Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Capitolo 5

Equazioni del primo ordine

5.1 Equazioni lineari e quasi-lineari del primo ordine

Ci limiteremo, per semplicità a considerare equazioni in due sole variabili indipendenti. Le equazioni della forma

$$P\big(x,y,u(x,y)\big)u_x(x,y)+Q\big(x,y,u(x,y)\big)u_y(x,y)=R\big(x,y,u(x,y)\big), \tag{5.1}$$

dove P, Q ed R sono funzioni C^1 definite su un aperto Ω di $\mathbb{R}^3$, sono dette *quasi-lineari*.

Le equazioni della forma

$$a(x,y)u_x(x,y)+b(x,y)u_y(x,y)+c(x,y)u(x,y)=d(x,y), \tag{5.2}$$

dove a, b, c e d sono funzioni C^1 definite su un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$, sono dette *lineari*.

Esempio 5.1.1. Sia $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una funzione C^1 con gradiente non nullo assegnata. Al variare di $c\in g(\mathbb{R}^3)$ l'equazione

$$g(x,y,z)=c$$

definisce una famiglia di superfici. Se la superficie S data da $z=u(x,y)$ è ortogonale ad ognuna di esse, allora, scrivendo $f(x,y,z)=u(x,y)-z$, S ha equazione $f(x,y,z)=0$ e deve essere $\langle\nabla g(x,y,z),\nabla f(x,y,z)\rangle=0$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Dunque u soddisfa

$$g_x\big(x,y,u(x,y)\big)u_x(x,y)+g_y\big(x,y,u(x,y)\big)u_y(x,y)=g_z\big(x,y,u(x,y)\big)$$

che è un'equazione quasi-lineare.

5.2 Il problema di Cauchy per equazioni quasi-lineari

Il problema di Cauchy per le equazioni differenziali ordinarie può essere descritto come la ricerca di una soluzione il cui grafico passa per un punto assegnato. Per

le equazioni alle derivate parziali, invece, consiste nella ricerca di una soluzione il cui grafico contenga una curva data.

Più precisamente, sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e sia $\Gamma : I \to \Omega$, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, una curva in Ω data da $s \mapsto \big(\xi(s), \eta(s), \zeta(s)\big)$. Supponiamo che le funzioni ξ, η e ζ siano di classe C^1 e consideriamo la curva in $\mathbb{R}^2$ data da $s \mapsto \gamma(s) = \big(\xi(s), \eta(s)\big)$; cioè la proiezione ortogonale di Γ sul piano xy. Diremo che u è una soluzione (locale) del problema di Cauchy:

$$P(x,y,u)u_x + Q(x,y,u)u_y(x,y) = R(x,y,u), \tag{5.3a}$$

$$u\big(\xi(s),\eta(s)\big) = \zeta(s), \quad \forall s \in I, \tag{5.3b}$$

se esiste un intorno $\tilde{U}$ di $\gamma(I)$ tale che $u : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ è una soluzione di (5.3a) che soddisfa identicamente (5.3b). Chiameremo la curva Γ *dato iniziale* del problema (5.3).

In altre parole, la condizione (5.3b) richiede che la soluzione assuma i valori $\zeta(s)$ lungo la curva $\gamma(s)$, per questo diremo che i dati iniziali sono assegnati lungo la curva γ.

5.2.1 Esistenza ed unicità

Cerchiamo di farci un'idea geometrica di come si possa costruire una soluzione locale del problema (5.3). Questo ci permetterà di capire quali sono le condizioni da richiedere affinché tale soluzione esista.

Sia Ω un sottoinsieme aperto e connesso di $\mathbb{R}^3$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale dato da $f(\vec{x}) = \big(P(\vec{x}), Q(\vec{x}), R(\vec{x})\big)$, dove $\vec{x} = (x,y,z)$. Fissato $s \in I$, consideriamo il problema di Cauchy (per le equazioni differenziali ordinarie)

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau} = f(\vec{x}), \\ \vec{x}(0) = \big(\xi(s), \eta(s), \zeta(s)\big). \end{cases} \tag{5.4}$$

Per il teorema di Cauchy (5.4) ammette un'unica soluzione locale (dipendente da τ che varia in un intorno di 0). Le soluzioni di (5.4) al variare di s sono curve di $\mathbb{R}^3$ dette *curve caratteristiche*.[1] L'idea è di incollare insieme le diverse soluzioni che si ottengono al variare di s in modo da ottenere una superficie parametrizzata dalla coppia (s,τ). Perché tale superficie sia il grafico di una soluzione di (5.3), è necessario che il suo versore normale non sia parallelo al piano xy. Inoltre, affinché la soluzione risulti determinata univocamente, Γ non dovrà essere essa stessa una curva caratteristica.

Una condizione che assicura l'esistenza di una superficie come sopra è che la componente lungo l'asse z del prodotto vettoriale[2] $f\big(\Gamma(s)\big) \times \Gamma'(s)$ sia non nulla;

[1] In generale, il nome curve caratteristiche si applica a tutte le *linee di flusso* del campo f, cioè alle curve che hanno la proprietà di essere tangenti in ogni loro punto ad f. Le soluzioni di (5.4) godono evidentemente di questa proprietà.

[2] Se $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, $v \times w = (v_2w_3 - w_2v_3, w_1v_3 - v_1w_3, v_1w_2 - w_1v_2)$ è un vettore ortogonale al piano determinato da v e w; in molti testi il prodotto vettoriale è indicato con il simbolo $\wedge$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

cioè che

$$P\big(\Gamma(s)\big)\eta'(s) - Q\big(\Gamma(s)\big)\xi'(s) \neq 0. \tag{5.5}$$

In altri termini, le proiezioni di f e di Γ sul piano xy devono essere trasverse.

Osservazione 5.2.1. Consideriamo il caso di equazioni lineari, cioè della forma (5.2). La (5.5) assume la forma

$$a\big(\gamma(s)\big)\eta'(s) - b\big(\gamma(s)\big)\xi'(s) \neq 0. \tag{5.6}$$

Le curve del piano xy che soddisfano la condizione 'opposta', cioè:

$$a\big(\gamma(s)\big)\eta'(s) - b\big(\gamma(s)\big)\xi'(s) = 0$$

per ogni s, sono dette *linee caratteristiche*. Nel caso di equazioni lineari, la condizione (5.6) può essere espressa dicendo che **la curva γ su cui sono assegnati i dati iniziali non deve essere tangente in alcun punto ad una linea caratteristica.**

Osserviamo inoltre che, nel caso di equazioni lineari, la condizione (5.6) non dipende dai dati assegnati lungo la curva γ

Si possono provare i seguenti teoremi.

