteso, in certi casi, anche ad un'infinità (continua o numerabile) di problemi. Questo è particolarmente utile quando i dati sono in forma di serie oppure di integrale.

4.4 Problemi (non) ben posti

Dato un problema composto da un'equazione alle derivate parziali e da condizioni supplementari, le questioni principali che ci dobbiamo porre sono:

Esistenza della soluzione Cioè stabilire se, assegnato un dato iniziale, esiste una soluzione. Nel caso di un problema lineare $\Lambda u = \Phi$ si tratta di stabilire la suriettività di Λ; per il principio di sovrapposizione questo può essere ridotto a stabilire l'esistenza di soluzioni di problemi più semplici.

Unicità della soluzione Stabilire se, per qualche dato si può trovare più di una soluzione. Nel caso di un problema lineare $\Lambda u = \Phi$, la questione si può ridurre a stabilire se la funzione nulla sia l'unica soluzione del problema omogeneo associato $\Lambda = 0$. Per vederlo, è sufficiente osservare che se u^1 e u^2 sono soluzioni di $\Lambda u = \Phi$, allora, per la linearità, $u^1 - u^2$ è soluzione di $\Lambda = 0$.

Dipendenza continua dai dati Si tratta di stabilire se condizioni supplementari 'vicine' danno soluzioni 'vicine'. Per rendere precisa quest'affermazione, si deve definire una nozione di 'distanza ' sia nello spazio di funzioni in cui si cercano le soluzioni sia nello spazio in cui sono assegnati i dati del problema. Una definizione precisa ci porterebbe troppo lontano; limitiamoci ad osservare che questa proprietà ha grande importanza nella pratica. Infatti i dati del problema risultano spesso da misurazioni che, per loro natura, sono affette da errori. Questi errori si riflettono naturalmente sui risultati del problema. La dipendenza continua dai dati assicura che l'errore sui risultati del problema può essere reso arbitrariamente piccolo rendendo sufficientemente accurate le misurazioni. Molti problemi fisici reali, tuttavia, non godono di questa proprietà.

Un problema, composto da un'equazione alle derivate parziali e da condizioni supplementari, si dice *ben posto* (secondo Hadamard) se gode delle tre proprietà elencate sopra. è bene ribadire che non tutti i problemi di interesse fisico sono ben posti.

Esempio 4.4.1 (Problema retrogrado per l'equazione del calore). Sia Ω il rettangolo $(0,1) \times (-1,0)$. Consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, i problemi

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = e^{-n}\sin(n\pi x), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \end{cases} \tag{4.18}$$

e, denotata con u_n la soluzione, determiniamo $u_n(x,-1)$. Questo, con un'opportuna scelta delle unità di misura, corrisponde fisicamente a determinare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, quali condizioni nel passato (al tempo $t = -1$) abbiano determinato la distribuzione attuale ($t = 0$) di temperatura $u(x,0) = e^{-n}\sin(n\pi x)$.

Con facili calcoli, si vede che $u_n(x,t) = e^{-n^2\pi^2 t - n}\sin(n\pi x)$, per cui

$$u_n(x,-1) = e^{n^2\pi^2 - n}\sin(n\pi x).$$

Si osservi che, prendendo $n \to \infty$ si ottiene

$$|u_n(x,0)| \to 0 \qquad \text{per ogni } x \in (0,1),$$

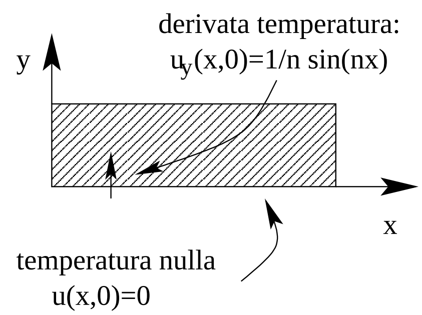
mentre

$$\sup_{x\in(0,1)} |u_n(x,-1)| \to \infty.$$

Cioè, se ammettiamo la possibilità di commettere piccoli errori nella misurazione della temperatura attuale, allora, solo sulla base di quest'informazione, non siamo in grado di conoscere la temperatura nel passato.

Questo ragionamento ci mostra che il problema (4.18) non è ben posto.

