Ingegneria dell'ambiente e delle risorse

14 aprile 2003

# Note del corso di Metodi Matematici

Marco Spadini

Per l'Anno Accademico, 2002-2003

*Università degli studi di Firenze*

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Quelli che s'innamoran di pratica
senza scienza son come 'l nocchiere
ch'entra in navilio senza timone o
bussola, che mai ha certezza dove
si vada.

L. da Vinci

# Indice

**Introduzione** **ix**

**1 Alcune nozioni sui numeri complessi** **1**
1.1 Numeri complessi . . . . . 1
1.1.1 Definizione e proprietà elementari . . . . . 1
1.1.2 Rappresentazione in forma trigonometrica . . . . . 3
1.1.3 Struttura di $\mathbb{C}$ . . . . . 4
1.2 Il teorema fondamentale dell'algebra . . . . . 5
1.3 Funzioni sui complessi a valori complessi . . . . . 6
1.3.1 Alcune funzioni notevoli . . . . . 6
Riferimenti ed approfondimenti . . . . . 8

**2 Elementi di analisi complessa** **9**
2.1 Limiti e continuità . . . . . 9
2.2 Derivazione . . . . . 10
2.2.1 Condizioni di Cauchy-Riemann . . . . . 11
2.2.2 Condizioni di Cauchy-Riemann: interpretazione geometrica 13
2.3 Integrazione in $\mathbb{C}$ . . . . . 15
2.3.1 Formula di Cauchy. . . . . 18
2.3.2 Il metodo dei residui . . . . . 20
2.3.3 Integrali impropri in $\mathbb{R}$ . . . . . 23
Riferimenti ed approfondimenti . . . . . 24

**3 Trasformazioni del piano complesso** **25**
3.1 Trasformazioni conformi . . . . . 25
3.1.1 Alcune trasformazioni particolari . . . . . 29
3.2 Potenziale complesso . . . . . 31
3.3 Trasformazione di Joukowski . . . . . 36
3.3.1 Flusso attorno ad un profilo di Joukowski . . . . . 39
Riferimenti ed approfondimenti . . . . . 40

**4 Equazioni alle Derivate Parziali: introduzione** **41**
4.1 Generalità sulle equazioni alle derivate parziali . . . . . 41
4.1.1 Un esempio: soluzioni radiali dell'equazione di Laplace . . . 42

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

4.2 Equazioni dalla fisica . . . . . 43
4.2.1 Equazione di continuità . . . . . 43
4.2.2 L'equazione della corda vibrante . . . . . 44
4.2.3 Equazione del calore (o di diffusione) . . . . . 46
4.2.4 Equazioni di Laplace e di Poisson . . . . . 47
4.3 Principio di sovrapposizione . . . . . 49
4.4 Problemi (non) ben posti . . . . . 51
4.5 Il principio di massimo per l'equazione di Poisson . . . . . 53
4.6 Il metodo dell'integrale dell'energia . . . . . 54
Riferimenti ed approfondimenti . . . . . 56

**5 Equazioni del primo ordine** **57**
5.1 Equazioni lineari e quasi-lineari del primo ordine . . . . . 57
5.2 Il problema di Cauchy . . . . . 57
5.2.1 Esistenza ed unicità . . . . . 58
5.3 Leggi di conservazione . . . . . 62
5.3.1 Flusso di automobili su un'autostrada . . . . . 68
5.4 Sistemi di equazioni lineari . . . . . 71
5.4.1 Problema di Cauchy e caratteristiche . . . . . 71
Riferimenti ed approfondimenti . . . . . 75

**6 Equazioni lineari del secondo ordine** **76**
6.1 Problema di Cauchy e classificazione . . . . . 76
6.1.1 Linee caratteristiche . . . . . 77
6.1.2 Classificazione . . . . . 78
6.1.3 Caratteristiche ed equazioni a coefficienti costanti . . . . . 80
6.1.4 Soluzione di D'Alembert per l'equazione delle onde . . . . . 82
6.1.5 Riduzione ad un sistema del primo ordine . . . . . 83
6.2 Trasformata di Laplace e problemi su domini illimitati. . . . . 84
6.2.1 Equazione di diffusione. . . . . 89
6.2.2 Equazione delle onde . . . . . 91
6.3 Trasformata di Fourier e problemi su domini illimitati . . . . . 92
6.3.1 Un esempio per l'equazione di diffusione . . . . . 96
6.4 Costruzione di soluzioni mediante separazione delle variabili . . . . 97
6.4.1 Esempi per l'equazione delle onde . . . . . 97
6.4.2 Esempio per l'equazione di Laplace . . . . . 100
6.4.3 Esempi per l'equazione di diffusione. . . . . 102
6.4.4 Un metodo di trasformazione di coordinate per l'equazione di Laplace in domini piani . . . . . 106
Riferimenti ed approfondimenti . . . . . 107

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

**A Calcolo integrale in $\mathbb{R}^n$** **108**
A.1 Limiti ed integrazione . . . . . 108
A.2 Integrali di linea . . . . . 110
A.3 Integrali di superficie . . . . . 112
A.3.1 Integrazione per parti e Teorema della divergenza . . . . . 112

**B Serie di Fourier** **114**
B.1 Funzioni $2\pi$-periodiche . . . . . 114
B.2 Funzioni di periodo qualunque . . . . . 115
B.3 Convergenza puntuale . . . . . 116
B.4 Rappresentazione nel campo complesso . . . . . 117

**Bibliografia** **119**

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

# Elenco delle tabelle


5.1 Valori di $a_{ij}$, $b_{ij}$ e $f_j$ nell'esempio 5.4.3. . . . . 74

6.1 Riduzione a forma canonica delle equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti . . . . . 81
6.2 Alcune trasformate di Laplace . . . . . 86
6.3 Alcune proprietà della trasformata di Laplace . . . . . 87
6.4 Alcune trasformate di Fourier . . . . . 93
6.5 Alcune proprietà della trasformata di Fourier . . . . . 95

B.1 Coefficienti di Fourier per funzioni $2\pi$-periodiche . . . . . 114
B.2 Coefficienti di Fourier per funzioni $T$-periodiche . . . . . 116


Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

# Elenco delle figure


1.1 Somma di numeri complessi . . . . . 1
1.2 Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi . . . . . 3
1.3 La radice di $1 - i$. . . . . 7

2.1 Ortogonalità delle famiglie di curve determinate dalle parti reale e complessa di una funzione differenziabile . . . . . 13
2.2 Esempio di propagazione del calore: caso stazionario . . . . . 14
2.3 Integrazione su curve chiuse. . . . . 17
2.4 $\gamma_R$ . . . . . 23

3.1 Rappresentazione della trasformazione $z \mapsto e^z$ . . . . . 26
3.2 Rappresentazione della trasformazione $z \mapsto z^2$ . . . . . 27
3.3 Immagini secondo la trasformazione $z \mapsto z^2$. . . . . 28
3.4 Alcuni flussi particolari. . . . . 35
3.5 Linee di flusso per il potenziale complesso $f(z) = z + \frac{1}{z}$; $f$ trasforma le linee di flusso in quelle di un flusso uniforme . . . . . 36
3.6 Linee di flusso per il potenziale dell'Esempio 3.2.6 con $v = r = \kappa = 1$. 36
3.7 Immagini, secondo la trasformazione di Joukowski di circonferenze passanti per $-\lambda$ e racchiudenti $\lambda$ . . . . . 38
3.8 Linee di flusso per $r = 1$, $v = 1$, $\theta = \pi/12$, $s = 0.1$ e $\lambda = 0.9$ . . . . 39

5.1 Curve e linee caratteristiche per l'Esempio 5.2.3 . . . . . 61
5.2 Curve e linee caratteristiche per l'esempio 5.3.2 . . . . . 66
5.3 Linee caratteristiche per la (5.30) con $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$ e diverse 'velocità massime': $c = 1$ e $c = 2$. . . . . 70
5.4 Linee caratteristiche per la (5.30) con $h(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1}$. . . . . 70
5.5 Linee caratteristiche per la (5.30) con $h(x) = \pi/2 - \arctan(x)$. . . . 70

6.1 Onde viaggianti e superficie soluzione per l'esempio 6.1.3 . . . . . 83
6.2 Diffusione di un inquinante, $k = 1$. . . . . 89
6.3 Conduzione del calore in una sbarretta semi-infinita, $k = 1$. . . . . 91
6.4 Moto della corda semi-infinita, $f(t) = 3 \sin t$, $k = 1$. . . . . 92
6.5 Diffusione del calore in una sbarretta infinita . . . . . 96
6.6 Distribuzione stazionaria di temperatura . . . . . 100


Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

6.7 Trasformazione del problema di Dirichlet . . . . . 107

B.1 Alcune somme parziali della serie di Fourier relativa all'onda quadra $2\pi$-periodica . . . . . 117

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

# Introduzione

Queste note sono pensate essenzialmente come aiuto didattico per gli studenti del corso di Metodi Matematici, sono dunque, nello spirito, soltanto un brogliaccio di appunti. Non pretendono infatti di sostituire un testo specializzato ma intendono esporre il lettore ad alcune delle idee e dei metodi dell'analisi matematica utili nello studio dell'ingegneria.

