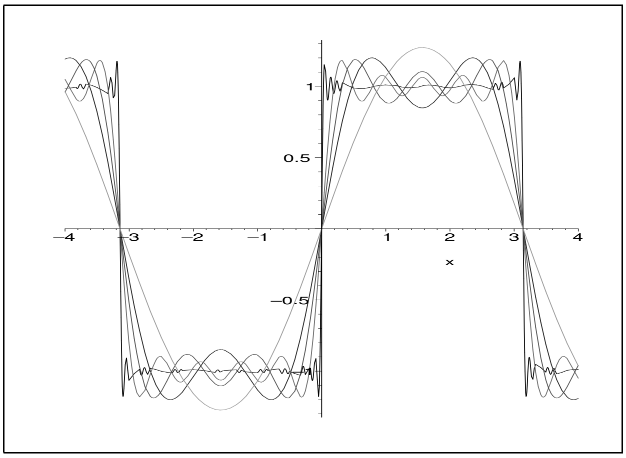
Università degli Studi di Firenze

Versione 0.5

Francesco Mugelli

Metodi Matematici per l'Ingegneria dell'Informazione



Firenze - 4 giugno 2003

Capitolo 3

Serie di Fourier

Le serie di Fourier sono introdotte a partire da problemi di approssimazione nel senso dei minimi quadrati. Tra i vari approcci non è certo il più agevole; ha però il vantaggio che, una volta superato lo "*choc*" iniziale, lo sviluppo della teoria e la comprensione del significato delle applicazioni pratiche dovrebbe risultare naturale e piuttosto agevole.

Nella prima parte del capitolo sono introdotte alcune nozioni generali sugli spazi di Hilbert con particolare riguardo per lo spazio $L^2([-\pi, \pi])$, ambiente naturale per lo studio delle serie di Fourier.

Successivamente si passa alle serie di Fourier utilizzando sia la notazione trigonometrica che quella esponenziale dimostrando alcuni teoremi di convergenza e le principali proprietà.

Il capitolo termina con l'applicazione delle serie di Fourier allo studio delle equazioni alle derivate parziali.

3.1 Spazi di Hilbert

Definizione 3.1 *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (o su $\mathbb{C}$). Una* **norma** *su V è una applicazione $N : V \to \mathbb{R}$ tale che*

i) $N(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in V$; $N(x) = 0$ *se e solo se* $x = 0$.

ii) $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$ *per ogni* $x \in V$, *per ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(o* $\alpha \in \mathbb{C}$*).*

iii) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ *per ogni* $x, y \in V$ *(disuguaglianza triangolare).*

Esempio 3.1

- Il valore assoluto è una norma per $\mathbb{R}$;
- Il modulo di un numero complesso è una norma per $\mathbb{C}$;
- Una possibile norma per $V = \mathbb{R}^n$ è la *norma euclidea*: se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $N_2(x) = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2}$;
- In generale, uno spazio vettoriale ammette più di una norma. Anche

$$N_1(x) = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \quad e \quad N_\infty(x) = \max\{\, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n| \,\}$$

  sono norme per $V = \mathbb{R}^n$. A volte N_1 ed N_∞ si trovano indicate come $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ rispettivamente. Verificare per esercizio che N_1 ed N_∞ soddisfano effettivamente la definizione (3.1).

Quando non ci sono ambiguità sulla norma di cui si sta parlando, indicheremo la norma semplicemente con $\|\cdot\|$.

Esercizio 3.1 Per ciascuna delle norme definite nell'esempio 3.1 verificare le proprietà *i)*, *ii)*, *iii)* della definizione 3.1.

Definizione 3.2 *Uno spazio vettoriale V sui reali si dice* **unitario** *se su di esso è definito un prodotto scalare, ovvero una applicazione che ad una coppia di elementi $x, y \in V$ fa corrispondere un numero reale che indicheremo con $\langle x, y\rangle$ e che si dice* **prodotto scalare** *di x ed y, in modo che valgano le proprietà seguenti:*

i) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \quad \forall x, y, z \in V$;

ii) $\langle \alpha x, y\rangle = \langle x, \alpha y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

iii) $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in V$; $\quad \langle x, x\rangle = 0$ *se e solo se* $x = 0$;

iv) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \forall x, y \in V$.

Definizione 3.3 *Uno spazio vettoriale V sui complessi si dice* **unitario** *se su di esso è definito un prodotto hermitiano, ovvero una applicazione che ad una coppia di elementi $x, y \in V$ fa corrispondere un numero complesso che indicheremo con $\langle x, y\rangle$ e che si dice* **prodotto hermitiano** *di x ed y, in modo che valgano le proprietà seguenti:*

i) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \quad \forall x, y, z \in V$;

ii) $\langle \alpha x, y\rangle = \langle x, \overline{\alpha} y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$;

iii) $\langle x, x\rangle$ *è reale e non negativo* $\quad \forall x \in V$; $\quad \langle x, x\rangle = 0$ *se e solo se* $x = 0$;

iv) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \quad \forall x, y \in V$.