Teorema 5.2.2. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $I \subset \mathbb{R}$ e $\Gamma : I \to \Omega$ come sopra e supponiamo che P, Q ed R siano C^1 in Ω. Se per $s_0 \in I$*

$$P\big(\Gamma(s_0)\big)\eta'(s_0) - Q\big(\Gamma(s_0)\big)\xi'(s_0) \neq 0, \tag{5.7}$$

allora esiste un intorno U di $\big(\xi(s_0), \eta(s_0)\big)$ in $\mathbb{R}^2$, un intorno $\tilde{I} \subset I$ di s_0 ed una unica funzione $u : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ che risolve (5.3) con $\tilde{I}$ al posto di I.[3]

Esempio 5.2.3. Trovare una soluzione locale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (y+u)u_x + yu_y = x - y, \\ u(x,1) = 1 + x. \end{cases}$$

Qui, chiaramente, il problema di Cauchy non è nella forma (5.3). Per metterlo nella forma richiesta definiamo $\Gamma(s) = (s, 1, 1+s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Il campo vettoriale $f(\vec{x}) = \big(P(\vec{x}), Q(\vec{x}), R(\vec{x})\big)$ è dato da $f(x,y,z) = (y + z, y, x - y)$. Per ogni $s \in \mathbb{R}$,

$$P\big(\Gamma(s)\big)\eta'(s) - Q\big(\Gamma(s)\big)\xi'(s) = -1 \neq 0,$$

dunque il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione locale.

[3]Ovviamente dovrà necessariamente essere $\tilde{U} \subset \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in \Omega\big\}$ e, inoltre, $\big(\xi(s), \eta(s)\big) \in \tilde{U}$ per ogni $s \in \tilde{I}$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Procediamo adesso a determinare la soluzione. Per calcolare le curve caratteristiche dobbiamo risolvere il problema di Cauchy (ordinario)

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = y + z, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = y, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = x - y, \\ x(0) = s, \\ y(0) = 1, \\ z(0) = 1 + s. \end{cases} \tag{5.8}$$

Per risolvere questo sistema, fissiamo s ed osserviamo che necessariamente $y_s(\tau) = k_0(t)e^{\tau}$ per qualche funzione k_0 di t.[4] Derivando la prima equazione e sostituendovi le altre due, tenendo conto della forma di $y_s(\tau)$, si ottiene $\frac{\mathrm{d}^2 x_s}{\mathrm{d}\tau^2} = x_s$, da cui segue $x_s(\tau) = k_1(s)e^{\tau} + k_2(s)e^{-\tau}$. Sostituendo infine nella terza equazione, $z_s(\tau) = \big(k_1(s) - k_0(s)\big)e^{\tau} - k_2(s)e^{-\tau} + k_3(s)$. Sostituendo nella prima delle (5.8) si ottiene, necessariamente $k_3(s) \equiv 0$. La condizione iniziale, poi, ci permette di ottenere un'espressione per k_0, k_1 e k_2; basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_\tau(0) = k_1 + k_2 = s, \\ y_\tau(0) = k_0 = 1, \\ z_\tau(0) = k_1 - k_2 - 1 = 1 + s. \end{cases}$$

Cioè $k_0(s) = 1$, $k_1(s) = s + 1$, $k_2(s) = -1$. Si ottiene la seguente rappresentazione parametrica del grafico della soluzione

$$(s, \tau) \mapsto \big(x_s(\tau), y_s(\tau), z_s(\tau)\big) = \big((1 + s)e^{\tau} - e^{-\tau},\ e^{\tau},\ se^{\tau} + e^{-\tau}\big).$$

Eliminando s e τ nell'espressione di $z_s(\tau)$, si ha $z = x - y + \frac{2}{y}$. Dunque, la soluzione cercata è

$$u(x, y) = x - y + \frac{2}{y}.$$

Esercizio 5.2.4. Trovare una soluzione locale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (y + u)u_x + yu_y = x - y, \\ u(x, 1) = x. \end{cases}$$

Esercizio 5.2.5. Trovare una soluzione locale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (y + u)u_x + yu_y = 1 - y, \\ u(x, 1) = 1 + x. \end{cases}$$

Esaminiamo delle condizioni che permettano di escludere l'esistenza di una soluzione locale del problema di Cauchy. Mettiamoci nelle ipotesi del Teorema 5.2.2.

[4] La dipendenza della soluzione di (5.8) da s, che per ora è fissato, è indicata dal pedice 's'

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

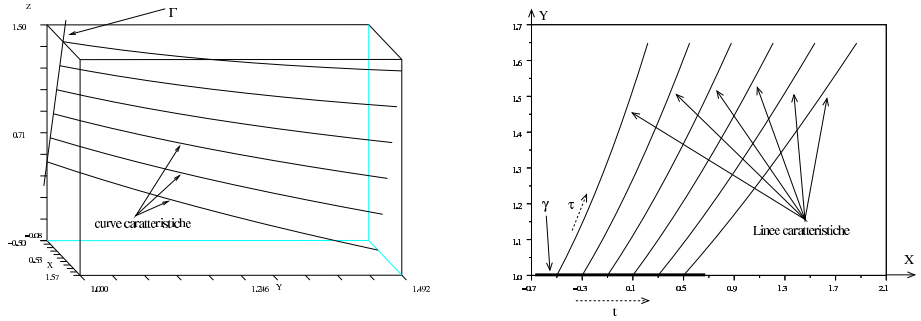


Figura 5.1: Curve e linee caratteristiche per l'Esempio 5.2.3

Se la condizione (5.7) è violata, cioè se vale

$$P\big(\Gamma(s_0)\big)\eta'(s_0) - Q\big(\Gamma(s_0)\big)\xi'(s_0) = 0, \tag{5.9}$$

allora, supponendo che P e Q non si annullino contemporaneamente allora (5.9) significa che esiste $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

$$\begin{aligned} \mu P\big(\Gamma(s_0)\big) &= \xi'(s_0), \\ \mu Q\big(\Gamma(s_0)\big) &= \eta'(s_0). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Supponiamo che

$$\mu R\big(\Gamma(s_0)\big) \neq \zeta'(s_0). \tag{5.11}$$

Se sono soddisfatte le condizioni (5.9)–(5.11) allora non può esistere una condizione locale. La ragione è che, in questo caso, la condizione iniziale e l'equazione forniscono informazioni discordanti sulla derivata della restrizione di u alla curva $t \mapsto \big(\xi(s), \eta(s)\big)$.