Naturalmente, anche così ridotto, questo è un obbiettivo estremamente ambizioso che non potrebbe essere raggiunto se non con un'opera di ben altra consistenza. Per questo motivo, ho operato una riduzione drastica, e per molti versi arbitraria, degli argomenti trattati.

L'esposizione è divisa in due parti, solo debolmente dipendenti tra di loro, che corrispondono ai capitoli 1–3 e 4–6 rispettivamente. Nella prima parte si trattano brevemente alcuni argomenti di analisi complessa e se ne illustrano alcune applicazioni. La seconda parte è dedicata ad un'introduzione alle equazioni differenziali alle derivate parziali lineari da un punto di vista classico.

Ogni capitolo si conclude con un paragrafo di "Riferimenti ed approfondimenti" in cui ho raccolto i riferimenti da cui ho tratto il materiale per il capitolo assieme all'indicazione di altri testi che possono risultare utili a chi volesse approfondire i temi trattati.

Le figure presenti nel testo sono state ottenute, nella quasi totalità, per mezzo di semplici programmi che ho scritto per il pacchetto di calcolo numerico SCILAB.

Essendo ancora in un primo stadio stadio della stesura, purtroppo non mancheranno errori, manchevolezze ed imprecisioni. A questo riguardo, segnalazioni e suggerimenti dei lettori saranno alquanto graditi. Il modo migliore di contattarmi è via posta elettronica.

Firenze, 17 gennaio 2003

Dr. Marco Spadini
Dipartimento di Matematica Applicata "G. Sansone"
Università di Firenze, Facoltà di Ingegneria
Via S. Marta 3, 50139 Firenze.
e-mail: spadini@dma.unifi.it
web: http://www.dma.unifi.it/∼spadini

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

# Capitolo 1

# Alcune nozioni sui numeri complessi

## 1.1 Numeri complessi

Definiamo i numeri complessi e le operazioni tra di essi. Vedremo inoltre come, per mezzo di una opportuna rappresentazione, si possano risolvere equazioni nel campo complesso.

### 1.1.1 Definizione e proprietà elementari

Il modo più semplice di vedere i numeri complessi, è considerare l'insieme delle coppie[1] $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e di definire su di esse delle opportune operazioni: date $(a,b)$ e $(c,d)$ in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, si pone

$$(a,b)+(c,d) \underset{\text{def.}}{=} (a+c, b+d), \tag{1.1a}$$

$$(a,b)\cdot(c,d) \underset{\text{def.}}{=} (ac-bd, ad+bc). \tag{1.1b}$$

Spesso, in luogo della coppia $(a,b)$ si preferisce scrivere[2] $a+ib$. Noi utilizzeremo la notazione più conveniente a seconda delle circostanze.

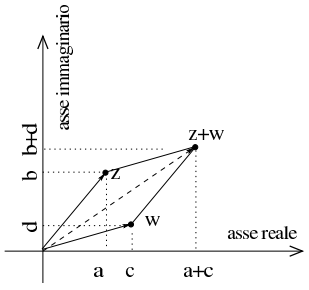



Figura 1.1: Somma di numeri complessi

Osserviamo inoltre (come è facile dimostrare) che le operazioni di somma e prodotto definite nelle (1.1) sono *associative*, *commutative* e *distributive*.

Usando la notazione tradizionale le (1.1) assumono la forma

$$(a+ib)+(c+id) = a+c+(b+d)i, \tag{1.1a'}$$

$$(a+ib)\cdot(c+id) = ac-bd+(ad+bc)i. \tag{1.1b'}$$

[1] Il simbolo '$\times$' denota il prodotto cartesiano di insiemi

[2] Questa è una notazione più tradizionale. A volte, specie nei testi di Ingegneria, la lettera $i$ è sostituita dalla $j$.

Dato un numero complesso $z = a + ib$, se ne definisce il *modulo* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ed il *coniugato* $\overline{z} = a - ib$. Si noti che, con le definizioni appena date, vale la relazione: $|z|^2 = z\overline{z} = \overline{z}z$.

Si può inoltre dimostrare che valgono le seguenti affermazioni.

**Proposizione 1.1.1.** *Se $z_1$ e $z_2$ sono numeri complessi dati, allora*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \qquad \textit{(disuguaglianza triangolare)},$$
$$|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|,$$
$$|zw| = |z|\,|w|.$$

L'insieme delle coppie $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dotato delle operazioni definite sopra e della norma $|\cdot|$, si chiama *campo complesso* e si denota con il simbolo $\mathbb{C}$. Se $z = a + ib$, chiamiamo $\mathrm{Re}(z) \underset{\text{def.}}{=} a$ la *parte reale* di $z$ e $\mathrm{Im}(z) \underset{\text{def.}}{=} b$ la sua *parte immaginaria*. Notiamo che le parti reale ed immaginaria di un numero complesso sono *numeri reali*.

Consideriamo il numero complesso $(0, 1)$; in notazione tradizionale lo si può scrivere semplicemente come $i$. Usando la (1.1b) oppure la (1.1b') si ottiene la relazione $i^2 = -1$ che può essere utilizzata per ricordarsi la (1.1b') e per fare velocemente i calcoli.

**Esercizio 1.1.2.** Calcolare i seguenti prodotti:

$$(-5 + 3i)(7 - 2i), \quad i(2i), \quad -i(2 - i).$$

Notiamo che ad ogni numero reale $a$ possiamo associare il numero complesso $(a, 0) = a + 0i$. In questo modo il *valore assoluto* di $a$ coincide con il *modulo* di $(a, 0)$. Questa corrispondenza ci permette di identificare $\mathbb{R}$ come il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ delle coppie della forma $(a, 0)$. In altre parole, se $a \in \mathbb{R}$, con la lettera '$a$' indicheremo indifferentemente sia il numero reale $a$ che il numero complesso $(a, 0)$.

**Osservazione 1.1.3.** Dato $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, si hanno le seguenti relazioni:

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha z = (\alpha a, \alpha b)$. In particolare $-z = -1 \cdot z = (-a, -b)$, ne segue $z - z = 0$;
2. Se poniamo $w = \overline{z}/|z|^2$, si ha $zw = wz = 1$; quindi ha senso scrivere $\frac{1}{z} = z^{-1} = w$.

**Esercizio 1.1.4.** Sia $z = 1 - 2i$, scrivere (esplicitamente) $z^{-1}$. Fare la stessa cosa per un generale $z = (a, b)$.

**Esercizio 1.1.5.** Calcolare le parti reale e immaginaria di $(1 + i)/(1 - i)$ e di $(1 - i)/(1 + i)$.

**Esercizio 1.1.6.** Siano $w$ $z$ numeri complessi, dimostrare che:

1. Se $|z| > 0$ allora $z \neq 0$.
2. Se $w \neq 0$ allora $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

### 1.1.2 Rappresentazione in forma trigonometrica

Sia $z = a + ib$ in numero complesso, possiamo scrivere il *punto* $(a, b)$ del piano in coordinate polari; cioè $a = |z|\cos\theta$ e $b = |z|\sin\theta$, dove $\theta \in (-\pi, \pi]$ è l'angolo formato dal semiasse positivo delle $x$ e dalla semiretta fuoriuscente dall'origine e passante per $z$. L'angolo $\theta$ si chiama *argomento (principale)* di $z$ e si indica con $\theta = \arg z$. Con semplici considerazioni geometriche si vede che $\cos(\arg z) = a/|z|$ e $\sin(\arg z) = b/|z|$. In particolare, se $a > 0$, $\arg z = \arctan \frac{b}{a}$.

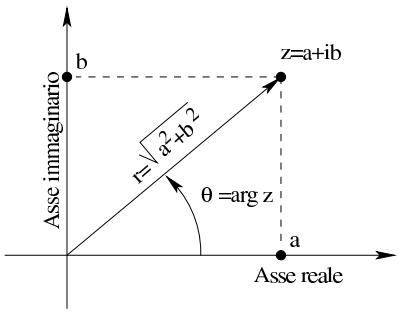



Figura 1.2: Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi

Quindi, in generale, un numero complesso $z$ si può sempre scrivere nella forma $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, con $\rho = |z|$ e $\theta = \arg z$.

Dalle ben note formule di addizione in trigonometria segue che, dati $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, si ha

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big), \tag{1.3a}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\big), \tag{1.3b}$$

Inoltre se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, si ha

$$z^n = \rho^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big). \tag{1.3c}$$

Le formule (1.3) vanno comunemente sotto il nome di **Teorema di De Moivre.** Dalle (1.3a) e (1.3b) seguono

$$\begin{aligned}\arg(z_1 z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2,\\ \arg(z_1/z_2) &= \arg z_1 - \arg z_2,\\ \arg\bar{z} &= -\arg z\end{aligned}$$

**Definizione 1.1.7.** Sia $z = a + ib$ un numero complesso. Poniamo

$$\boxed{e^z = e^a(\cos b + i\sin b)}$$

Ci sono vari modi di giustificare la formula appena scritta, ma per noi sarà soltanto una definizione.[3] Osserviamo che ogni numero complesso $z$ diverso da zero si può scrivere nella forma $z = |z|e^{i(\arg z + 2n\pi)}$ per un qualsiasi $n \in \mathbb{Z}$.