A partire da un prodotto scalare (o da un prodotto hermitiano) è sempre possibile definire una norma ponendo

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}. \tag{3.1}$$

La verifica delle condizioni *i)* e *ii)* della definizione 3.1 è pressoché immediata. Per dimostrare la *iii)* è necessario un risultato preliminare:

Proposizione 3.1 (disuguaglianza di Schwarz) *Sia V uno spazio unitario (reale o complesso). Per ogni $x, y \in V$ si ha*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \tag{3.2}$$

Dimostrazione. Se $x = 0$ o se $y = 0$ entrambi i membri della (3.2) sono nulli e quindi non c'è niente da dimostrare. Sia $s + it \in \mathbb{C}$ e supponiamo $x, y \neq 0$ si ha:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - \lambda y\|^2 &= \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \\ &= \|x\|^2 - (s+it)\langle x, y\rangle - (s-it)\overline{\langle x, y\rangle} + (s^2+t^2)\|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 - 2s\,\mathrm{Re}\,(\langle x, y\rangle) - 2t\,\mathrm{Im}\,(\langle x, y\rangle) + (s^2+t^2)\|y\|^2 \end{aligned}$$

La funzione $E(s,t) = \|x-(s+it)y\|^2$ è sempre non negativa. In particolare sarà non negtivo il valore del suo minimo. Il minimo è raggiunto quando s, t sono tali che

$$\frac{\partial E}{\partial s} = -2\,\mathrm{Re}\,(\langle x,\, y\rangle) + 2s\,\|y\|^2 = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial t} = -2\,\mathrm{Im}\,(\langle x,\, y\rangle) + 2t\,\|y\|^2 = 0$$

da cui si ricava $s + it = \dfrac{\mathrm{Re}\,(\langle x,\, y\rangle)}{\|y\|^2} + i\dfrac{\mathrm{Im}\,(\langle x,\, y\rangle)}{\|y\|^2} = \dfrac{\langle x,\, y\rangle}{\|y\|^2}$.
Quindi è vero che

$$0 \le \left\| x - \frac{\langle x,\, y\rangle}{\|y\|^2} y \right\|^2 = \|x\|^2 - 2\frac{\langle x,\, y\rangle\,\overline{\langle x,\, y\rangle}}{\|y\|^2} + \frac{\|y\|^2}{\|y\|^4}\langle x,\, y\rangle\,\overline{\langle x,\, y\rangle}$$

ovvero $0 < \|x\|^2\,\|y\|^2 - |\,\langle x,\, y\rangle\,|^2$ da cui segue la tesi. □

Osservazione 3.1 Se ci limitiamo a considerare spazi vettoriali reali esiste una dimostrazione alternativa, e forse più semplice, della disuguaglianza di Schwarz: sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e supponiamo $x, y \neq 0$ si ha:

$$0 \le \|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y,\, x - \lambda y\rangle = \|x\|^2 - 2\lambda\,\langle x,\, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$$

La disuguaglianza appena scritta vale per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$; il trinomio $\|x\|^2 - 2\lambda\,\langle x,\, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$ non può cambiare segno al variare di λ, quindi

$$4\,\langle x,\, y\rangle^2 - 4\,\|x\|^2\,\|y\|^2 \ge 0 \quad \text{cioè} \quad \langle x,\, y\rangle^2 \le \|x\|^2\,\|y\|^2\,.$$

Proposizione 3.2 (disuguaglianza triangolare) *Sia V uno spazio unitario (reale o complesso). Per ogni $x, y \in V$ vale la disuguaglianza*

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \tag{3.3}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y,\, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,\, y\rangle + \overline{\langle x,\, y\rangle} + \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x,\, y\rangle + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\|x\|\;\|y\|) + \|y\|^2 = \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

dove si sono utilizzate le proprietà del prodotto hermitiano (o scalare se lo spazio V è sui reali), la proposizione 3.1 e il fatto che $\|x\|\;\|y\| \in \mathbb{R}$. □

Definizione 3.4 *Una succesione $\{x_n\}$ a valori in uno spazio vettoriale normato V si dice* **di Cauchy** *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice n tale che $\|x_m - x_k\| < \varepsilon$ per ogni $m, k > n$.*

Esempio 3.2 Tutte le successioni a valori reali, convergenti sono successioni di Cauchy.
Sia $\{x_n\}$ a valori reali e tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$. Dalla definizione di limite, per ogni $\varepsilon_1 > 0$ esiste n tale che $|x_k - \ell| < \varepsilon_1$ per ogni $k > n$. Se $m, k > n$, per la disuguaglianza triangolare, $|x_m - x_k| \le |x_m - \ell| + |\ell - x_k| < 2\varepsilon_1$. Se scegliamo $\varepsilon = 2\varepsilon_1$ abbiamo dimostrato che $\{x_n\}$ è di Cauchy.

Definizione 3.5 *Uno spazio vettoriale V dotato di norma si dice* **completo** *se ogni successione di Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente in V.*

Definizione 3.6 *Uno spazio vettoriale V si dice* **di Hilbert** *se è completo ed unitario.*

Esempio 3.3

i) $\mathbb{R}^n$ è uno spazio di Hilbert se munito del prodotto scalare usuale (prodotto componente per componente).

ii) $\mathbb{C}^n$ è uno spazio di Hilbert se munito del prodotto hermitiano $\langle x, y\rangle = x\cdot\overline{y}$ dove con "$\cdot$" si è indicato ancora il prodotto componente per componente.

iii) le funzioni continue a valori reali definite in $[0,1]$ formano uno spazio unitario rispetto al prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt, \qquad f,g\in C([0,1]). \tag{3.4}$$

Non è però uno spazio di Hilbert dato che non è completo. Consideriamo la successione $f_n(t)=t^n$. Siano $m,k>n$,

$$\begin{aligned}\|f_k-f_m\|^2 = \langle f_k-f_m, f_k-f_m\rangle &= \int_0^1 (t^m-t^k)^2\,dt = \\ &= \frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2k+1}-\frac{2}{m+k+1} < \frac{2}{2n+1}.\end{aligned}$$

La successione $\{f_n\}$ è di Cauchy in $C([0,1])$ ($\varepsilon=\sqrt{2/(2n+1)}$) ma

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases}0 \text{ se } x\neq 1\\ 1 \text{ se } x=1\end{cases}$$

non è continua, cioè $f\notin C([0,1])$. La successione f_n non converge in $C([0,1])$. Di conseguenza $C([0,1])$ non è uno spazio di Hilbert.