Poniamo $v(s) = u\big(\xi(s), \eta(s)\big)$, allora $v'(s_0) = \zeta'(s_0)$. Dalla (5.10) e dalla (5.3a) si ottiene

$$\begin{aligned} v'(s_0) &= u_x\big(\xi(s_0), \eta(s_0)\big)\xi'(s_0) + u_y\big(\xi(s_0), \eta(s_0)\big)\eta'(s_0) = \\ &= \mu\left\{P\big(\Gamma(s_0)\big)u_x\big(\xi(s_0), \eta(s_0)\big) + Q\big(\Gamma(s_0)\big)u_y\big(\xi(s_0), \eta(s_0)\big)\right\} = \\ &= \mu R\big(\Gamma(s_0)\big), \end{aligned}$$

che contraddice la (5.11). Abbiamo provato il seguente teorema.

Teorema 5.2.6. *Se sono verificate le condizioni* (5.9)–(5.11) *allora il problema* (5.3) *non ha soluzione locale in nessun intorno del punto* $(x_0, y_0) = \big(\xi(s_0), \eta(s_0)\big)$.

Si può inoltre provare il seguente teorema.

Teorema 5.2.7. *Supponiamo che esista* $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *tale che le* (5.10) *siano verificate e che*

$$\mu R\big(\Gamma(s_0)\big) = \zeta'(s_0),$$

allora il problema (5.3) *ha infinite soluzioni.*

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Esercizio 5.2.8. Consideriamo l'equazione

$$uu_x + yu_y = x \tag{5.12}$$

con le condizioni iniziali

$$\Gamma_1(s) = (s, s, 2s), \tag{5.13}$$
$$\Gamma_2(s) = (s, s, s), \tag{5.14}$$
$$\Gamma_3(s) = (s, s, \sqrt{2}/2s). \tag{5.15}$$

Stabilire quante soluzioni hanno i problemi (5.12)-(5.13), (5.12)-(5.14) e (5.12)-(5.15) (una, nessuna o infinite?).

Esercizio 5.2.9. Dedurre il seguente Corollario del Teorema 5.2.2

Corollario 5.2.10. *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} P(x, y, u)u_x + u_y = R(x, y, u), \\ u(x, 0) = h(x), \end{cases}$$

dove P ed R sono come di consueto ed h è una funzione C^1 definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, ammette sempre una soluzione locale.

5.3 Leggi di conservazione

Chiamiamo *leggi di conservazione* le particolari equazioni quasi-lineari della forma

$$a(u)u_x + u_t = 0 \tag{5.16}$$

(la variabile y usata nel paragrafo precedente sarà qui rimpiazzata dalla variabile t rappresentante il tempo). Questo tipo di equazioni differenziali si incontra in molte applicazioni. Esse modellano il flusso attraverso una superficie di una qualche grandezza fisica, che non possa venire creata o distrutta (da cui il nome).[5]

Noi studieremo il caso unidimensionale, questo significa che esamineremo fenomeni fisici che possono venire modellati con una sola variabile spaziale, non che i processi studiati accadono solo in una dimensione. Per maggiore semplicità, dove non diversamente specificato, i dati iniziali saranno considerati assegnati su tutto l'asse x; il caso in cui i dati sono assegnati solo su un intervallo I non è molto diverso.

Consideriamo il problema di Cauchy

$$a(u)u_x + u_t = 0, \tag{5.18a}$$
$$u(x, 0) = h(x), \tag{5.18b}$$

[5] I termini 'creazione' e 'distruzione' si riferiscono all'aggiunta o sottrazione dall'esterno del sistema in esame della grandezza fisica studiata.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Perché '*leggi di conservazione*'?

Per fissare le idee, supponiamo che $u(x,y)$ sia la densità di massa di un fluido contenuto in un tubo disposto lungo l'asse x (assumiamo questo per comodità, quello che è importante è che il fenomeno sia unidimensionale).
Fissiamo un tratto di tubo $I=[x_1,x_2]$. Se il tubo non ha fori nel tratto I attraverso i quali venga aggiunto o tolto fluido, la massa contenuta in I al tempo y è data da $\int_{x_1}^{x_2} u(x,y)\,\mathrm{d}x$. Il fluido può entrare nel tratto I di tubo solo attraverso le estremità x_1 e x_2, supponiamo che la quantità in ingresso (o in uscita) di fluido sia funzione soltanto della densità u nei punti x_1 e x_2. Si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,\mathrm{d}x = f\big(u(x_1,t)\big) - f\big(u(x_2,t)\big), \tag{5.17}$$

dove la funzione f modella il passaggio del fluido attraverso le estremità del tubo. Se u è sufficientemente regolare, per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale,

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(x,t)\,\mathrm{d}x = f\big(u(x_1,t)\big) - f\big(u(x_2,t)\big).$$

Se f è di classe C^1 si ha:

$$\begin{aligned} u_t(x_1,t) &= \lim_{x_2\to x_1} \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} u_t(x,t)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{x_2\to x_1} \frac{f\big(u(x_1,t)\big)-f\big(u(x_2,t)\big)}{x_2-x_1} = -f'\big(u(x_1,t)\big)u_x(x_1,t). \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di x_1, $u_t(x,t)+f'\big(u(x,t)\big)u_x(x,t)=0$, che è della forma (5.16).

dove a ed h sono funzioni C^1 assegnate. Il problema (5.18) ammette una soluzione locale per il Corollario 5.2.10. Per determinarla procediamo come nel paragrafo precedente; dalla risoluzione del sistema delle caratteristiche

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = a(z), \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = 1, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = 0, \\ x_s(0) = s, \\ t_s(0) = 0, \\ z_s(0) = h(s), \end{cases}$$

otteniamo la seguente rappresentazione parametrica della soluzione:

$$\begin{cases} x_s(\tau) = a\big(h(s)\big)\tau + s, \\ t_s(\tau) = \tau, \\ z_s(\tau) = h(s). \end{cases}$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Da cui segue che z deve soddisfare l'equazione (implicita, non lineare)

$$z = h\big(x - a(z)t\big). \tag{5.19}$$

Risolvendo quest'equazione rispetto a z, se possibile, otteniamo la soluzione locale $z = u(x,t)$ del problema di Cauchy. Il problema è: quest'equazione è veramente risolubile?