[3]Una possibile giustificazione è la seguente: Ricordando gli sviluppi di Taylor nel campo reale delle funzioni esponenziale, seno e coseno, si ha *formalmente*

$$\begin{aligned}e^{a+ib} =& e^a e^{ib} = e^a \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ib)^k}{k!} = e^a\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{b^{2k}}{2k!} + i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{b^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\\ =& e^a(\cos b + i\sin b).\end{aligned}$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Osserviamo che $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$. Infatti, se $z = a + ib$,

$$|e^z| = |e^a||\cos b + i \sin b| = e^a\big((\cos b)^2 + (\sin b)^2\big) = e^a.$$

**Proposizione 1.1.8.** *Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, valgono le seguenti relazioni*

1. $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;
2. $e^{z_1} = e^{z_2}$ *se e soltanto se* $z_1 - z_2 = 2n\pi i$ *per qualche* $n \in \mathbb{Z}$;
3. $|e^{ix}| = 1$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$;
4. $e^{\pi i} = -1$.

**Esempio 1.1.9.** Fissato $n \in \mathbb{N}$, risolviamo l'equazione $z^n = 1$. Per la formula (1.3c), $z^n = r^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big)$. Da cui $|z^n| = |z|^n$. Se $z_0 = r_0 e^{\theta_0}$ è soluzione allora $|z_0|^n = 1$ e quindi $|z_0| = 1$; inoltre deve essere

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = 1.$$

Questo è vero se e solo se $\sin(n\theta) = 0$, cioè $\theta = \frac{k}{n}\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$. Quindi le soluzioni sono esattamente i numeri complessi della forma $e^{i\pi(k/n)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Osserviamo che di questi numeri ce ne sono esattamente $n$ distinti cioè quelli corrispondenti a $k = 0, \dots, n-1$.

**Esercizio 1.1.10.** Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ di $z^3 = i|z|\overline{z}$. (*Suggerimento: scrivere $z$ nella forma $z = re^{i\theta}$.*)

### 1.1.3 Struttura di $\mathbb{C}$

Come abbiamo visto dalla definizione di numero complesso, $\mathbb{C}$ è naturalmente in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}^2$. In altre parole, dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$, ad esso risulta naturalmente associato il punto $(x, y)$. Osserviamo che questa corrispondenza conserva le "distanze", cioè, dati $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, si ha

$$|z_1 - z_2| = \big\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\big\|.$$

Questo vuole dire che la corrispondenza tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$ è molto più profonda di una semplice corrispondenza biunivoca e coinvolge anche la "geometria" di questi due spazi. In particolare i dischi di $\mathbb{C}$ corrispondono ai dischi di $\mathbb{R}^2$ (con lo stesso raggio).

Sfruttiamo la corrispondenza con $\mathbb{R}^2$ per definire un *topologia* nel campo complesso.[4] Un sottoinsieme $\Omega$ di $\mathbb{C}$ è detto aperto se esso corrisponde ad un aperto

[4] Ricordiamo che dare una topologia su un insieme $X$ significa assegnare una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{A}$ di $X$ con le seguenti proprietà:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,
2. Per ogni insieme di indici $I$ e famiglia di sottoinsiemi $\{A_i\}_{i\in I}$ si ha $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.
3. Per famiglia **finita** di insiemi $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ si ha $\bigcap_{i\in\{1,\dots,n\}} A_i \in \mathcal{A}$.

In questo caso la coppia $(X, \mathcal{A})$ è detta *spazio topologico*.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

di $R^2$. In modo analogo si possono ritrovare le nozioni di insieme chiuso, connesso, semplicemente connesso e compatto, nonché quelle di frontiera di un insieme, di punto di accumulazione, di punto isolato e di successione convergente.

## 1.2 Il teorema fondamentale dell'algebra

Uno dei motivi dell'introduzione dei numeri complessi è che nel loro ambito è possibile fattorizzare qualunque polinomio non costante (a coefficienti reali o complessi). In altri termini, ogni equazione polinomiale del tipo $P(z) = 0$, con $P$ un polinomio di grado positivo, ammette soluzione. Questo permette di risolvere alcuni problemi in modo molto semplice ed elegante.

Il teorema fondamentale dell'algebra può essere espresso come segue:

**Teorema 1.2.1.** *Sia $P_n(z)$ il polinomio di grado $n > 0$ dato da:*

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$

*con $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Allora esistono $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$, $m \leq n$, e $l_1, \ldots, l_m \in \mathbb{N}$ tali che*

$$\begin{aligned} &P_n(z) = a_n (z - z_1)^{l_1} (z - z_2)^{l_2} \cdots (z - z_m)^{l_m}, \\ &n = l_1 + \ldots + l_m. \end{aligned} \tag{1.4}$$

*Inoltre la fattorizzazione* (1.4) *è unica a meno di una permutazione degli indici $1, \ldots, m$.*

I numeri complessi $z_1, \ldots, z_m$ che compaiono nella fattorizzazione (1.4) sono detti *radici* del polinomio $P_n$ ed i numeri $l_1, \ldots, l_m$ sono le loro *molteplicità*. Chiaramente $z_1, \ldots, z_m$ sono le (uniche) soluzioni dell'equazione $P_n(z) = 0$.

Osserviamo che il Teorema 1.2.1 fornisce la mera esistenza di una fattorizzazione, non dà nessuna indicazione su come ottenerla.

**Esempio 1.2.2.** Il polinomio $z^3 - z^2 + z - 1$ è uguale (in $\mathbb{C}$) a $(z-1)(z-i)(z+i)$, cioè $z_1 = 1$, $z_2 = i$ e $z_3 = -i$. In $\mathbb{R}$, cioè limitandosi a polinomi a coefficienti reali, questo polinomio può essere fattorizato solo come $(z-1)(z^2+1)$.

**Esercizio 1.2.3.** Per ogni polinomio di secondo grado $az^2 + bz + c$ con $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$, scrivere una fattorizzazione nella forma (1.4). (Suggerimento: Nel campo complesso $\sqrt{b^2 - 4ac}$, ha senso anche quando il discriminante è negativo.)

**Esercizio 1.2.4.** Dato il polinomio $5(z^2-1)(z^2+1)^2$, scriverne una fattorizzazione in $\mathbb{C}$ della forma (1.4).

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

## 1.3 Funzioni sui complessi a valori complessi

Una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ associa ad ogni $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso $f(z)$. Dato $z \in \mathbb{C}$, scriviamo $f(z) = u(z) + iv(z)$ dove $u(z) = \mathrm{Re}\,(f(z))$ e $v(z) = \mathrm{Im}\,(g(z))$ sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di $f(z)$. Se $z = x + iy$ scriviamo, con un piccolo abuso di notazione, $u(z) = u(x, y)$, $v(z) = v(x, y)$ e, analogamente, $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$.

### 1.3.1 Alcune funzioni notevoli

#### Funzioni trigonometriche

La formula $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$, ci dice che

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta - \big(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\big)}{2i} = \sin\theta.$$

Questo ci suggerisce di *definire*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Analogamente, definiamo

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

e

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}.$$

è facile estendere al campo complesso la validità delle usuali formule di trigonometria. Si veda, per esempio, il seguente esercizio:

**Esercizio 1.3.1.** Verificare che valgono le formule:

- $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$,
- $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$, $\tan(-z) = -\tan z$,
- $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$,
- $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$,

#### Funzioni iperboliche

Le funzioni iperboliche, analogamente al caso reale, sono definite come segue:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$
$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Come nel caso reale, è facile provare le seguenti relazioni:

$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1, \qquad 1 - (\tanh z)^2 = \frac{1}{(\cosh z)^2}$$
$$\sinh(-z) = -\sinh z, \quad \cosh(-z) = \cosh z, \quad \tanh(-z) = -\tanh z,$$
$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2,$$
$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2.$$

Tra le funzioni iperboliche e quelle trigonometriche valgono le seguenti relazioni:

| | | |
|---|---|---|
| $\sin(iz) = i \sinh z$ | $\cos(iz) = \cosh z$ | $\tan(iz) = i \tanh z$ |
| $\sinh(iz) = i \sin z$ | $\cosh(iz) = \cos z$ | $\tanh(iz) = i \tan z$ |

### Radici $n$-sime

Dato $w \in \mathbb{C}$ ed $n \in \mathbb{N}$ cerchiamo tutti i complessi $z$ tali che $z^n = w$. Scriviamo $w = |w|e^{i \arg w}$. Come nell'esempio 1.1.9, si ha che $z^n = |z|^n e^{in \arg z}$. Allora deve essere

$$|z|^n = |w| \quad \text{e} \quad \arg z + 2k\pi = \frac{1}{n} \arg w.$$

Osserviamo che questo determina $n$ numeri complessi distinti. In altre parole, scrivendo $\sqrt[n]{z}$ si intendono gli $n$ numeri complessi distinti che moltiplicati $n$ volte per se stessi danno $z$. Per questo motivo non è bene scrivere $\sqrt{-1}$ in luogo di $i$, infatti $\sqrt{-1} = \pm i$.