Esercizio 3.2 Verificare che $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$ è un prodotto hermitiano nello spazio delle funzioni continue $f:[0,1]\to\mathbb{C}$.

Teorema 3.1 (teorema delle proiezioni ortogonali) *Sia V uno spazio di Hilbert e sia V_0 un sottospazio chiuso di V e sia $u\in V$. Esiste uno ed un solo $w\in V_0$ tale che*

$$\|w-u\|\le\|v-u\| \quad \forall v\in V_0.$$

Inoltre w è l'unico punto di V_0 tale che $\langle w, v\rangle=\langle u, v\rangle$ per ogni $v\in V_0$. Infine, $\|w\|\le\|v\|$.

3.2 Il metodo dei minimi quadrati in $\mathbb{R}^n$

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice reale di tipo $m \times n$ con $m > n$; siano poi $b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ composto da m equazioni in n incognite. Supponiamo che le colonne $a_1, a_2, \dots, a_n$ di A siano linearmente indipendenti.

Dal corso di Geometria sappiamo che se esiste una soluzione x del sistema $Ax = b$ allora
$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = b.$$
In altre parole, il vettore b deve appartenere allo spazio vettoriale $V_A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ generato dalle colonne di A. Se b è un qualunque vettore di $\mathbb{R}^m$ non è detto che appartenga al sottospazio V_A qunidi, in generale, il sistema $Ax = b$ non ammetterà soluzione. Abbiamo supposto gli a_i linearmente indipendenti quindi $a_1, a_2, \dots, a_n$ è una base per V_A. Se $b \in V_A$ lo si può scrivere in modo unico come combinazione lineare (di coefficienti $x_1, x_2, \dots, x_n$) degli elementi $a_1, a_2, \dots, a_n$ della base. Questo significa che, quando esiste, la soluzione del sistema è unica. Moltiplichiamo il sistema di partenza a sinistra per A^T: $A^T Ax = A^T b$. Il nuovo sistema è quadrato $n \times n$ e si verifica facilmente che la matrice $A^T A$ è invertibile. Se $b \in V_A$, la soluzione del sistema inizialeè allora $x = (A^T A)^{-1} A^T b$.

Se $b \notin V_A$ non esistono $x_1, x_2, \dots, x_n$ tali che $b_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, $i = 1, 2, \dots m$.

Tutto quello che possiamo fare è cercare un "surrogato" della soluzione.

Definizione 3.7 *Chiamiamo soluzione del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati un vettore $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ tale che $\|b - Ax\|$ sia minimo.*

Se $b \in \mathbb{R}^m$, esistono unici due vettori $p_1 \in V_A$ e $p_2 \in V_A^{\perp}$ tali che $b = p_1 + p_2$. Si ha
$$\|b - Ax\|^2 = \|p_2 + (p_1 - Ax)\|^2 = \|p_2\|^2 + \|p_1 - Ax\|^2$$
dato che $p_1 - Ax \in V_A$ e $p_2 \perp (p_1 - Ax)$. Si vede subito che il valore di x che rende minima $\|b - Ax\|^2$ è la soluzione di $p_1 = Ax$ (un tale x esiste dato che $p_1 \in V_A$).

Per quanto detto sopra,
$$x = (A^T A)^{-1} A^T p_1 = (A^T A)^{-1} A^T (b - p_2) = (A^T A)^{-1} A^T b - (A^T A)^{-1} A^T p_2.$$
Ma $p_2 \perp V_A$ significa che $< a_i^T, p_2 >= 0$ per $i = 1, \dots, n$ ovvero $A^T p_2 = 0$. Quindi $x = (A^T A)^{-1} A^T b$.

Cercare una soluzione di $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati equivale a cercare l'elemento di V_A più vicino (cioè che "dista meno" in norma) a b. Questa interpretazione della soluzione nel senso dei minimi quadrati apre la strada alla soluzione di problemi di migliore approssimazione. Una volta determinata la soluzione x del sistema lineare, il vettore Ax è l'elemento di V_A che meglio approssima b. L'errore commesso nell'approssimazione è la norma del residuo:
$$\text{Errore } = \|b - Ax\|.$$

Esercizio 3.3 Determinare la migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati del vettore $(3, 1, 0)$ mediante elementi dello spazio V generato da $(1, 1, 2)$ e da $(1, -1, 3)$. Calcolare poi l'errore commesso con l'approssimazione.

L'esercizio consiste nel risolvere nel senso dei minimi quadrati il sistema $Ax = b$ dove
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}, \qquad A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}, \qquad x = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{15} \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

La migliore approssimazione di b è il vettore

$$Ax = \frac{2}{15} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{2}{15} \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix},$$

l'errore commesso è

$$\left\| (3,1,0) - \left(\frac{2}{3}, \frac{22}{15}, \frac{14}{15} \right) \right\| = \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{49}{225} + \frac{196}{225}} = \frac{\sqrt{1470}}{15}.$$

A verifica della correttezza della soluzione trovata, il vettore residuo $b - Ax$ è ortogonale alle colonne di A; in altre parole $A^T(b - Ax) = 0$.