Fissiamo un'ascissa x_0. Applichiamo il Teorema della Funzione Implicita (Dini) nel punto di coordinate $\big(x_0, 0, h(x_0)\big)$ alla funzione

$$\Psi(x,t,z) = z - h\big(x - a(z)t\big). \tag{5.20}$$

Poichè

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z}(x,t,z) = 1 + h'\big(x - a(z)t\big)a'(z)t, \tag{5.21}$$

Si ha $\frac{\partial \Psi}{\partial z}\big(x_0, 0, h(x_0)\big) = 1 \neq 0$. Allora, per il Teorema della Funzione Implicita, esiste un intorno U di $(x_0, 0)$ ed una funzione u tale che, posto $z = u(x,t)$, si ha $\Psi\big(x,t,u(x,t)\big) = 0$ per ogni $(x,t) \in U$.

Sia V un insieme aperto in cui u è differenziabile (non necessariamente coincidente con U), in ogni punto di V valgono le seguenti relazioni:[6]

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \frac{h'\big(x - a(z)t\big)}{1 + h'\big(x - a(z)t\big)a'(z)t}, \\ u_t(x,t) &= -\frac{a(z)h'\big(x - a(z)t\big)}{1 + h'\big(x - a(z)t\big)a'(z)t}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Perciò u_x e u_t tendono a diventate infinite quando la (5.21) tende a zero. In realtà quando la (5.21) diventa zero la soluzione u ha una discontinuità nota come *shock* (o *urto*).[7] Notiamo che la (5.21) è sempre strettamente maggiore di 0 quando $|y|$ è sufficientemente piccolo.

Per capire meglio come si sviluppano gli shocks, osserviamo che le soluzioni della (5.19) sono costanti lungo le linee caratteristiche[8] che come sappiamo (vedere l'Osservazione 5.2.1) sono curve del piano xt.

Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e poniamo $z_0 = h(x_0)$. Tutti i punti della retta

$$r = \left\{ (x,t,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x - a(z_0)t = x_0, \\ z = z_0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

[6] Per ricavarle, è sufficiente osservare che $g(x,t) \underset{\text{def.}}{=} \Psi\big(x,t,u(x,t)\big) = 0$ per ogni $(x,t) \in U$ allora $g_x(x,t) = g_y(x,t) = 0$. Per esempio, si ha $g_x(x,t) = \Psi_x\big(x,t,u(x,t)\big) + \Psi_z\big(x,t,u(x,t)\big)u_x(x,t)$, da cui si ricava la prima delle (5.22). La seconda si può ottenere in modo analogo.

[7] Quindi in quei punti u non è una soluzione, almeno non nel senso in cui la intendiamo noi. In realtà, uno studio approfondito degli shocks richiede l'estensione della nozione di soluzione, cosa che non tratteremo.

[8] Non si devono confondere le linee caratteristiche con le curve caratteristiche anch'esse definite nel paragrafo precedente. Infatti le curve caratteristiche (che sono curve di $\mathbb{R}^3$), in quanto soluzioni di un problema di Cauchy per equazioni ordinarie autonome di classe C^1, non si possono intersecare; le linee caratteristiche invece, come vedremo, possono.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

soddisfano la (5.19). In altre parole, lungo la retta

$$x - a(z_0)t = x_0 \tag{5.23}$$

del piano xy la soluzione vale costantemente $h(x_0)$.

Esercizio 5.3.1. Osservare che, fissato x_0, r è una curva caratteristica e che la retta (del piano xt) di equazione (5.23) è una linea caratteristica.

Siccome la variabile t indica il tempo, ci interesserà analizzare soprattutto il semipiano $t > 0$ (cioè il futuro, dopo l'istante $t = 0$). Si può dimostrare che se nessuna coppia di rette della forma (5.23) si incontra nel semipiano $t > 0$ allora, per ogni $t > 0$ la soluzione esiste ed è differenziabile (quindi non ci sono shocks). Se viceversa se due rette della forma (5.23) si incontrano per qualche $t > 0$, allora nel punto di intersezione c'è un'incompatibilità data dal fatto che la soluzione dovrebbe assumere due valori distinti.

Fissati, ad esempio, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$, poniamo $z_1 = h(x_1)$ e $z_2 = h(x_2)$. Se $a(z_1) > a(z_2)$ allora le due rette

$$x - a(z_1)t = x_1, \quad \text{e} \quad x - a(z_2)t = x_2,$$

si incontrano in un punto (x_0, t_0) con

$$0 < t_0 = \frac{x_2 - x_1}{a(z_1) - a(z_2)};$$

e nel punto (x_0, t_0) si ha un'incompatibilità in quanto la soluzione in quel punto dovrebbe essere uguale contemporaneamente a z_1 ed a z_2.

Esempio 5.3.2. Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} uu_x + u_t = 0, \\ u(x, 0) = -x. \end{cases} \tag{5.18'}$$

L'equazione (5.19) assume la forma:

$$z = -(x - zt), \tag{5.19'}$$

per cui la soluzione $z = u(x, y)$ esiste ed è univocamente determinata da (5.19') se

$$1 - t \neq 0.$$

In tale caso si ha

$$u(x, t) = z = -\frac{x}{1 - t}.$$

Chiaramente, per $t = 1$ la soluzione perde di validità ed è presente uno shock. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $z_0 = h(x_0) = -x_0$. L'equazione della retta (5.23) diventa

$$x + x_0 t = x_0, \tag{5.23'}$$

che passa per il punto $(0, 1)$ qualunque sia x_0.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

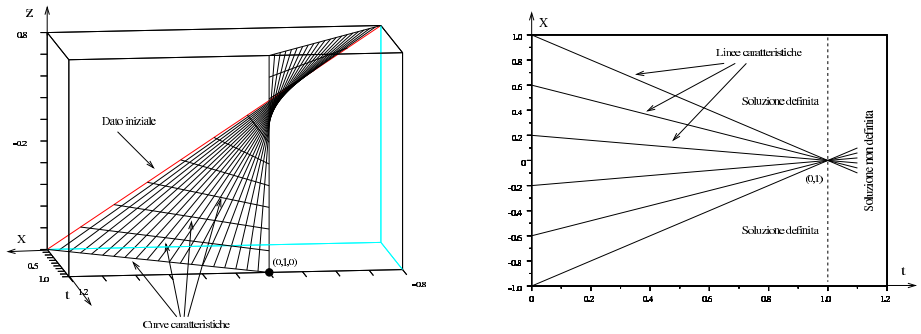


Figura 5.2: Curve e linee caratteristiche per l'esempio 5.3.2

Esempio 5.3.3. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (u+1)u_x + u_t = 0, \\ u(x,0) = x - 1. \end{cases}$$

Scriviamo le linee caratteristiche. Fissato un qualunque x_0, la (5.23) diventa $x - x_0 t = x_0$. Per vedere se ci sono shocks per $t > 0$ facciamo l'intersezione tra due generiche linee caratteristiche corrispondenti a $x_0 \neq x_1$. Il sistema

$$\begin{cases} x - x_0 t = x_0, \\ x - x_1 t = x_1, \end{cases}$$

ha come unica soluzione $t = -1,\ x = 0$, pertanto non ci sono shocks per $t > 0$.