Osserviamo che $\sqrt{z} = \pm\sqrt{z}$. La scelta di un particolare valore per la radice è detta una *determinazione* della radice.

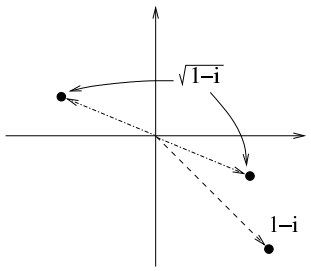


Figura 1.3: La radice di $1 - i$.

**Esempio 1.3.2.** Calcoliamo $\sqrt{1-i}$. Sccome si può scrivere $1 - i = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi i}{4}}$, otteniamo

$$\sqrt{1-i} = \left\{ \sqrt[4]{2}\, e^{-\frac{\pi i}{8}}, \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{7\pi i}{8}} \right\}.$$

### Logaritmi

Dato un numero complesso non nullo $z$ si cercano i complessi $w$ tali che $z = e^w$.

Scriviamo $z = |z|e^{i\theta}$, con $\theta = \arg z$, e poniamo $w = x + iy$. Allora $|z| = |e^w| = e^x$, da cui segue $x = \ln |z|$. Poiché deve essere

$$z = |z|e^{i\theta} = e^w = e^x e^{iy} = |z|e^{iy},$$

si ricava $e^{i\theta} = e^{iy}$ da cui segue $y = \theta + 2k\pi$. Si ottengono cioè infiniti numeri complessi (uno per ogni scelta di $k \in \mathbb{Z}$) che risolvono l'equazione $e^w = z$. Facciamo la convenzione di scegliere $\theta = \arg z \in (-\pi, \pi]$ e $k = 0$; allora si determina un solo valore di $w$. Questo definisce la funzione logaritmo, cioè

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

**Funzioni trigonometriche ed iperboliche inverse**

Dato $z \in \mathbb{C}$, cerchiamo $w \in \mathbb{C}$ tale che $z = \sin w$. Si ha

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

da cui $e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$. Risolvendo[5] rispetto a $e^{iw}$ si ha $e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2}$. Allora,

$$w = 2k\pi + \frac{1}{i} \ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right).$$

Se poi cerchiamo $w \in \mathbb{C}$ tale che $z = \sinh w$, allora, ricordandoci della relazione $\sinh(iw) = i \sin w$, si ottiene subito

$$w = 2k\pi i + \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right).$$

In modo analogo si può provare che:

| | | |
|---|---|---|
| $w = 2k\pi + \frac{1}{i} \ln\left(iz + \sqrt{z^2-1}\right)$ | se $z = \cos w$ | $k \in \mathbb{Z}$ |
| $w = k\pi + \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$ | se $z = \tan w$ | |
| $w = 2k\pi i + \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$ | se $z = \cosh w$ | |
| $w = k\pi i + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ | se $z = \tanh w$ | |

**Potenze**

Dati $z, w \in \mathbb{C}$, cosa significa l'espressione $z^w$? La formula $\zeta = e^{\ln z}$, valida per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e $\zeta \in \mathbb{C}$, ci suggerisce di *definire*

$$z^w = e^{w \ln z}.$$

Osserviamo che quest'espressione dipende dalla scelta di una determinazione del logaritmo. Per esempio $(-1)^{1/2}$ da luogo, a seconda della determinazione scelta, a $\pm i$. Questo é coerente con quanto affermato a proposito delle radici.

**Esercizio 1.3.3.** Calcolare $i^i$.

## Riferimenti ed approfondimenti

**Paragrafi 1.1 – 1.3:** [1], [6, cap. 1], [7, cap. 1], [16, cap. 1].

[5] Si ricordi che, in base a quanto affermato sulle radici di numeri complessi, $\sqrt{1-z^2} = \pm\sqrt{1-z^2}$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

# Capitolo 2

# Elementi di analisi complessa

## 2.1 Limiti e continuità

La definizione di limite per funzioni complesse è analoga a quelle già note per funzioni reali. Per semplicità ci limiteremo a funzioni definite su aperti di $\mathbb{C}$.

**Definizione 2.1.1.** Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto; data $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e un punto $z_0 \in \Omega$ scriveremo

$$\ell = \lim_{z \to z_0} f(z), \quad \ell \in \mathbb{C},$$

se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ con la proprietà che $|f(z) - \ell| < \varepsilon$ per ogni $z$ tale che $0 < |z - z_0| < \delta$.

Diremo inoltre che $f$ è continua in $z_0 \in \Omega$ se $\lim_{z \to z_0} f(z)$ esiste e, inoltre,

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

Se questa relazione è vera per ogni $z_0 \in \Omega$ allora diremo che $f$ è continua (in $\Omega$).

**Esempio 2.1.2.** Verifichiamo che $\lim_{z \to 0} e^z = 1$. Per vederlo scriviamo

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z)\big)$$

ed osserviamo che (in $\mathbb{R}^2$)

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} e^x \cos y = 1, \qquad \lim_{(x,y) \to (0,0)} e^x \sin y = 0.$$

**Proposizione 2.1.3.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto; date $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $g : \Omega \to \mathbb{C}$, supponiamo che*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l_1, \quad e \quad \lim_{z \to z_0} g(z) = l_2$$

*esistano e siano ben definiti. Allora*

- $\lim_{z \to z_0} \big(f(z) + g(z)\big) = l_1 + l_2$,

- $\lim_{z\to z_0}\big(f(z)g(z)\big) = l_1 l_2$,

*Inoltre, se* $l_2 \neq 0$,

- $\lim_{z\to z_0}\big(f(z)/g(z)\big) = l_1/l_2$.

Osserviamo che le funzioni $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$, $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$, $z \mapsto |z|$ e $z \mapsto \overline{z}$ sono continue.

**Proposizione 2.1.4.** *Sia* $\Omega$ *un aperto di* $\mathbb{C}$. *Una funzione* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *è continua in un punto di* $\mathbb{C}$ *se e solo se le funzioni* $z \mapsto \mathrm{Re}\big(f(z)\big)$ *e* $z \mapsto \mathrm{Im}\big(f(z)\big)$ *lo sono. In altre parole, scrivendo* $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, $f$ *è continua se e solo se le funzioni* $u$ *e* $v$ *sono continue.*

**Proposizione 2.1.5.** *Sia* $\Omega$ *un aperto di* $\mathbb{C}$. *Se* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *e* $g : \Omega \to \mathbb{C}$ *sono continue allora le funzioni* $z \mapsto f(z)g(z)$ *e* $z \mapsto f(z) + g(z)$ *sono continue. Di conseguenza tutte le funzioni polinomiali (a coefficienti reali o complessi) sono continue.*

*Inoltre, dato* $z_0 \in \mathbb{C}$, *se* $g(z_0) \neq 0$ *allora* $z \mapsto f(z)/g(z)$ *è continua in* $z_0$. *Conseguentemente, tutte le funzioni razionali, cioè le funzioni della forma*

$$z \mapsto \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_0},$$

*con* $m, n \in \mathbb{Z}$ *e* $a_m, \ldots, a_0, b_n, \ldots, b_0 \in \mathbb{C}$, *sono continue in ogni* $z_0$ *tale che* $b_n z_0^n + b_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + b_0 \neq 0$.

## 2.2 Derivazione

Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{C}$. Data $f : \Omega \to \mathbb{C}$ diremo che è derivabile in $z_0 \in \Omega$ se esiste $\ell \in \mathbb{C}$ tale che

$$\ell = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \tag{2.1}$$

In tale caso si pone $f'(z_0) = \ell$.

**Osservazione 2.2.1.** È facile vedere che le consuete regole formali per la derivazione delle funzioni reali sono ancora valide.

**Osservazione 2.2.2.** Supponiamo che $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to U \subset \mathbb{C}$ sia differenziabile, $\Omega$ e $U$ aperti, e che esista una funzione $g : U \to \Omega$ tale che $z = g\big(f(z)\big)$ per ogni $z \in \Omega$ e $w = f\big(g(w)\big)$ per ogni $w \in U$. Dato $z_0 \in U$, poniamo $z_0 = g(w_0)$. Allora, come nel caso di funzioni reali, si può provare che se $f'(z_0) \neq 0$, allora $g'(w_0)$ è ben definito ed inoltre:

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{f'\big(g(w_0)\big)}.$$

In realtà si può provare di più:

**Teorema 2.2.3.** *Supponiamo che la funzione complessa* $f$ *sia differenziabile in un intorno di* $z_0$ *e che* $f'(z_0) \neq 0$ *allora* $f$ *è localmente invertibile in un intorno di* $z_0$, *cioè esistono intorni* $\Omega$ *e* $U$ *ed una funzione* $g$ *come nell'osservazione 2.2.2.*

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

### 2.2.1 Condizioni di Cauchy-Riemann

In questa parte ci occuperemo di determinare delle condizioni che assicurino la derivabilità di una funzione complessa a valori complessi. Ci limiteremo inoltre, per semplicità, a funzioni definite su aperti di $\mathbb{C}$.