Le considerazioni che abbiamo appena fatto per $\mathbb{R}^n$ continuano a valere anche in spazi più generali. Nei paragrafi seguenti ci occuperemo di un esempio particolarmente interessante.

3.3 Lo spazio $L^2(\Omega)$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un parallelepipedo (un intervallo nel caso $n = 1$). Consideriamo l'insieme $\mathcal{L}^2$ delle funzioni a valori reali (o complessi), definite in Ω, tali che

$$\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx < +\infty.$$

Si verifica abbastanza facilmente che $\mathcal{L}^2$ è uno spazio vettoriale. Su $\mathcal{L}^2$ è anche possibile definire un prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(t) \, \overline{g(t)} \, dt. \tag{3.5}$$

A partire dal prodotto scalare vorremo definire la norma

$$\|f\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega f(t) \, \overline{f(t)} \, dt = \int_\Omega |f(t)|^2 \, dt \tag{3.6}$$

ma c'è un problema: non è un a norma! Sia $x_0 \in \Omega$ e sia $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_0 \\ 0 & \text{se } x \neq x_0 \end{cases}$.

$\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = 0$ ma f non è identicamente nulla e questo contraddice la *ii)* della definizione 3.1. Per aggirare l'ostacolo, diremo che due funzioni $f, g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ sono equivalenti se $\int_\Omega |f(t) - g(t)|^2 \, dt = 0$. Abbiamo così diviso gli elementi di $\mathcal{L}^2$ in classi di equivalenza.

Il prodotto scalare (3.5) e la (3.6) non cambiano scegliendo un rappresentante di una classe piuttosto che un'altro.

DEFINIZIONE 3.8 *Chiamiamo* $\boldsymbol{L^2(\Omega)}$ *l'insieme delle classi di equivalenza delle funzioni di* $\mathcal{L}^2$.

Una volta chiarita la differenza tra i due spazi, non faremo una distinzione vera e propria tra gli elementi di $\mathcal{L}^2$ e gli elementi di L^2, sottintendendo comunque di utilizzare sempre questi ultimi. La (3.5) è un prodotto scalare in $L^2(\Omega)$ e la (3.6) è (e questa volta veramente!) una norma per $L^2(\Omega)$.

Proprietà dello spazio $L^2(\Omega)$

i) $L^2(\Omega)$ è uno spazio vettoriale (e quindi uno spazio unitario) su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$ a seconda che si considerino funzioni a valori in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$ rispettivamente.

ii) **(disuguaglianza di Hölder)**

$$\left|\int_\Omega f(t)\,\overline{g(t)}\,dt\right| \le \left(\int_\Omega f(t)\,\overline{f(t)}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega g(t)\,\overline{g(t)}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\, f,g \in L^2(\Omega). \quad (3.7)$$

È la disuguaglianza di Schwarz scritta per gli elementi di $L^2(\Omega)$.

iii) **(disuguaglianza di Minkowski)**

$$\left\{\int_\Omega |f(t)+g(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}} \le \left\{\int_\Omega |f(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_\Omega |g(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (3.8)$$

Si tratta delle disuguaglianza triangolare per gli elementi di $L^2(\Omega)$.

iv) $L^2(\Omega)$ è completo. Dimostreremo questa affermazione più avanti, e soltanto in un caso particolare.

Dalla *i)* e dalla *iv)* segue che $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert.

3.3.1 Lo spazio $L^2([-\pi,\pi])$

$L^2([-\pi,\pi])$ è lo spazio vettoriale delle funzioni $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) tali che

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{f(t)}\,dt < \infty.$$

Esaminiamo il caso reale: un primo passo per lo studio di $L^2([-\pi,\pi])$ è cercarne una base. Gli elementi dello spazio sono funzioni quindi la base che stiamo cercando sarà una successione $\{f_n\}$ di funzioni di $L^2([-\pi,\pi])$.

Cerchiamo di determinare una base ortonormale per $L^2([-\pi,\pi])$ ovvero una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che:

$$\begin{aligned} \|f_n\|^2 &= \langle f_n,\, f_n\rangle &&= \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\,\overline{f_n(x)}\,dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ && \langle f_n,\, f_m\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\,\overline{f_m(x)}\,dx = 0 \quad \forall m,n \in \mathbb{N},\ m \ne n \end{aligned}$$

È possibile costruire un sistema ortonormale per $L^2([-\pi,\pi])$ a partire dalle funzioni trigonometriche:

Proposizione 3.3 *Siano m, n interi non negativi. Valgono le uguaglianze seguenti:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 0 \; se \;\; m \neq n \\ \pi \; se \;\; m = n \neq 0 \\ 2\pi \; se \;\; m = n = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \begin{cases} 0 \; se \;\; m \neq n \\ \pi \; se \;\; m = n \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx = 0 \tag{3.11}$$

Dimostrazione. Le tre formule si dimostrano utilizzando le formule di prostaferesi per calcolare gli integrali. □

La proposizione 3.3, letta in termini di prodotto scalare in $L^2([-\pi, \pi])$, significa che

$$\begin{aligned} \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle &= 0 \qquad \text{per } m \neq n, \\ \langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle &= 0 \qquad \text{per } m \neq n, \\ \langle \cos(mx), \sin(nx) \rangle &= 0 \qquad \text{per ogni } m, n \end{aligned}$$

ovvero che le funzioni $\sin(mx)$ per $m > 0$ e $\cos(mx)$ per $m \geq 0$ sono un sistema ortogonale di $L^2([-\pi, \pi])$. Sempre dalla proposizione 3.3,

$$\begin{aligned} \|\cos(mx)\|^2 &= \langle \cos(mx), \cos(mx) \rangle = \begin{cases} \pi \text{ se } m \neq 0 \\ 2\pi \text{ se } m = 0 \end{cases} \\ \|\sin(mx)\|^2 &= \langle \sin(mx), \sin(mx) \rangle = \pi. \end{aligned}$$