Esercizio 5.3.4. Determinare la soluzione di

$$\begin{cases} uu_x + u_t = 0, \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

Ci sono shocks per $t > 0$?

Supponiamo che il problema di Cauchy (5.18) ammetta uno shock. Allora esiste una curva χ (possibilmente degenere) nel semipiano $t > 0$ in ogni punto della quale si intersecano più linee caratteristiche. Tale curva, in un certo senso, "limita" la possibilità di estendere nel futuro le soluzioni classiche di (5.18).

Proponiamoci di determinare χ. Chiaramente ogni punto di χ appartiene a qualche linea caratteristica, pertanto le sue coordinate (x,t) devono soddisfare la (5.23) per qualche x_0. Chiaramente x_0 va considerato un parametro. Poniamo $F(s) = a\big(h(s)\big)$ e $\Xi(x,t,s) = x - tF(s) - s$. Allora (5.23), con $x_0 = s$, si può scrivere nella forma

$$\Xi(x,t,s) = x - tF(s) - s = 0. \tag{5.26a}$$

Inoltre, nell'intorno di un punto generico (x,t) di χ non deve essere possibile risolvere in modo univoco l'equazione (5.26a) rispetto a (x,t). Quindi deve essere

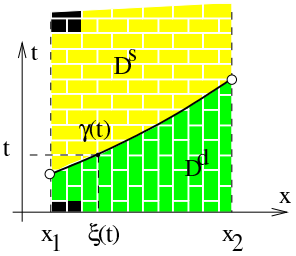
Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Soluzioni d'urto

Consideriamo l'equazione

$$u_t(x,t) + f'\big(u(x,t)\big)u_x(x,t) = 0 \tag{5.24}$$

nel dominio $D = [x_1, x_2]\times[0,+\infty)$. Supponiamo che u sia una funzione di classe C^1 in D tranne che su una curva regolare $\gamma : t \mapsto (\xi(t), t)$ con $t > 0$ e $x_1 < \xi(t) < x_2$, sulla quale la u ha una discontinuità di salto[a] con salto continuo lungo γ. Supponiamo che u risolva la (5.24) in D privato della curva γ. La (5.17) diventa:



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{x_1}^{\xi(t)} u(x,t)\,\mathrm{d}x + \int_{\xi(t)}^{x_2} u(x,t)\,\mathrm{d}x\right] = f\big(u(x_1,t)\big) - f\big(u(x_2,t)\big).$$

Derivando sotto il segno di integrale,

$$\int_{x_1}^{\xi(t)} u_t(x,t)\,\mathrm{d}x + \int_{\xi(t)}^{x_2} u_t(x,t)\,\mathrm{d}x - [u]\big(\xi(t),t\big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(t) = f\big(u(x_1,t)\big) - f\big(u(x_2,t)\big).$$

Dalla (5.24), per $x_1 \to \xi(t)^+$ e $x_2 \to \xi(t)^-$, si ottiene la *condizione di Rankine-Hugoniot*

$$-\dot\xi(t)\;[u]\big(\gamma(t)\big) = f\Big(u^-\big(\gamma(t)\big)\Big) - f\Big(u^+\big(\gamma(t)\big)\Big). \tag{5.25}$$

Le soluzioni u come sopra che lungo γ soddisfano (5.25) sono dette *soluzioni d'urto*.

[a] La curva γ divide D in due parti: destra D^{d} e sinistra D^{s}. Supponiamo che per ogni punto $p = \gamma(t)$ e per ogni successione $(x^i,t^i) \in D^{\mathrm{d}}$ e $(x_j,t_j) \in D^{\mathrm{s}}$ convergenti a p, $u^+(p) = \lim_{j\to\infty} u(x^j,t^j)$, $u^-(p) = \lim_{i\to\infty} u(x_i,t_i)$, ed il *salto* $[u](p) = u^+(p) - u^-(p)$ siano definiti indipendentemente dalla scelta delle successioni

$\frac{\partial\Xi}{\partial z}(x,t,s) = 0$, con Ξ dato dalla (5.20); altrimenti, per il Teorema della Funzione Implicita esisterebbe un'unica soluzione locale. Si ha

$$1 + tF'(s) = 0. \tag{5.26b}$$

Tenendo conto della (5.21), della definizione di F e del fatto che $z = h(s)$ in (x,t), si osserva che la (5.26b) è equivalente a $\frac{\partial\Psi}{\partial s}(x,t,s) = 0$. Infatti l'equazione (5.19) non deve essere risolubile (rispetto a (x,t)) nei punti di χ.

La curva χ è l'*inviluppo delle linee caratteristiche*. Risolvendo le (5.26) rispetto a s si ottiene una rappresentazione parametrica della curva χ. Cioè:

$$s \mapsto \big(x(s),t(s)\big) = \left(s - \frac{F(s)}{F'(s)}\,,\; -\frac{1}{F'(s)}\right) \tag{5.27}$$

valida per ogni s tale che $F'(s) \neq 0$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Poniamoci il problema se vi sia un tempo T tale che la soluzione del problema (5.18) sia definita almeno in tutta la striscia $\mathbb{R} \times [0, T)$. Per rispondere a questa domanda si deve osservare che se esistono (x, t) dove la soluzione perde regolarità allora le considerazioni precedenti mostrano che deve essere $\frac{\partial \Xi}{\partial s}(x, t, s) = 0$; cioè $t = -1/F'(s)$. Allora, definendo

$$t_c = \begin{cases} +\infty & \text{se } F'(s) \geq 0 \text{ per ogni } s \\ \dfrac{1}{\max\limits_{\{s:F'(s)<0\}} |F'(s)|} & \text{se } \{s : F'(s) < 0\} \neq \emptyset. \end{cases}$$

si ha che la soluzione è sicuramente definita nella striscia $\mathbb{R} \times [0, t_c)$. Il tempo t_c è detto *tempo critico* o anche *istante di rottura dell'onda*.