**Teorema 2.2.4.** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{C}$. Data $f : \Omega \to \mathbb{C}$, scriviamo $z = x + iy$ e $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Se $f$ è derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0$, allora $u$ e $v$ sono derivabili in $(x_0, y_0)$ e*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \tag{2.2a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{2.2b}$$

*(Condizioni di Cauchy-Riemann.)*

*Dimostrazione.* Siccome per ipotesi $f$ è differenziabile in $z_0$, il valore di $f'(z_0)$ è indipendente dal modo con cui $h$ tende a 0 nel rapporto incrementale (2.1). Scegliendo $h = t = (t, 0)$ con $t \in \mathbb{R}$ (cioè $h = t + 0i$), e separando le parti reale ed immaginaria del limite

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{[u(x_0 + t, y_0) + iv(x_0 + t, y_0)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i \lim_{t\to 0} \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Osserviamo che la (2.3) mostra anche l'esistenza di $\partial u/\partial x$ e $\partial v/\partial x$ in $(x_0, y_0)$. Analogamente, scegliendo $h = ti = (0, t)$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{[u(x_0, y_0 + t) + iv(x_0, y_0 + t)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{it} \\ &= \frac{1}{i} \left\{ \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)}{t} + i \lim_{t\to 0} \frac{v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)}{t} \right\} \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Confrontando le parti reale e immaginaria di $f'(z_0)$ ottenute con i due metodi sopra si ottengono rispettivamente la (2.2a) e la (2.2b). □

**Esercizio 2.2.5.** Dimostrare che la funzione $z \mapsto \overline{z}$ **non** è differenziabile. Se $z \mapsto f(z)$ è differenziabile, cosa si può dire di $z \mapsto \overline{f(z)}$?

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

**Osservazione 2.2.6.** Supponiamo che $f$ sia differenziabile in $z_0$. Allora le formule (2.3) e (2.4) ci forniscono un modo comodo per calcolare la derivata $f'(z_0)$ mediante il calcolo delle derivate parziali delle sue parti reale ed immaginaria. Per le condizioni di Cauchy-Riemann, sia la (2.3) sia la (2.4) forniscono lo stesso risultato.

Il Teorema 2.2.4 può essere invertito come segue

**Teorema 2.2.7.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ data da $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ con $z = x+iy$. Se in $\Omega$ le derivate parziali $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ esistono, sono continue e soddisfano le condizioni* (2.2a)-(2.2b) *allora $f$ è differenziabile in ogni punto di $\Omega$.*

In effetti, come vedremo meglio più avanti, si può provare che le funzioni che sono derivabili su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ sono ivi *analitiche* cioè possono essere scritte come serie di potenze.

**Esempio 2.2.8.** Consideriamo la funzione $f(z) = e^z$. Poniamo $z = x + iy$; si può scrivere $e^z = u(x,y) + iv(x,y)$ con $u(x,y) = e^x \cos y$ e $v(x,y) = e^x \sin y$. Si verifica subito che valgono le condizioni del Teorema 2.2.7 con $\Omega = \mathbb{C}$, pertanto la funzione $f : z \mapsto e^z$ è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{C}$.

Per calcolare $f'(z)$ sfruttiamo, per esempio, la formula (2.3) (vedere l'Osservazione 2.2.6). Si ottiene

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^z = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

**Esercizio 2.2.9.** Usare il risultato dell'Esempio 2.2.8 e l'Osservazione 2.2.1 per verificare che

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sin z = \cos z$,
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \cos z = -\sin z$,
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \tan z = \frac{1}{(\cos z)^2}$.

Sia $z = x + iy$ e $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sia differenziabile in $\mathbb{C}$. Supponiamo che le funzioni $u$ e $v$ ammettano derivate parziali seconde continue in $\mathbb{R}^2$. (Si può dimostrare che questo è sempre vero, per esempio, se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{C}$.) Derivando la (2.2a) rispetto a $x$ e la (2.2b) rispetto a $y$, si ottiene[1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

[1]Non scriviamo esplicitamente il punto in cui sono calcolate le derivate, esse devono intendersi in $(x,y)$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Da cui si ottiene la relazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0. \tag{2.5}$$

Similmente, si può provare che vale la relazione

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0. \tag{2.6}$$

Questo mostra che le parti reale e immaginaria di una funzione differenziabile soddisfano rispettivamente le equazioni (2.5) e (2.6). Queste sono esempi di *equazioni alle derivate parziali del secondo ordine*. Le equazioni di questa forma si chiamano *equazioni di Laplace*.

### 2.2.2 Condizioni di Cauchy-Riemann: interpretazione geometrica

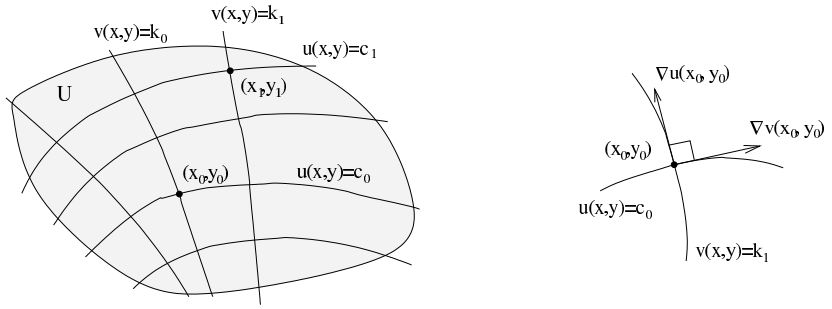



Figura 2.1: Ortogonalità delle famiglie di curve determinate dalle parti reale e complessa di una funzione differenziabile

Sia $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una funzione differenziabile in $\mathbb{C}$. Consideriamo la famiglia di curve (in $\mathbb{R}^2$) definita implicitamente al variare di $c \in \mathbb{R}$ dall'equazione

$$u(x,y) = c.$$

Fissato $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, supponiamo che $\nabla u(x_0, y_0) \neq 0$. Allora si ha

$$\nabla u(x,y) \neq 0 \tag{2.7}$$

per tutti i punti $(x,y)$ in un intorno $U$ sufficientemente piccolo di $(x_0, y_0)$.

Consideriamo ora la famiglia di curve (in $\mathbb{R}^2$) definita implicitamente, al variare di $k \in \mathbb{R}$, dall'equazione

$$v(x,y) = k.$$

Per le condizioni di Cauchy-Riemann (2.2), $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$ e $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{C}$. Conseguentemente, per la (2.7), $\nabla v(x,y) \neq 0$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

per ogni $(x,y) \in U$. Inoltre, per ogni $(x,y) \in U$,

$$\begin{aligned}\langle \nabla u(x,y), \nabla v(x,y) \rangle =& \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ =& \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0\end{aligned}$$

Questa identità, valida in tutti i punti di $U$, ci dice che se le curve $u(x,y) = c_1$ e $v(x,y) = k_1$ si incontrano in un punto $(x_1, y_1) \in U$, allora sono ivi mutuamente perpendicolari.

Vediamo una interpretazione fisica delle parti reali ed immaginaria di una funzione complessa.

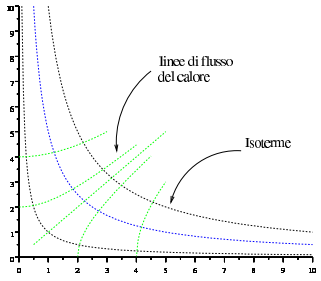



Figura 2.2: Esempio di propagazione del calore: caso stazionario

**Esempio 2.2.10.** Consideriamo, nel semipiano $y > 0$, i due rami di iperbole di equazioni $xy = 1$ e $xy = 5$. Supponiamo che nella parte $D$ di semipiano contenuta tra queste curve sia posto un conduttore di calore uniforme e isotropo, e che le due iperboli siano mantenute a temperatura costantemente uguale a $T_1$ e $T_2$ rispettivamente (condizioni al contorno). Supponiamo inoltre di aver raggiunto lo stato di equilibrio e che non vi siano altre fonti di calore. Come vedremo in seguito, se la funzione $u(x,y)$ rappresenta la temperatura nel punto $(x,y)$, allora si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0. \tag{2.8}$$

Per trovare la funzione $u$ che descrive la temperatura ricorriamo al seguente artificio: consideriamo la funzione complessa (ovviamente differenziabile) $f_{a,b}(z) = -iaz^2 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Scrivendo come al solito $z = x + iy$ e $f_{a,b}(z) = u_{a,b}(x,y) + iv_{a,b}(x,y)$, si ottiene $u_{a,b}(x,y) = 2axy + b$ e $v_{a,b}(x,y) = -a(x^2 - y^2)$. Per le (2.5) e (2.6), sia $u_{a,b}$ sia $v_{a,b}$ soddisfano la (2.8); si tratta di vedere se è possibile scegliere le **costanti** $a$ e $b$ in modo che siano soddisfatte le "condizioni al contorno". Per farlo, dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 2a + b = T_1 & (\text{cioè } u|_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy=1\}}(x,y) \equiv T_1) \\ 10a + b = T_2 & (\text{cioè } u|_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy=5\}}(x,y) \equiv T_2) \end{cases}$$

Otteniamo $a = (T_2 - T_1)/8$ e $b = (5T_1 - T_2)/4$. Allora la funzione,

$$u(x,y) = \frac{(T_2 - T_1)xy + 5T_1 - T_2}{4} = u_{a,b}(x,y)$$

è la funzione che rappresenta la temperatura in $D$. Le curve descritte implicitamente dall'equazione $u(x,y) = c$ sono le *isoterme* (corrispondenti alla temperatura $c$).