Un altro problema non ben posto è il problema ai valori iniziali per l'equazione di Laplace:



Esempio 4.4.2 (Hadamard). Consideriamo la distribuzione della temperatura su una piastrina rettangolare con i lati disposti lungo gli assi x e y. Supponiamo che non vi siano fonti di calore e che siano note la temperatura lungo l'asse $y = 0$ e la variazione della temperatura ortogonalmente a quest'asse. Cerchiamo di determinare la temperatura nelle vicinanze dell'asse $y = 0$. In quest'esempio, dato $n \in \mathbb{N}$, assumiamo nulla la temperatura sull'asse x ed uguale a $(1/n)\sin(nx)$ la sua derivata lungo l'asse x nella direzione dell'asse y. Cioè consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, i seguenti problemi:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u_y(x,0) = \frac{1}{n}\sin(nx). \end{cases} \tag{4.19}$$

Si vede che la soluzione u^n è data da

$$u^n(x,y) = \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2n^2}\sin(nx)$$

Osserviamo che per ogni x, $|u^n_y(x,0)| \to 0$ se $n \to \infty$ ma, per quanto piccolo si prenda $y > 0$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u^n(x,y)| \to \infty.$$

Questo significa che, per quanto piccoli siano gli errori che si commettono nella misurazione della derivata della temperatura, questi possono condurre ad errori macroscopici anche in vicinanza dei punti in cui si effettua la rilevazione. Cioè il problema (4.19) non è ben posto.

4.5 Il principio di massimo per l'equazione di Poisson

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Consideriamo il problema di Diriclet

$$\Delta u(x) = -F(x) \qquad x \in \Omega, \tag{4.20a}$$
$$u(x) = f(x) \qquad x \in \partial\Omega, \tag{4.20b}$$

con F e f funzioni continue. Si può provare il seguente importante risultato.

Teorema 4.5.1 (Principio di massimo debole). *Supponiamo che $F(x) \leq 0$ per ogni $x \in \Omega$. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ è una soluzione di* (4.20a)*, allora*

$$u(x) \leq \max_{\xi \in \partial\Omega} u(\xi) \quad \forall x \in \Omega.$$

Osservazione 4.5.2. Nel caso dell'equazione di Laplace $\Delta u = 0$, applicando il Teorema 4.5.1 alle soluzioni u e $-u$, si ha

$$\min_{\xi \in \partial\Omega} u(\xi) \leq u(x) \leq \max_{\xi \in \partial\Omega} u(\xi) \quad \forall x \in \Omega.$$

Questo implica che l'unica soluzione del problema

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \qquad x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 \qquad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.21}$$

sia $u(x) \equiv 0$. Inoltre, se v e w sono soluzioni del problema (4.20) allora, per il principio di sovrapposizione, si ha che $u = v - w$ è soluzione del problema (4.21). Conseguentemente $v(x) \equiv w(x)$. Si è quindi provata l'unicità delle soluzioni del problema (4.20).

Il Teorema 4.5.1 può essere usato anche per stabilire la dipendenza continua delle soluzioni del problema (4.20) dalle condizioni iniziali. Infatti, se u è una soluzione,

$$-\Delta \left(u + \frac{1}{4} \max_{\xi \in \overline{\Omega}} |F(\xi)| \, \|x\|^2 \right) \leq 0$$

e conseguentemente, se R è il raggio di un cerchio contenente Ω,

$$u + \frac{1}{4} \max_{\xi \in \overline{\Omega}} |F(\xi)| \, \|x\|^2 \leq \max_{\xi \in \partial\Omega} f(\xi) + \frac{1}{4} R^2 \max_{\xi \in \overline{\Omega}} |F(\xi)|,$$

da cui segue che per ogni $x \in \overline{\Omega}$

$$u(x) \leq \max_{\xi \in \partial\Omega} |f(\xi)| + \frac{1}{4} R^2 \max_{\xi \in \overline{\Omega}} |F(\xi)|.$$

Ora, applicando considerazioni simili alla soluzione $-u$ del problema

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= F(x) \qquad x \in \Omega, \\ u(x) &= -f(x) \qquad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

si ottiene la disuguaglianza opposta. Conseguentemente si ha che

$$|u(x)| \leq \max_{\xi\in\partial\Omega} |f(\xi)| + \frac{1}{4}R^2 \max_{\xi\in\overline{\Omega}} |F(\xi)| \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Questa disuguaglianza, ragionando come nell'Osservazione 4.5.2, prova la dipendenza continua delle soluzioni dai dati iniziali.

Il problema dell'esistenza delle soluzioni dell'equazione (4.20a) è più complessa e ci porterebbe troppo lontano. Per l'equazione di Laplace, comunque, si può provare il seguente teorema:

Teorema 4.5.3. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ dotato di frontiera sufficientemente liscia.*[6] *Allora, per ogni funzione $f \in C(\partial\Omega)$, esiste un'unica soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del problema*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \textit{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= f. \end{aligned}$$

Questo teorema, insieme agli altri ragionamenti fatti in questo paragrafo, mostra che il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace è ben posto.

4.6 Il metodo dell'integrale dell'energia

Quello dell'integrale dell'energia è un metodo utile per studiare le proprietà di unicità delle soluzioni di alcuni dei problemi introdotti in questo capitolo. Esso deve il suo nome dal fatto che si traggono conclusioni qualitative sulla soluzione u dall'integrale $\int_\Omega \|\nabla u\|^2 \,\mathrm{d}x$, detto *integrale dell'energia* a causa della sua interpretazione fisica. Qui, per semplicità, studieremo soltanto alcuni esempi.