Osservazione 5.3.5. Considerazioni del tutto simili si potrebbero fare se considerassimo i dati iniziali assegnati su un intervallo I anziché su tutto l'asse x.

Esempio 5.3.6. La curva χ relativa al problema di Cauchy (5.18') è degenere: si riduce al solo punto $(0, 1)$. Il tempo critico è 1.

Esempio 5.3.7. La curva χ relativa al seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} uu_x + u_t = 0, \\ u(x, 0) = x^2, \end{cases}$$

è rappresentata parametricamente dalla curva

$$(x(\tau), t(\tau)) = \left(-\frac{1}{\tau}\, ,\, \frac{\tau}{2} \right).$$

Il tempo critico è 0, quindi non esiste nessuna striscia della forma $\mathbb{R} \times \delta$, $\delta > 0$, in cui l'equazione sia risolubile. Osserviamo che questo non è in contrasto con il teorema di esistenza ed unicità.

5.3.1 Flusso di automobili su un'autostrada

Dobbiamo fare delle ipotesi semplificatorie. Innanzi tutto, consideriamo le auto come prive di dimensioni e trattiamo il flusso del traffico come quello di un fluido lungo un tubo sottile.

Sia $\rho(x, t)$ la densità di traffico all'istante t nel punto di ascissa x (cioè il numero di auto per unità di lunghezza); e sia $q(x, t)$ il flusso all'istante t nel punto di ascissa x (cioè il numero di auto per unità di tempo che all'istante t attraversano il punto x). Assumiamo che nel tratto autostradale in esame non vi siano entrate o uscite.

Fissato un segmento di estremi x_1 e x_2 con $x_1 < x_2$ il numero di automobili in esso contenuto è:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t)\, \mathrm{d}x.$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

La variazione di questo numero, è uguale al numero di auto che entrano questo segmento meno quello di auto che lo lasciano; cioè

$$-\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}x = q(x_1,t) - q(x_2,t) = \\ = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\ \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)\ \mathrm{d}x.$$

Pertanto,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial q}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}x = 0.$$

L'arbitrarietà del segmento $[x_1, x_2]$ implica che

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial q}{\partial x}(x,t) = 0. \tag{5.28}$$

Introduciamo ora l'ipotesi, perfettamente ragionevole, che il flusso dipenda in qualche modo dalla densità di traffico; cioè che $q(x,t) = G\big(\rho(x,t)\big)$ per qualche funzione G. Quest'ipotesi corrisponde al fatto che la densità dei veicoli che circondano un dato automezzo ne condiziona la velocità. L'equazione (5.28) diventa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + G'\big(\rho(x,y)\big)\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,t) = 0. \tag{5.29}$$

Quindi il nostro modello per il flusso di traffico lungo un'autostrada si riduce ad una legge di conservazione.

La funzione G dipenderà dalle caratteristiche della strada. Una legge empirica è la seguente:

$$G(r) = cr\left(1 - \frac{r}{\rho_1}\right),$$

dove c è la velocità libera (cioè quella di un'auto che viaggia sola e indisturbata) e corrisponde nei casi normali al limite di velocità, e ρ_1 è la densità massima di auto (cioè quando le auto sono una a toccare l'altra). Con questa scelta di G e ponendo $u = \rho/\rho_1$ (densità normalizzata), l'equazione (5.29) diventa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(1-2u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{5.30}$$

Sia $h(x)$ la densità iniziale sul tratto autostradale interessato. Lo studio dell'evoluzione del traffico è ricondotto al problema di Cauchy per l'equazione (5.30) con condizione iniziale $u(x,0) = h(x)$. Si può dimostrare che se h è decrescente non si verificano shocks. Tuttavia, se h è crescente in qualche tratto, allora prima o poi si verificherà uno shock (la derivata della densità diventerà infinita). La situazione è rappresentata nelle figure 5.3, 5.4 e 5.5.

Esercizio 5.3.8. Discutere il significato 'fisico' della figura 5.3.

Esercizio 5.3.9. Discutere il significato 'fisico' della figura 5.4, confrontandola con le figure 5.3 e 5.5.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

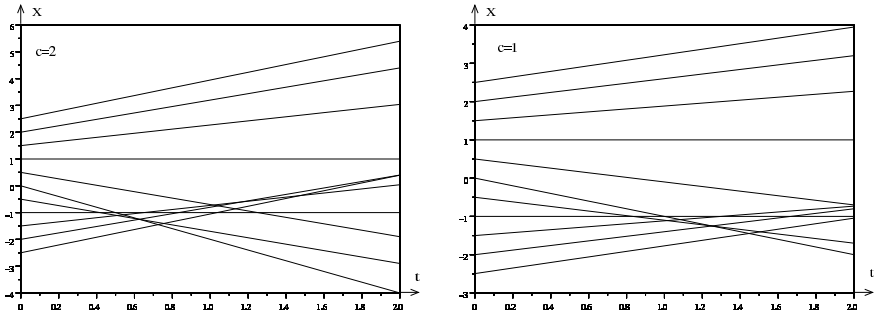


Figura 5.3: Linee caratteristiche per la (5.30) con $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$ e diverse 'velocità massime': $c = 1$ e $c = 2$.

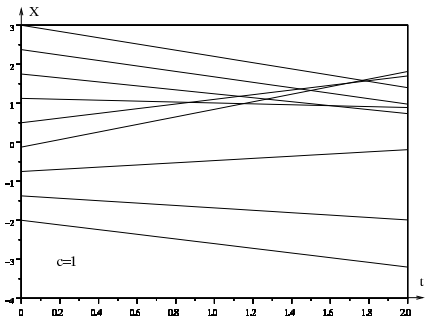


Figura 5.4: Linee caratteristiche per la (5.30) con $h(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1}$.