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Se poniamo

$$v(x,y) = -\frac{T_2 - T_1}{4}(x^2 - y^2) = v_{a,b}(x,y),$$

si ha che le curve descritte implicitamente dall'equazione $v(x,y) = k$ sono le *linee di flusso* del calore cioè quelle curve lungo cui è maggiore la variazione di temperatura. (Si veda la figura 2.2.)

## 2.3 Integrazione in $\mathbb{C}$

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo di estremi $a, b$ e $\gamma : I \to \Omega \subset \mathbb{C}$, una curva regolare a tratti. Per ogni $t \in I$ possiamo scrivere $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, con $\varphi$ e $\psi$ funzioni opportune. Data una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$, si può scrivere $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, con $u$ e $v$ funzioni opportune.

Supponiamo che $f$ sia continua. Definiamo l'integrale di $f$ lungo $\gamma$ come segue:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f \,\mathrm{d}z &\underset{\text{def.}}{=} \int_a^b u\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\varphi'(t) - v\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\psi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &\qquad + i\int_a^b v\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\varphi'(t) + u\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\psi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\Gamma P\cdot\,\mathrm{d}s + i\int_\Gamma Q\cdot\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

Dove $\Gamma$ è la curva di $\mathbb{R}^2$ data da $t \mapsto \big(\varphi(t),\psi(t)\big)$ e $Q$ e $P$ sono i campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$ dati da $(x,y) \mapsto \big(v(x,y),u(x,y)\big)$ e $(x,y) \mapsto \big(u(x,y),-v(x,y)\big)$ rispettivamente.[2]

**Esempio 2.3.1.** Sia $\gamma$ la circonferenza di centro l'origine e raggio 1. Calcoliamo $\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z$. Siccome $\gamma(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ per $0 \le \theta < 2\pi$, si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} (\cos\theta - i\sin\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta + i(\cos\theta - i\sin\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -(\cos\theta - i\sin\theta)\sin\theta + i(\cos\theta - i\sin\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} i\Big((\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\Big)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i\end{aligned}$$

Osserviamo che, analogamente al caso degli integrali di linea in $\mathbb{R}^n$, vale una proprieà di additività del dominio. Più precisamente, se $\gamma$ è la concatenazione delle

[2]Per capire euristicamente il motivo di questa definizione e per ricordare più facilmente il metodo di integrazione, moltiplichiamo formalmente $f = u + iv$ per $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y$. Si ottiene

$$f(z)\,\mathrm{d}z = (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i(v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y).$$

Allora, tenendo presente che $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ e $\mathrm{d}y = \psi'(t)\,\mathrm{d}t$, si ha $f(z)\,\mathrm{d}z = P\,\mathrm{d}s + iQ\,\mathrm{d}s$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

curve $\gamma_1$ e $\gamma_2$ (tenendo conto dell'orientazione) allora $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$.

**Esercizio 2.3.2.** Sia $\gamma$ una circonferenza di centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e raggio $r > 0$ percorsa in senso antiorario. Verificare che

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi i,$$

indipendentemente da $r$. (Suggerimento: Provare prima con $z_0 = 0$.)

Supponiamo che $f$ sia differenziabile in un aperto semplicemente connesso $\Omega \subset \mathbb{C}$. Dalla dimostrazione del Teorema 2.2.4 si vede che le formule di Cauchy-Riemann (2.2) sono valide in $\Omega$, e dunque i campi vettoriali $P$ e $Q$ definiti sopra sono conservativi.

Si ha allora che, se $\gamma$ è chiusa e contenuta in un dominio semplicemente connesso $\Omega \subset \mathbb{C}$ ed $f$ è differenziabile in $\Omega$, allora

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{2.9}$$

Si può dimostrare che questa formula vale anche se supponiamo $f$ continua in $\Omega$ e differenziabile in $\Omega$ eccettuati al più alcuni punti isolati (**Teorema di Morera**).

**Osservazione 2.3.3.** Osserviamo che la formula (2.9) implica che, data $f$ differenziabile in un dominio aperto $\Omega$,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Per ogni coppia di curve $\gamma$ e $\gamma_1$ contenute in $\Omega$ ed aventi gli stessi estremi (nello stesso ordine). In altre parole, se $\gamma$ è tutta contenuta in $\Omega$, $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ dipende solo dagli estremi di $\gamma$. Questo spesso è utile per semplificare i calcoli.

Nell'analisi reale il calcolo degli integrali è spesso facilitato dal teorema fondamentale del calcolo. In analisi complessa è possibile fare qualcosa di simile.

Data una funzione continua $f : \Omega \to \mathbb{C}$, diremo che una funzione $F$, differenziabile in $\Omega$, è una *primitiva* di $f$ se $F'(z) = f(z)$ per ogni $z \in \Omega$. Chiaramente, se $F$ è una primitiva, allora anche $F(z) + c$ lo è per ogni costante $c$.

Supponiamo che $F$ sia una primitiva della funzione continua $f$ e che $\gamma : [a, b] \to \Omega$ sia una curva regolare a tratti in $\Omega$. Scriviamo $f(z) = u(z) + iv(z)$ e $F(z) = U(z) + iV(z)$, allora per la (2.3) si ha

$$\frac{\partial U}{\partial x}(z) = u(z), \qquad \frac{\partial V}{\partial x}(z) = v(z). \tag{2.10}$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Scriviamo $\gamma(t) = \big(\phi(t), \psi(t)\big)$. Tenendo conto delle (2.10) e delle condizioni di Cauchy-Riemann (2.2) per la funzione $F$, si ha che nei punti in cui $\gamma$ è derivabile vale:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F\big(\gamma(t)\big) = \\ \frac{\partial U}{\partial x}\big(\gamma(t)\big)\phi'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}\big(\gamma(t)\big)\psi'(t) + i\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\big(\gamma(t)\big)\phi'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}\big(\gamma(t)\big)\psi'(t)\Big) \\ = u\big(\gamma(t)\big)\phi'(t) - v\big(\gamma(t)\big)\psi'(t) + i\Big(v\big(\gamma(t)\big)\phi'(t) + u\big(\gamma(t)\big)\psi'(t)\Big).\end{aligned}$$

Allora,

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F\big(\gamma(t)\big)\ \mathrm{d}t = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

Questa formula è utile nel caso in cui sia semplice determinare una primitiva della funzione integranda, tuttavia essa va usata con prudenza: a questo proposito si veda il successivo paragrafo 2.3.1.

**Esercizio 2.3.4.** Calcolare l'integrale $\int_\gamma ze^{z^2}\ \mathrm{d}z$, dove $\gamma$ è una qualunque curva che congiunge 0 con $1+i$.

Vediamo ora un tipo di ragionamento che spesso risulta utile nel calcolo di integrali lungo curve chiuse complicate.

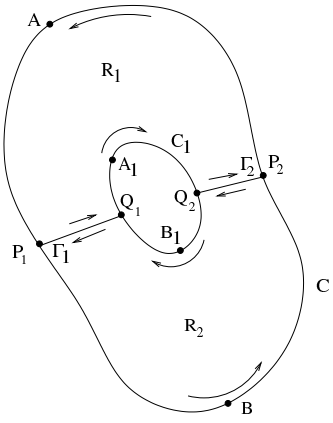



Figura 2.3: Integrazione su curve chiuse.

Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$, consideriamo due curve semplici chiuse $C$ c $C_1$ in $\Omega$ tali che $C_1$ sia racchiusa da $C$ e percorsa nello stesso senso. Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione differenziabile, allora

$$\int_{C_1} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_C f(z)\ \mathrm{d}z. \tag{2.11}$$

Nella figura a fianco, per esempio, si sono aggiunti i segmenti $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ in modo tale che, tenendo conto delle orientazioni, risulta

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z - \int_{C_1} f(z)\ \mathrm{d}z = \int\limits_{P_1\overset{\frown}{BP}_2B_1} f(z)\ \mathrm{d}z + \int\limits_{P_2\overset{\frown}{AP}_1A_1} f(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

L'ultima uguaglianza segue, per il teorema di Morera, dalla differenziabilità di $f$ nelle regioni $R_1$ ed $R_2$ racchiuse rispettivamente dalle curve (semplici) $P_2\overset{\frown}{AP}_1A_1$ e $P_1\overset{\frown}{BP}_2B_1$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

### 2.3.1 Formula di Cauchy.

Non sempre, data una funzione integranda $f$ esiste una primitiva nel senso definito sopra, si veda, ad esempio, l'esercizio 2.3.2.