In tutto questo paragrafo assumeremo che Ω sia un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera sufficientemente regolare da poter applicare il teorema della divergenza. Inoltre, in questo paragrafo, con la parola 'soluzione' ci riferiremo ad una funzione in $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Ci serviremo della seguente formula:

$$\operatorname{div}(u\nabla u) = u\Delta u + \|\nabla u\|^2 \tag{4.22}$$

che può essere provata direttamente in modo molto semplice.

Consideriamo per esempio il seguente problema di Neumann per l'equazione di Laplace:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \qquad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) &= 0 \qquad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.23}$$

[6] È, per esempio, sufficiente richiedere che la frontiera sia di classe C^2, cioè che per ogni punto di $\partial\Omega$ esista un intorno V tale che $V \cap \partial\Omega$ sia rappresentabile come il grafico di una funzione C^2 rispetto ad uno qualsiasi degli iperpiani coordinati

Moltiplichiamo ambo i membri di $\Delta u = 0$ per u ed integriamo su Ω. Tenendo conto della (4.22) e del Teorema della divergenza si ottiene

$$\begin{aligned}0 = \int_\Omega u(x)\Delta u(x)\ \mathrm{d}x &= \int_\Omega \operatorname{div}\big(u(x)\nabla u(x)\big)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2\ \mathrm{d}x\\ &= \int_{\partial\Omega} u(x)\,\nabla u(x)\cdot n\ \mathrm{d}S - \int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2\ \mathrm{d}x\\ &= \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)\ \mathrm{d}S - \int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tenendo conto della condizione al bordo, si ha

$$\int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2\ \mathrm{d}x = 0.$$

Questo, visto che $\|\nabla u(x)\|^2$ è una funzione continua e non negativa, implica $\nabla u(x) = 0$.

Si è quindi provato che il problema (4.23) ammette come soluzione tutte le costanti. Ragionando come nell'Osservazione 4.5.2 si ha che: **Se il problema di Neuman (non omogeneo) per l'equazione di Laplace**

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0 \qquad x\in\Omega,\\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) &= f \qquad x\in\partial\Omega,\end{aligned}$$

ammette soluzione, allora essa è determinata a meno di una costante additiva arbitraria.

Assegnato $\bar t$, consideriamo ora il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione di diffusione:

$$\begin{aligned}u_t - \Delta u &= 0 \quad x\in\Omega,\ 0<t<\bar t,\\ u(x,0) &= 0 \quad x\in\Omega,\\ u(x,t) &= 0 \quad x\in\partial\Omega,\ 0<t<\bar t.\end{aligned}\tag{4.24}$$

Se u è una soluzione, moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione $u_t - \Delta u = 0$ per u ed integriamo su Ω. Dal momento che sia u^2 sia $2uu_t$ sono funzioni continue su $\overline{\Omega}$, si ha $\int_\Omega uu_t\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial t}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2\ \mathrm{d}x$. Inoltre, tenendo conto della (4.22) e del Teorema della divergenza, si ottiene

$$\begin{aligned}0 &= \int_\Omega uu_t - u\Delta u\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \operatorname{div}\big(u\nabla u\big)\ \mathrm{d}x + \int_\Omega \|\nabla u\|^2\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} u\,\nabla u\cdot n\ \mathrm{d}S + \int_\Omega \|\nabla u\|^2\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}\ \mathrm{d}S + \int_\Omega \|\nabla u\|^2\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Per le condizioni al bordo,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \|\nabla u\|^2 \,\mathrm{d}x \leq 0.$$

Questa diseguaglianza ci dice che la derivata della funzione $H(t) = \int_\Omega [u(t,x)]^2 \,\mathrm{d}x$ è non positiva. Dal momento che $H(0) = 0$, per la condizione iniziale, e che $H(t) \geq 0$, $0 < t < \bar{t}$, per costruzione, si ha necessariamente $H(t) \equiv 0$. Quindi $u(x,t) = 0$ per ogni $0 < t < \bar{t}$.

Abbiamo quindi dimostrato che **il problema** (4.24) **ammette solo la soluzione nulla**.

Esercizio 4.6.1. Ripetere gli stessi ragionamenti per il problema di Cauchy-Neumann omogeneo.

Esercizio 4.6.2. Ragionando come nell'Osservazione 4.5.2 trarre delle conclusioni relative ai problemi di Cauchy-Dirichlet e di Cauchy-Neumann per l'equazione di Laplace.

Riferimenti ed approfondimenti

Paragrafi 4.1 e 4.2 [8], [13, cap. 7 §1], [11], [12], [21].

Paragrafo 4.3: [13, cap. 7 §1].

Paragrafo 4.4: [13, cap. 7, §1], [21, cap. 6 §5].

Paragrafo 4.5: [18, cap. 3 §12].

Paragrafo 4.6: [13, cap. 7, §1].