Se normalizziamo (dividiamo le funzioni per la loro norma in modo da renderle di norma 1), abbiamo costruito un sistema ortonormale per $L^2([-\pi, \pi])$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(x), \; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2x), \; \ldots, \; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx) \; \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(x), \; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2x), \; \ldots, \; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx) \; \ldots$$

Osservazione 3.2 I sistemi ortonormali sono utilissimi quando si devono calcolare norme o prodotti scalari. Ad esempio, se $f = a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n$, dove $f_1, \, f_2, \, \ldots, \, f_n \in L^2([-\pi, \pi])$, $a_1, \, a_2, \, \ldots, \, a_n \in \mathbb{C}$ e le f_i sono un sistema ortonormale, allora

$$\|f\|^2 = |a_1|^2\|f_1\| + |a_2|^2\|f_2\| + \ldots + |a_n|^2\|f_n\| = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2.$$

Conoscere un sistema ortonormale è di aiuto anche nei problemi di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.

Proposizione 3.4 *Sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$ a valori reali, sia V un sottospazio di $L^2([-\pi, \pi])$ e siano $f_1, \, f_2, \, \ldots, \, f_n$ una base ortonormale di V. La migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati di f con un elemento di V è la combinazione lineare $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots a_n f_n$ di coefficienti $a_i = \langle f, \, f_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n$.*

Dimostrazione. Sia $g = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots a_n f_n$ un elemento di V, l'errore commesso approssimando f con g è dato da

$$E(a_1, a_2, \dots, a_n)^2 = \|f - g\|^2 = \|f - (a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots a_n f_n)\|^2 = \\ = \|f\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i \langle f,\, f_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$$

dove si è tenuto conto che le f_i sono ortonormali e dell'osservazione 3.2. Perché E sia minimo si devono annullare le sue derivate rispetto agli a_i:

$$\frac{\partial E^2}{\partial a_i} = 2\langle f,\, f_i\rangle - 2a_i = 0 \qquad \text{e quindi} \qquad a_i = \langle f,\, f_i\rangle$$

□

Oltre che a partire dalle funzioni trigonometriche è possibile costruire un'altro sistema ortonormale in $L^2([-\pi, \pi])$ utilizzando le esponenziali complesse. Come conseguenza delle formule di Eulero vale l'uguaglianza

$$\begin{pmatrix} e^{inx} \\ e^{-inx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(nx) \\ \sin(nx) \end{pmatrix}; \qquad \text{inoltre} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = -2i \neq 0.$$

Questo significa che il sottospazio di $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ generato dalle funzioni e^{inx} e e^{-inx} coincide con quello generato da $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$. Possiamo scrivere un nuovo sistema ortonormale sostituendo le coppie

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx) \quad \text{con le coppie} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx},\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-inx}.$$

Riassumendo,

Proposizione 3.5 *La successione*

$$\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \tag{3.12}$$

costituisce un sistema ortonormale in $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$.

Dimostrazione. È sufficiente verificare che $\left\langle e^{inx},\, e^{imx}\right\rangle = 0$ e che $\left\langle e^{inx},\, e^{inx}\right\rangle = 1$. La verifica è lasciata per esercizio. □

Le combinazioni lineari a coefficienti complessi delle funzioni (3.12) generano funzioni a valori complessi. Per limitarsi a funzioni a valori reali dovremo imporre delle restrizioni sui coefficienti della combinazioni lineari. Se $c_n,\, c_{-n} \in \mathbb{C}$,

$$c_n e^{inx} + c_{-n} e^{inx} = (c_n + c_{-n})\cos(nx) + i(c_n - c_{-n})\sin(nx)$$

Perché la combinazione lineare sia reale, la quantità

$$\operatorname{Im}(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{inx}) = \operatorname{Im}(c_n + c_{-n})\cos(nx) + i\operatorname{Re}(c_n - c_{-n})\sin(nx)$$

si deve annullare per ogni $x \in [-\pi, \pi]$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi,

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(c_n + c_{-n}) = 0 \\ \operatorname{Re}(c_n - c_{-n}) = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \operatorname{Im}(c_n) = -\operatorname{Im}(c_{-n}) \\ \operatorname{Re}(c_n) = \operatorname{Re}(c_{-n}) \end{cases}.$$

In altre parole, la combinazione lineare è reale se e solo se $c_n = \overline{c}_{-n}$ per ogni $n > 0$.

3.4 Serie di Fourier in $L^2([-\pi, \pi])$

Una serie di Fourier è una espressione del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \qquad a_n, b_n \in \mathbb{R} \tag{3.13}$$

o, equivalentemente, del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{con } c_n \in \mathbb{C} \tag{3.14}$$

Con il simbolo $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$ si indica il $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f_n$.

Utilizzeremo indifferentemente la (3.13) o la (3.14) limitandoci per quest'ultima al caso in cui la somma sia reale, ovvero supporremo sempre che $c_n = \overline{c}_{-n}$. Il passaggio dalla forma (3.13) alla forma (3.14) avviene mediante le formule di Eulero:

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{itn} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-itn} \qquad n > 0;$$

confrontando,

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Inversamente,

$$a_0 = 2c_0, \qquad a_n = c_n + c_{-n} = 2\,\mathrm{Re}\,(c_n), \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}) = -2\,\mathrm{Im}\,(c_n)$$

D'ora in poi supporremo sempre f a valori reali.