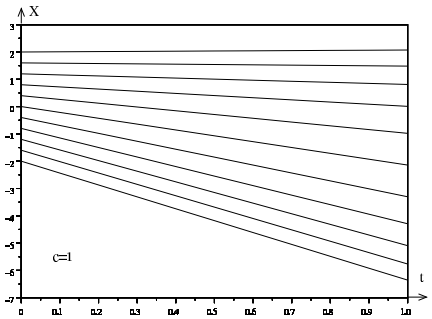


Figura 5.5: Linee caratteristiche per la (5.30) con $h(x) = \pi/2 - \arctan(x)$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

5.4 Sistemi di equazioni lineari

Consideriamo sistemi di equazioni differenziali delle funzioni incognite $u^1, \dots, u^n$ nelle variabili x e y, della forma:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \{a_{i1}(x,y)u^i_x + b_{i1}(x,y)u^i_y\} = f_1(x,y,u^1,\dots,u^n), \\ \quad \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \{a_{in}(x,y)u^i_x + b_{in}(x,y)u^i_y\} = f_n(x,y,u^1,\dots,u^n), \end{cases} \tag{5.31}$$

dove le funzioni a valori reali a_{ij} e b_{ij} sono C^1 in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e le f_j sono C^1 in un aperto $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{2+n}$ con la proprietà che

$$\Omega \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{n \text{ volte}} = \big\{(x,y,\underbrace{0,\dots,0}_{n \text{ volte}}) : (x,y) \in \Omega\big\} \subset \widetilde{\Omega}.$$

Un esempio di sistema di equazioni differenziali sono le condizioni di Cauchy-Riemann (2.2) che abbiamo incontrato a pagina 11.

5.4.1 Problema di Cauchy e caratteristiche

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Assegnamo una curva $\gamma : I \to \Omega$ regolare[9] data da $t \mapsto \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$ e consideriamo n funzioni di classe C^1, $v_i : I \to \mathbb{R}$, con $i = 1, \dots, n$, tali che

$$\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t), v_1(t), \dots, v_n(t)\big) \in \widetilde{\Omega} \qquad \forall t \in I.$$

Il problema di Cauchy per il sistema (5.31) consiste nella ricerca di funzioni $u^1, \dots, u^n$, definite in un intorno U (eventualmente più piccolo di Ω) del sostegno di γ, soddisfacenti la (5.31) tali che per ogni $i = 1, \dots, n$

$$u^i\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big) = v_i(t), \qquad \forall t \in I. \tag{5.32}$$

In pratica, questo consiste nel cercare le funzioni $u^1, \dots, u^n$ in modo tale che esse assumano nei punti del sostegno di γ i valori specificati dalle v_i. Se tali funzioni esistono, la ennupla $u^1, \dots, u^n$ è detta *soluzione del Problema di Cauchy* (5.31)-(5.32).

Sorge spontaneamente la domanda se esista o meno una soluzione (locale) del problema di Cauchy (5.31)-(5.32). Per rispondere alla domanda, cominciamo col vedere se, ammesso che una soluzione locale esista, sia possibile ricavare dal sistema (5.31) le derivate u^i_x e u^i_y, $i = 1, \dots, n$, nei punti del sostegno di γ.

Derivando la (5.32) rispetto a t, si ottiene per $i = 1, \dots, n$

$$u^i_x\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)\gamma_1'(t) + u^i_y\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)\gamma_2'(t) = v_i'(t).$$

[9] Cioè derivabile in ogni punto interno di I e tale che $\gamma'(t) \neq (0,0)$ per ogni $t \in I$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

(Queste sono n equazioni.) Dal momento che la curva γ è regolare, almeno uno dei $\gamma_1'(t)$ o $\gamma_2'(t)$ è non nullo. Supponiamo per fissare le idee che sia $\gamma_1'(t) \neq 0$. Ricavando $u_x^i\big(\gamma_1(t),\gamma_2(t)\big)$, $i = 1,\dots,n$, e sostituendo le espressioni trovate nel sistema (5.31), si ottiene per t fissato

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(b_{i1}\gamma_1' - a_{i1}\gamma_2')u_y^i + a_{i1}v_i'}{\gamma_1'} = f_1\big(t, g(t), v_1(t),\dots,v_n(t)\big), \\ \qquad\vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(b_{in}\gamma_1' - a_{in}\gamma_2')u_y^i + a_{in}v_i'}{\gamma_1'} = f_n\big(t, g(t), v_1(t),\dots,v_n(t)\big), \end{cases} \tag{5.33}$$

dove, per brevità si è rimossa l'indicazione esplicita della dipendenza di g' da t e degli $a_{i,j}$, b_{ij} e u_y^i da $\big(\gamma_1(t),\gamma_2(t)\big)$.

Per t fissato il sistema (5.33) è un sistema lineare nelle incognite $u_y^1,\dots,u_y^n$ che, come è noto, può essere risolto in modo unico se e soltanto se la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} (b_{11}\gamma_1' - a_{11}\gamma_2') & \cdots & (b_{1n}\gamma_1' - a_{1n}\gamma_2') \\ \vdots & & \vdots \\ (b_{n1}\gamma_1' - a_{n1}\gamma_2') & \cdots & (b_{nn}\gamma_1' - a_{nn}\gamma_2') \end{pmatrix},$$

ha determinante non nullo. Osserviamo che se avessimo supposto $\gamma_2'(t) \neq 0$ saremmo giunti alle stesse conclusioni.

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, chiamiamo *linee caratteristiche* quelle curve $t \mapsto \big(\xi(t),\eta(t)\big)$ per cui $\det A(t) = 0$ per ogni t. Osserviamo che le linee caratteristiche non dipendono da $f_1,\dots,f_n$.

Si può provare il seguente teorema:

Teorema 5.4.1. *Se la curva γ non è in alcun punto tangente ad una linea caratteristica, allora il problema* (5.31)-(5.32) *ammette un'unica soluzione definita in un intorno sufficientemente piccolo del sostegno di γ.*

Ricordiamo che, in generale, due vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$, ω e $\bar\omega$ determinano la stessa direzione se esiste $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $\omega = \rho\bar\omega$.[10]

Diremo che un vettore $\nu = (\nu_1,\nu_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ determina una *direzione caratteristica* nel punto (x_0,y_0) se

$$\det\Big(b_{ij}(x_0,y_0)\nu_1 - a_{ij}(x_0,y_0)\nu_2\Big)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} = 0. \tag{5.34}$$

[10] In matematica, si dice che la relazione '$\omega \simeq \bar\omega$ se e solo se entrambi determinano la stessa direzione' è una *relazione di equivalenza* e che l'insieme

$$[\omega] \underset{\text{def.}}{=} \{\bar\omega : \bar\omega \simeq \omega\}$$

è una *classe di equivalenza* (rispetto a '$\simeq$'). La direzione di ω è precisamente $[\omega]$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Sviluppando il determinante, la (5.34) diventa

$$\begin{aligned}\alpha_n(x_0,y_0)\nu_1^n+\alpha_{n-1}(x_0,y_0)\nu_1^{n-1}\nu_2+\\ +\ldots+\alpha_1(x_0,y_0)\nu_1\nu_2^{n-1}+\alpha_0(x_0,y_0)\nu_2^n=0,\end{aligned} \tag{5.35}$$

per opportuni coefficienti $\alpha_0,\ldots,\alpha_n$, con α_0 e α_1 non entrambi nulli.