**Teorema 2.3.5 (Formula integrale di Cauchy).** *Sia $f$ differenziabile in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e siano $z_0 \in \Omega$ e $\gamma$ il bordo di un disco chiuso tutto contenuto in $\Omega$ e contenente $z_0$ nel suo interno. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = f(z_0),$$

*dove $\gamma$ è percorsa in senso antiorario.*

*Dimostrazione.* Definiamo

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{se } z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{se } z = z_0. \end{cases}$$

Osserviamo che, poiché $f$ è differenziabile, $g$ è continua in $\Omega$ ed è differenziabile in $\Omega \setminus \{z_0\}$. Usando la (2.9) e l'esercizio 2.3.2, si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z =& \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \\ =& \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \frac{f(z_0)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = f(z_0).\end{aligned}$$

Come volevasi dimostrare. □

Da questo teorema discende che ogni funzione complessa differenziabile in un disco $D$ è ivi sviluppabile in serie di potenze, cioè è *analitica*.

**Teorema 2.3.6.** *Sia $f$ differenziabile nel disco aperto $D$ di raggio $\rho > 0$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$; allora $f$ è sviluppabile in serie di potenze in $D$, cioè esiste una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ tale che*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \textit{per ogni } z \in D.$$

*Dimostrazione.* Fissiamo $r$ positivo e minore di $\rho$. Sia $\gamma$ una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $r_1$ con $r < r_1 < \rho$. Per la formula di Cauchy, percorrendo la circonferenza in senso antiorario,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \quad \text{per } |z| \leq r.$$

Prendiamo $\zeta \in \gamma$, poiché $|z| < |\zeta|$ la funzione

$$\frac{1}{1-z/t}$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

si può sviluppare in serie di potenze. Si ottiene:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\,\frac{1}{1 - z/t} = \frac{1}{\zeta}\,\left(1 + \frac{z}{\zeta} + \ldots + \frac{z^n}{\zeta^n} + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}.$$

Da cui,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \quad \text{per } |z| \le r.$$

Poiché $|z| \le r$ e $|\zeta| = r_1 > r$ la serie sotto il segno di integrale converge uniformemente e quindi si può integrare termine a termine.[3] Posto

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta,$$

si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \text{per } |z| \le r.$$

Per l'arbitarietà di $r < \rho$ si ha la tesi. □

Il teorema appena dimostrato vale per un disco centrato nell'origine ma, chiaramente, è valido un risultato analogo per un qualunque disco aperto $D$ centrato in un punto $z_0 \in \mathbb{C}$. In tale caso si ottengono sviluppi della forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad \text{per } z \in D.$$

Viceversa, è ovvio che una funzione $f$ che sia rappresentata in $D$ da una serie di potenze è ivi differenziabile[4]. Dunque, le funzioni analitiche in $D$ sono tutte e sole quelle che sono differenziabili in $D$.

Quest'affermazione si può estendere agli aperti di $\mathbb{C}$. Pertanto **la classe delle funzioni differenziabili in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ coincide con quella delle funzioni analitiche in $\Omega$.**

**Osservazione 2.3.7.** Sia $h$ una funzione differenziabile in un intorno di $z_0 \in \mathbb{C}$. Supponiamo che $h(z_0) = 0$ ma che $h$ non sia identicamente nulla in quell'intorno. Allora non tutte le derivate di $h$ in $z_0$ saranno nulle. In altre parole esisterà $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$h(z_0) = h'(z_0) = h''(z_0) =, \ldots, = h^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad h^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

[3] Si usa un risultato di integrazione per serie analogo a quello noto nel campo reale.

[4] Si usa un risultato di derivazione per serie analogo a quello noto per le serie di potenze nel campo reale.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

(L'esponente "$(k)$" indica il $k$-simo ordine di derivazione.) Allora, in un intorno di $z_0$, si avrà

$$\begin{aligned} h(z) =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \\ =&(z-z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-k} = (z-z_0)^k \phi(z), \end{aligned}$$

dove

$$\phi(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-k}$$

è una funzione non nulla in un intorno di $z_0$. Si è dunque provato che **gli zeri delle funzioni differenziabili (non identicamente nulle) sono isolati**.

### 2.3.2 Il metodo dei residui

#### Singolarità

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e sia $f$ una funzione a valori complessi differenziabile in un intorno 'bucato' $\Omega \setminus \{z_0\}$ di $z_0$. Senza perdita di generalità si può sempre supporre che $f$ risulti definita anche in $z_0$. Se $f$ non è differenziabile in $z_0$, si dice che $z_0$ è una *singolarità* di $f$. Le singolarità possono essere di tre tipi.

**Singolarità eliminabili:** Si dice che $z_0$ è una *singolarità eliminabile* se $f$ può essere resa differenziabile in $\Omega$ cambiando il valore di $f$ in $z_0$ (soltanto).

**Poli:** Si dice che $f$ ha un *polo* di *ordine* $k$ in $z_0$ se esiste una funzione differenziabile $\phi$ in un intorno $\Omega'$ di $z_0$ tale che

$$(z-z_0)^k f(z) = \phi(z), \quad z \in \Omega \cap \Omega' \setminus \{z_0\},$$

e $\phi(z_0) \neq 0$.

**Singolarità essenziali:** Si dice che $z_0$ è una *singolarità essenziale* di $f$ se è una singolarità non eliminanabile che non è un polo.

**Osservazione 2.3.8.** Nel caso in cui $z_0$ sia una singolarità eliminabile, il limite di $f(z)$ per $z$ che tende a $z_0$ esiste. Per eliminare la singolarità, allora, è sufficiente modificare la funzione $f$ nel punto $z_0$: basta **definire**

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

**Osservazione 2.3.9.** Supponiamo che

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad z \in \Omega \setminus \{z_0\},$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

dove $h : \Omega \to \mathbb{C}$ e $g : \Omega \to \mathbb{C}$ sono funzioni differenziabili sull'aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Supponiamo che $h(z_0) = 0$ per qualche $z_0$ in $\Omega$. Per l'Osservazione 2.3.7, $z_0$ è uno zero isolato di $h$, inoltre, esiste un intorno $\Omega'$ di $z_0$, e due funzioni $\eta$ e $\gamma$ non nulle in $\Omega'$ tali che

$$h(z) = (z - z_0)^k \eta(z), \quad g(z) = (z - z_0)^m \gamma(z),$$

per opportuni interi $m \geq 0$, $k \geq 1$. (Ovviamente $m = 0$ e $\gamma = g$ se $g(z_0) \neq 0$.) Se $k \leq m$, allora $f$ ha al più una singolarità eliminabile in $z$. Invece, se $k > m$, allora risulta

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z - z_0)^m \gamma(z)}{(z - z_0)^k \eta(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^{k-m}} \frac{\gamma(z)}{\eta(z)} \\ &= \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^{k-m}}, \end{aligned} \qquad z \in \Omega \cap \Omega' \setminus \{z_0\},$$

con $\phi = \gamma(z)/\eta(z)$. In altre parole, per $k > m$, $z_0$ è un polo di ordine $k - m$.

**Esercizio 2.3.10.** Studiare le singolarità delle funzioni

$$\frac{z}{(z-1)^2}, \qquad \frac{z}{1 - \cos z}$$

### Il Teorema dei residui

Sia $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ una funzione differenziabile e sia $C \subset \Omega \setminus \{z_0\}$ una curva semplice e chiusa che circonda $z_0$. Data una qualunque curva semplice chiusa $C_1 \subset \Omega \setminus \{z_0\}$ circondata da $C$ orientata come $C$ e che a sua volta circonda $z_0$, dalla formula (2.11) si ottiene che

$$\int_{C_1} f(z)\, \mathrm{d}z = \int_C f(z)\, \mathrm{d}z. \tag{2.12}$$

Questo, dal momento che siamo liberi di scegliere $C_1$ anche molto vicina a $z_0$, mostra che $\int_C f(z)\, \mathrm{d}z$ dipende solo dai valori assunti da $f(z)$ per $z$ vicino a $z_0$.

Vediamo come questo fatto può essere sfruttato per calcolare l'integrale. Supponiamo che $z_0$ sia un polo *semplice* (cioè di ordine 1) e che $C_1$ sia una circonferenza di centro $z_0$ percorsa in senso antiorario e di raggio sufficientemente piccolo affinché essa risulti circondata da $C$. Definiamo

$$\phi(z) = \begin{cases} (z - z_0) f(z) & z \neq z_0 \\ \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{2.13}$$

Si osservi che $\phi$ è una funzione differenziabile in $\Omega$. Per la formula integrale di Cauchy

$$\phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\phi(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z,$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

quindi, per la (2.12) e (2.13),

$$2\pi i \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0)f(z)\right] = 2\pi i\phi(z_0)$$
$$= \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Cioè abbiamo ridotto, nel caso di poli semplici, il calcolo dell'integrale a quello di un limite.