Definizione 3.9 *Sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Si dice* **serie di Fourier associata ad f** *la somma (3.14) dove*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx. \tag{3.15}$$

oppure, secondo la notazione trigonometrica, la somma (3.13) dove

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos(nx)\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin(nx)\, dx. \tag{3.16}$$

Osservazione 3.3 Nel paragrafo precedente sono stati introdotti due sistemi ortonormali per $L^2([-\pi, \pi])$. Il collegamento tra questi e le serie di Fourier è evidente: in notazione esponenziale, ad esempio, la serie di Fourier può essere scritta anche utilizzando le funzioni del sistema ortonormale:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \text{dove} \qquad C_n = \sqrt{2\pi} c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx = \left\langle f, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle.$$

Quindi i singoli addendi della serie di f non sono altro che le proiezioni ortogonali di f lungo gli elementi del sistema ortonormale e C_n non è altro che la componente di f lungo e^{inx}.

Considerazioni analoghe si possono fare riguardo al sistema ortonormale trigonometrico. Se scriviamo la serie (3.13) come

$$\frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} + B_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\right)$$

i coefficienti sono di nuovo le componenti di f lungo gli elementi del sistema ortonormale:

$$A_0 = \sqrt{2\pi}\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f\,dx = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle$$

$$A_n = \sqrt{\pi}a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(nx)\,dx = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\right\rangle \qquad n > 0$$

$$B_n = \sqrt{\pi}b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(nx)\,dx = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\right\rangle \qquad n > 0$$

Osservazione 3.4 In base alla proposizione 3.4 possiamo interpretare le somme parziali delle serie di Fourier come un problema di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati di una funzione di $L^2([-\pi,\pi])$ con funzioni trigonometriche (o esponenziali) di frequenza $\leq N$. Ad esempio, fra tutte le funzioni del tipo $\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$, la migliore approssimazione di f è quella che ha come coefficienti a_n i coefficienti di Fourier di f: se i c_n sono quelli definiti dalla (3.15),

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}\right\| \leq \left\| f - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}\right\| \qquad \text{per ogni } a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{C},\ a_{-n} = \overline{a_n}.$$

Proposizione 3.6 *Sia $f \in L^2([-\pi,\pi])$ e siano c_n i suoi coefficienti di Fourier. Indichiamo con S_N la somma parziale N-esima della serie di Fourier di f.*

i) la successione $\|S_N\|$ è non decrescente;

ii) la successione $E_N = \|f - S_N\|$ degli errori è non crescente.

Dimostrazione. Per quanto riguarda la *i)* è sufficiente osservare che

$$\|S_N\|^2 = \left\langle \sum_{n=-N}^{N} C_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \sum_{n=-N}^{N} C_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle = \sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N} C_n\overline{C_m}\left\langle \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle =$$
$$= \sum_{n=-N}^{N} C_n\overline{C_n} = \sum_{n=-N}^{N} |C_n|^2 = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} |C_n|^2 + 2|C_n|^2 \geq \|S_{N-1}\|^2.$$

La *ii)* è invece una conseguenza quasi immediata dell'osservazione 3.4:

$$\|f - S_N\|^2 = \|f - S_{N-1} - \overline{c_n}e^{-inx} - c_n e^{inx}\|^2 \leq$$
$$\leq \|f - S_{N-1} - \overline{a_n}e^{-inx} - a_n e^{inx}\|^2 \qquad \text{per ogni } a_n \in \mathbb{C}.$$

In particolare, possiamo scegliere $a_n = 0$ e quindi $\|f - S_N\|^2 \leq \|f - S_{N-1}\|^2$. □

Proposizione 3.7 *Se S_N è la somma parziale N-esima della serie di Fourier di f allora*

i) $f - S_N$ *è ortogonale a* S_N*;*

ii) $\|f\|^2 = \|S_N\|^2 + \|f - S_N\|^2$.

Dimostrazione. Iniziamo con la prima affermazione:

$$\begin{aligned}\langle f - S_N,\, S_N\rangle = \langle f,\, S_N\rangle - \|S_N\|^2 &= \sum_{n=-N}^{N} \left\langle f,\, C_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle - \|S_N\|^2 = \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \overline{C_n} \left\langle f,\, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle - \|S_N\|^2 = \sum_{n=-N}^{N} \overline{C_n} C_n - \|S_N\|^2 = \\ &= \sum_{n=-N}^{N} |C_n|^2 - \|S_N\|^2 = \|S_N\|^2 - \|S_N\|^2 = 0\end{aligned}$$

Il prodotto scalare è nullo e quindi $f - S_N$ ed S_N sono ortogonali.

Per la seconda affermazione basta osservare che

$$\|f\|^2 = \|S_N + (f - S_N)\|^2 = \|S_N\|^2 + \langle S_N,\, f - S_N\rangle + \langle f - S_N,\, S_N\rangle + \|f - S_N\|^2.$$

Per la *i)* i prodotti scalari si annullano e quindi vale la *ii)*. □

Osservazione 3.5 Per la proposizione 3.7,

$$\left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \right\|^2 = \lim_{N\to\infty} \|S_N\|^2 = \|f\|^2 - \lim_{N\to\infty} \|f - S_N\|^2.$$

Questo ha due conseguenze importanti:

i) $\|S_N\| \le \|f\|$ per ogni $N \ge 0$;

ii) $\lim_{N\to\infty} \|f - S_N\| = 0$ se e solo se $\lim_{N\to\infty} \|S_N\| = \|f\|$.