Vediamo come si possono calcolare le linee caratteristiche. Cerchiamo le linee caratteristiche della forma $y=y(x)$ con y di classe C^1. Consideriamo quindi la curva $\gamma(t)=\big(t,y(t)\big)$ e imponiamo che per ogni t il vettore $\gamma'(t)=\big(1,y'(t)\big)$ determini una direzione caratteristica. L'equazione (5.37), con $\nu_1=1$ e $\nu_2=y'$ diventa l'equazione differenziale ordinaria del primo ordine (**non** in forma normale):

$$\det\Big(b_{ij}(x,y)-a_{ij}(x,y)y'\Big)_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}}=0. \tag{5.36}$$

Osservazione 5.4.2. Sviluppando il determinante, l'equazione (5.36) può essere scritta nella forma

$$\alpha_p(x,y)\big(y'(x)\big)^p+\ldots+\alpha_1(x,y)y'(x)+\alpha_0(x,y)=0,$$

per qualche $p\le n$ (infatti alcuni dei primi coefficienti della (5.35) potrebbero essere nulli). Fissato un punto (x_0,y_0), le soluzioni reali dell'equazione

$$\alpha_p(x_0,y_0)z^p+\ldots+\alpha_1(x_0,y_0)z+\alpha_0(x_0,y_0)=0, \tag{5.37}$$

sono i coefficienti angolari delle tangenti a quelle linee caratteristiche passanti per (x_0,y_0) che sono della forma $y=g(x)$. Quindi, se $\bar z$ è una soluzione di (5.37), $(1,\bar z)$ è una direzione caratteristica in (x_0,y_0).[11]

Esempio 5.4.3. Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} u^1_x+u^1_y+u^3_y=e^x,\\ u^2_y=u^1-u^3,\\ u^3_x=u^2-x.\end{cases}$$

Per determinare le direzioni caratteristiche in (x_0,y_0) si considera l'equazione (si tiene conto della tabella 5.1)

$$\det\begin{pmatrix}\nu_1-\nu_2 & 0 & \nu_2\\ 0 & \nu_1 & 0\\ 0 & 0 & \nu_2\end{pmatrix}=0,$$

da cui segue che le direzioni caratteristiche sono determinate dai vettori $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

[11] Questo metodo permette di trovare tutte le direzioni caratteristiche del tipo $[\nu_1,\nu_2]$ con $\nu_1\neq 0$ (dividendo per ν_1 si resta nella stessa classe di equivalenza). La direzione $[0,\nu_2]$ deve essere considerata a parte.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Cerchiamo le linee caratteristiche della forma $y = y(x)$. L'equazione (5.36) assume la forma (si vedere la tabella 5.1)

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1-y' & 0 & y' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y' \end{pmatrix} = y'(1-y'),$$

da cui è facile ricavare le linee caratteristiche. Infatti, per trovare le linee caratteristiche che passano per il punto (x_0, y_0) si deve risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x)\big(1-y'(x)\big) = 0, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

Si ottiene che le linee caratteristiche cercate sono le rette $y = y_0$ e $y = x + y_0$.

1^a equazione	$a_{11} = 1$ $a_{12} = 0$ $a_{13} = 0$	$b_{11} = 1$ $b_{12} = 0$ $b_{13} = 0$	$f_1 = e^x$
2^a equazione	$a_{21} = 0$ $a_{22} = 0$ $a_{23} = 0$	$b_{21} = 0$ $b_{22} = 1$ $b_{23} = 0$	$f_2 = u^1 - u^3$
3^a equazione	$a_{31} = 0$ $a_{32} = 0$ $a_{33} = -1$	$b_{31} = 0$ $b_{32} = 0$ $b_{33} = 0$	$f_3 = u^2 - x$

Tabella 5.1: Valori di a_{ij}, b_{ij} e f_j nell'esempio 5.4.3.

Esempio 5.4.4. Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} u^1_x + x u^1_y + u^3_y = e^x, \\ u^2_y = u^1 - u^3, \\ u^3_x = u^2 - x. \end{cases} \tag{5.38}$$

Rispetto ai dati riportati nella tabella 5.1 relativamente all'esempio 5.4.3, cambia solamente il valore di b_{11}. Per trovare le direzioni caratteristiche si deve considerare l'equazione

$$\det \begin{pmatrix} x\nu_1 - \nu_2 & 0 & \nu_2 \\ 0 & \nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Si ottiene che le direzioni caratteristiche sono determinate dai vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Determiniamo le curve caratteristiche della forma $y = y(x)$ passanti per x_0, y_0. Poiché

$$\det \begin{pmatrix} 1-y' & 0 & y' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y' \end{pmatrix} = y'(1-y'),$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

per farlo risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x)\big(1-y'(x)\big)=0, \\ y(x_0)=y_0. \end{cases}$$

Quindi le curve del piano xy date da $x \mapsto \big(x, y(x)\big)$ con

$y(x)=y_0,$	$y(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2y_0-x_0^2}{2},$
$y(x)=\begin{cases} y_0 & \text{per } x \le x_0 \\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2y_0-x_0^2}{2} & \text{altrimenti} \end{cases}$	$y(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2y_0-x_0^2}{2} & \text{per } x \le x_0 \\ y_0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

sono tutte curve caratteristiche passanti per (x_0, y_0).

Esercizio 5.4.5. Determinare le linee caratteristiche del seguente sistema passanti per il punto $(0,0)$

$$\begin{cases} xu_x^1+u_y^1+u_y^3=e^x, \\ u_x^2=u^1-u^3, \\ u_x^3=u^2-x. \end{cases}$$

Riferimenti ed approfondimenti

Paragrafi 5.1 e 5.2 [8], [11], [12], [21, cap. 3].

Paragrafo 5.3: [21, cap. 3 §5].

Paragrafo 5.4: [12, cap. 2], [21, cap. 10].

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003