Dalla *i)*, insieme alla prima affermazione della proposizione 3.6, segue che la serie di Fourier di f converge a una funzione g di $L^2([-\pi, \pi])$ sulla quale per il momento non abbiamo nessuna informazione. Abbiamo visto in precedenze che l'errore commesso approssimando f con la somma parziale N-esima della serie di Fourier non aumenta all'aumentare di N. Ci potremo chiedere se $\lim_{N\to\infty} \|f - S_N\| = 0$ ovvero se la somma della serie di Fourier di f converge o meno, nel senso di $L^2([-\pi, \pi])$, alla funzione f stessa.

Teorema 3.2 *Sia $\{e_n\}$ un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert V e sia $\{C_n\}$ una successione tale che $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 < \infty$. Esiste un elemento $f \in V$ tale che $C_N = \langle f,\, e_n\rangle$ per ogni N ed inoltre*

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2. \tag{3.17}$$

Dimostrazione. Sia $S_N = \sum_{n=0}^{N} C_n e_n$. Per l'ortonormalità della base e_n,

$$\|S_{N+p} - S_N\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^{N+p} C_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{N+p} |C_n|^2.$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2$ è convergente, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un N_ε tale che per ogni $N > N_\varepsilon$, per ogni $p > 0$, $\sum_{n=N+1}^{N+p} |C_n|^2 < \varepsilon$. Quindi la successione $\{S_N\}$ è di Cauchy e, per la completezza dello spazio di Hilbert V converge ad un elemento $f \in V$, ovvero $\lim_{N\to\infty} \|f - S_N\| = 0$. In base alla ii) dell'osservazione 3.5 questo significa che $\lim_{N\to\infty} \|S_N\| = \|f\|$, ovvero la (3.18). Resta da far vedere che $\langle f,\, e_n\rangle = C_n$ per ogni n.

Fissiamo un valore di n,

$$\langle f,\, e_n\rangle = \langle S_m,\, e_n\rangle + \langle f - S_m,\, e_n\rangle \qquad \text{per ogni } m \in \mathbb{N}.$$

Se $m > n$,

$$\langle S_m,\, e_n\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{m} C_k e_k,\, e_n \right\rangle = C_n;$$

d'altra parte $|\langle f - S_m,\, e_n\rangle| \leq \|f - S_m\| \cdot \|e_n\| = \|f - S_m\| \to 0$. Passando al limite per $m \to \infty$ abbiamo $\langle f,\, e_n\rangle = C_n$. □

Corollario 3.1 *Se $f \in L^2([-\pi,\pi])$ la serie di Fourier di f converge ad f nel senso di $L^2([-\pi,\pi])$.*

Dimostrazione. È sufficiente applicare il teorema 3.2 con $V = L^2([-\pi,\pi])$ e scegliere come sistema ortonormale il sistema trigonometrico o quello esponenziale. □

Osservazione 3.6 Fino ad ora abbiamo sempre parlato di sistemi ortonormali senza mai usare la parola *base*. In effetti non avevamo nessun diritto di farlo. Perché un sistema ortonormale $\{e_n\}$ sia una base ortonormale di V è necessario far vedere che se $f \in V$ è tale che $\langle f,\, e_n\rangle = 0$ per ogni n allora $\|f\| = 0$. Finalmente, in base al teorema 3.2 possiamo affermare che sia il sistema ortonormale trigonometrico che quello esponenziale sono una *base* per lo spazio vettoriale $L^2([-\pi,\pi])$. Più propriamente, diciamo che i sistemi ortonormali trigonometrico ed esponenziale sono **completi** per $L^2([-\pi,\pi])$.

Osservazione 3.7 Può essere utile riscrivere la (3.17) in termini dei coefficienti a_n, b_n, c_n definiti dalla (3.15) e dalla (3.16):

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \pi \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right). \tag{3.18}$$

Osserviamo infine che perché abbia senso considerare i coefficienti a_n, b_n, c_n è sufficiente che la funzione f sia soltanto integrabile in $[-\pi,\pi]$. Vale comunque la *i)* dell'osservazione 3.6. Scrivendo esplicitamente l'espressione di $\|S_N\|^2$ e passare al limite per $n \to \infty$. A seconda che si utilizzi la notazione reale o complessa si ottengono le espressioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|^2 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \frac{1}{\pi} \|f\|^2 \tag{3.19}$$

che sono note come **disuguaglianza di Bessel**.

3.5 Teoremi di convergenza delle serie di Fourier

Per poter parlare di serie di Fourier associata ad una funzione f definita in $[-\pi, \pi]$ è sufficiente che esistano gli integrali che definiscono i coefficienti ovvero che $|f|$ sia integrabile.

I coefficienti di Fourier di f sono definiti tramite degli integrali. Se modifichiamo il valore della funzione f in un numero finito di punti i coefficienti di Fourier non cambiano. Fissato un $x_0 \in [-\pi, \pi]$, il valore della somma della serie in x_0 non dipende quindi solo dal valore di $f(x_0)$ ma dal valore della f in tutto l'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Di conseguenza ha senso interrogarsi ad esempio sul comportamento puntuale della serie di Fourier di f in relazione a quello di f stessa.

Teorema 3.3 *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua in $[-\pi, \pi]$. Allora la serie di Fourier di f converge puntualmente ad f per ogni $x \in (-\pi, \pi)$.*

Dimostrazione. Sia $S_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$. Introduciamo la funzione $D_N(x)$ detta **nucleo di Dirichlet** definita da

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{e^{(N+1)ix} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} = \frac{\sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right) x\right]}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}. \tag{3.20}$$

D_N sarà utile per calcolare le somme parziali delle serie di Fourier.

$$\begin{aligned}
S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\, dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t) f(t)\, dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(-y) f(x+y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) f(x+y)\, dy
\end{aligned}$$

Dalla (3.20) si vede facilmente che $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_N(y)\, dy = 2\pi$. Segue

$$\begin{aligned}
S_N(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_N(y)\, dy - \frac{1}{2\pi} f(x) \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y)\, dy = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x+y) - f(x)\right] D_N(y)\, dy = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+y) - f(x)}{e^{iy} - 1} (e^{(n+1)iy} - e^{-iny})\, dy.
\end{aligned}$$

Fissato un valore di x, poniamo $g(y) = \dfrac{f(x+y) - f(x)}{e^{iy} - 1}$. Si verifica che $g \in L^2([-\pi, \pi])$ e quindi che la serie di Fourier di g converge a g nel senso di $L^2([-\pi, \pi])$. Se indichiamo con d_n i coefficienti della serie di g,

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{(N+1)yi}\, dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{-Nyi}\, dy = d_{-(N+1)} - d_N.$$

Per la (3.18) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_n|^2 = \dfrac{\|f\|^2}{2\pi} < +\infty$ quindi $\lim_{|N|\to\infty} |d_N| = 0$. Segue che

$$\lim_{N\to\infty} |S_N(x) - f(x)| = 0 \quad \text{per ogni } x \in [-\pi, \pi]$$

ovvero che la serie di Fourier di f converge puntualmente ad f. □

Enunciamo senza dimostrazione altri due importanti teoremi sulla convergenza delle serie di Fourier:

Teorema 3.4 *Se f è una funzione continua in $[-\pi, \pi]$ ed $f(-\pi) = f(\pi)$, la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f.*

Teorema 3.5 *Se $f \in L^1([-\pi, \pi])$, la serie di Fourier di f converge puntualmente alla funzione*

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) - f(x-0))$$

dove

$$f(x+0) = \lim_{y\to x^+} f(y) \qquad e \qquad f(x-0) = \lim_{y\to x^-} f(y).$$

3.6 Altre proprietà delle serie di Fourier

Proprietà 1. L'operatore che ad una funzione f associa la successione dei suoi coefficienti di Fourier è lineare.

In altre parole, se $f, g \in L^1([-\pi, \pi])$, poiché L^1 è uno spazio vettoriale, anche $h = \alpha f + \beta g \in L^1([-\pi, \pi])$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Se a_n, b_n, c_n sono i coefficienti di Fourier di f, g, h rispettivamente, per la linearità dell'integrale $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$.

Proprietà 2. Significato del coefficiente di indice zero.

In notazione complessa, dalla definizione $c_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$. Quindi c_0 è il valor medio della funzione f in $[-\pi, \pi]$. Considerazioni analoghe si possono fare per il coefficiente a_0 della forma trigonometrica delle serie di Fourier ricordando che $a_0 = 2c_0$.

Proprietà 3. Integrabilità termine a termine delle serie di Fourier.

Sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$ e sia $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$. Per ogni $x, x_0 \in [-\pi, \pi]$ si ha

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k \int_{x_0}^{x} e^{ikx}.$$

Inoltre, per ogni x_0 fissato, la serie converge uniformemente al variare di $x \in [-\pi, \pi]$. Si noti che per poter integrare per serie *non* si richiede la convergenza uniforme della serie di Fourier di f.

Proprietà 4. Serie di Fourier della primitiva e della derivata di f.

Possiamo utilizzare la proprietà 3 per calcolare i coefficienti di Fourier della funzione $F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\, dt$, primitiva della f. Se indichiamo con c_k i coefficienti di Fourier di f e con D_k quelli di F,

$$D_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}F(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\left\{\int_{-\pi}^{t} f(s)\, ds\right\} dt.$$

Se $k \neq 0$, integrando per parti,

$$\begin{aligned} D_k &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{x} f(s)\, ds \cdot \int_{-\pi}^{x} e^{-ikt}\, dt\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{e^{-ikt}}{-ik}\, dt = \\ &= -(-ik)^{-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}\, dt = \frac{1}{ik}c_k. \end{aligned}$$

Quindi,

$$D_k = \begin{cases} \dfrac{1}{ik}c_k & \text{se } k \neq 0 \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\, dt & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Supponiamo ora che la funzione f sia derivabile in $(-\pi, \pi)$ e che $f(-\pi) = f(\pi)$ (quest'ultima ipotesi è sempre soddisfatta nel caso in cui f sia periodica). Sia ora $g(x) = f'(x)$ e siano d_k i coefficienti di Fourier di $g(x)$. Procedendo in maniera analoga si dimostra che

$$d_k = \begin{cases} (ik)c_k & \text{se } k \neq 0 \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, dt & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Osservazione 3.8 Non c'è nessun motivo a priori per cui la serie di Fourier di f' debba essere convergente. La convergenza andrà dimostrata di volta in volta ad esempio mediante la disuguaglianza di Bessel.

3.7 Serie di Fourier in $L^2([-\ell, \ell])$

La teoria delle serie di Fourier può essere sviluppata anche per funzioni definite in intervalli diversi da $[-\pi, \pi]$. I risultati per funzioni definite in $[-\ell, \ell]$ si ottengono da quelli dei paragrafi precedenti mediante il cambio di variabile $y = \frac{\ell}{\pi}x$. Ad esempio, se $f \in L^2([-\ell, \ell])$, la serie di Fourier di f si scrive

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{\ell}x} \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)e^{in\frac{\pi}{\ell}t} dt.$$

Indice