Nel caso in cui $z_0$ sia un polo di ordine $k \geq 1$ si può dimostrare che vale la seguente formula:

$$\boxed{\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left[(z-z_0)^k f(z)\right].} \tag{2.14}$$

In generale, se $C$ è una curva semplice chiusa, percorsa in senso antiorario, che circonda una (sola) singolarità $z_0$ della funzione $f$, il numero

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z,$$

si chiama *residuo* di $f$ in $z_0$ e si indica con $\mathcal{R}_{z_0}(f)$. Dalla formula (2.11) segue che il residuo non dipende dalla scelta della curva $C$. La discussione relativa alla formula (2.14) mostra che, nel caso di un polo di ordine $k \geq 1$, si ha

$$\mathcal{R}_{z_0}(f) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left[(z-z_0)^k f(z)\right].$$

Purtroppo non esiste una formula analoga nel caso delle singolarità essenziali.

**Esercizio 2.3.11.** Calcolare il residuo in 0 di $1/\sin z$ e calcolare $\int_C 1/\sin z\,\mathrm{d}z$, dove $C$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio $\pi/2$ percorsa in senso orario. (*Suggerimento: Attenzione al segno.*)

Facendo uso dell'additività dell'integrale, si pu'o dimostrare il seguente teorema

**Teorema 2.3.12 (Teorema dei Residui).** *Sia $f : \Omega \setminus \{z_1,\ldots,z_n\} \to \mathbb{C}$ una funzione differenziabile, e sia $C \subset \Omega \setminus \{z_1,\ldots,z_n\}$ una curva semplice chiusa, percorsa in senso antiorario, che circonda $z_1,\ldots,z_n$. Allora,*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left[\mathcal{R}_{z_1}(f) + \cdots + \mathcal{R}_{z_n}(f)\right].$$

**Esercizio 2.3.13.** Calcolare

$$\int_C \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z,$$

dove $C$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 percorsa in senso antiorario.

**Esercizio 2.3.14.** Calcolare

$$\int_C \frac{z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z,$$

dove $C$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

### 2.3.3 Integrali impropri in $\mathbb{R}$

Il metodo dei residui è spesso utile per il calcolo di alcuni integrali impropri reali.

Se vogliamo calcolare l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x$$

con $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua (ma non è detto, in generale, che tale integrale esista), possiamo provare a ragionare come segue:

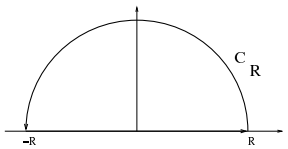


Figura 2.4: $\gamma_R$

1. Estendiamo, se possibile, $f$ ad una funzione $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ (cioè troviamo una $F$ tale che $F|_{\mathbb{R}} = f$) con le seguenti proprietà:

   (a) esistano $R_0 > 0$ ed $M > 0$ con la proprietà che $|F(z)| \le M/|z|^{1+\alpha}$, con $\alpha > 0$;

   (b) $F$ ammette un numero finito di poli nel semipiano superiore (parte immaginaria non negativa) $p_1,\dots,p_n$.

2. Consideriamo il cammino d'integrazione $\gamma_R$ composto dalla semicirconferenza $C_R$ contenuta nel semipiano superiore (parte immaginaria non negativa) centrata nell'origine con raggio $R$, e dal segmento (in $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$) di estremi $-R$ ed $R$ (vedere la figura 2.4). In questo modo, per la scelta di $F$, se $R$ è sufficientemente grande

$$\left|\int_{C_R} F(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi} F(Re^{it})Rie^{it}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{\pi}|F(Re^{it})|R\,\mathrm{d}t \le \int_0^{\pi}\frac{MR}{R^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi M}{R^{\alpha}},$$

   quindi $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} F(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Per la finitezza del numero di poli di $F$, se $R$ è sufficientemente grande, il Teorema dei residui ci dice che

$$2\pi i\sum_{i=1}^{n}\mathcal{R}_{p_i}(F) = \int_{\gamma_R} F(z)\,\mathrm{d}z.$$

3. Passando al limite per $R\to+\infty$ si ha,

$$2\pi i\sum_{i=1}^{n}\mathcal{R}_{p_i}(F) = \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} F(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to+\infty}\left[\int_{C_R} F(z)\,\mathrm{d}z + \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Il metodo appena descritto funziona bene se $f$ è una funzione razionale del tipo:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \begin{cases} \text{con } P \text{ e } Q \text{ polinomi privi di fattori comu-} \\ \text{ni, } Q(x) \neq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ e grado di } Q \\ \text{che supera di almeno 2 quello di } P. \end{cases}$$

In questo caso, per soddisfare il punto (1) basta prendere $F(z) = P(z)/Q(z)$. Allora, se $p_1, \ldots, p_n$ sono i poli di $F$ contenuti nel semipiano superiore, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}_{p_i}(F).$$

**Esempio 2.3.15.** Calcoliamo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$. I poli della funzione $F(z) = \frac{1}{1+z^2}$ sono $\pm i$ (sono poli semplici, cioè di ordine 1) di cui solo $i$ è contenuto nel semipiano superiore. Il residuo di $F$ in $i$ vale $1/(2i)$. Ne segue che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \pi.$$

**Esempio 2.3.16.** Calcoliamo $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\, \mathrm{d}x$, $a \in \mathbb{R}$. La funzione $F(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^2}$ ha due poli di ordine 2 in $\pm|a|i$, inoltre

$$\mathcal{R}_{|a|i}(F) = \frac{1}{4|a|^3 i}.$$

Ne segue che

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\, \mathrm{d}x = \frac{2\pi i \mathcal{R}_{|a|i}(F)}{2} = \frac{\pi}{4|a|^3}.$$

**Esercizio 2.3.17.** Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x+x^2}\, \mathrm{d}x$.

---

## Riferimenti ed approfondimenti

**Paragrafi 2.1 – 2.2:** [6, cap. 2], [7, capp. 1,2], [16, capp. 1,8].

**Paragrafo 2.3:** [3, cap. 8], [4, parte V, cap. 1], [6, capp. 3,4,5], [16, cap. 5] [18, cap. 9], [20, cap. 17]

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

# Capitolo 3

# Trasformazioni del piano complesso

In questo capitolo vedremo le funzioni complesse come trasformazioni di coordinate e ne studieremo il significato fisico dando particolare risalto all'interpretazione fluidodinamica.

## 3.1 Trasformazioni conformi

Le trasformazioni che conservano gli angoli (con la loro orientazione) sono dette *conformi*. è nota l'importanza di tali trasformazioni in cartografia. Noi ci limiteremo alle trasformazioni conformi tra aperti del piano complesso.

La prima domanda che dobbiamo porci è: "Che cosa è l'angolo tra due curve incidenti?" Siano $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ e $\beta : J \to \mathbb{R}^n$, con $I$ e $J$ intervalli, curve regolari incidenti in un punto $x_0 = \alpha(t_0) = \beta(s_0)$. L'angolo $\theta$ formato da $\alpha$ e $\beta$ nel punto $x_0$ è, per definizione, l'angolo formato dalle rette tangenti alle curve in $x_0$. Si ha pertanto

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(s_0)\rangle}{|\alpha'(t_0)||\beta'(s_0)|}.$$

Consideriamo ora il caso di due curve $\gamma : I \to \mathbb{C}$ e $\phi : J \to \mathbb{C}$ incidenti in $z_0 = \gamma(t_0) = \phi(s_0)$. Possiamo scrivere $\gamma(t) = u(t) + iv(t)$ e $\phi(s) = \xi(s) + i\eta(s)$. Identifichiamo $\gamma$ e $\phi$ rispettivamente con le curve di $\mathbb{R}^2$ date da $\Gamma : t \mapsto \big(u(t), v(t)\big)$ e $\Phi : s \mapsto \big(\xi(s), \eta(s)\big)$. Definiamo l'angolo formato da $\gamma$ e $\phi$ in $z_0 = x_0 + iy_0$ come l'angolo formato da $\Gamma$ e $\Phi$ nel punto $(x_0, y_0)$. Chiamiamo $\theta$ quest'angolo, si ha

$$\cos\theta = \frac{\langle \Gamma'(t_0), \Phi'(s_0)\rangle}{|\Gamma'(t_0)||\Phi'(s_0)|} = \frac{\mathrm{Re}\left(\gamma'(t_0)\overline{\phi'(s_0)}\right)}{|\gamma'(t_0)||\phi'(s_0)|} = \frac{\mathrm{Re}\left(\phi'(t_0)\overline{\gamma'(s_0)}\right)}{|\gamma'(t_0)||\phi'(s_0)|},$$

dove $\gamma'(t) = u'(t) + iv'(t)$ e $\phi'(s) = \xi'(s) + i\eta'(s)$.

Dal momento che $\sin\theta = \cos(\theta - \pi/2)$, si può definire

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{\langle((u'(t_0), v'(t_0)), (\eta'(s_0), -\xi'(s_0))\rangle}{|\Gamma'(t_0)||\Phi'(s_0)|} \\ &= -\frac{\operatorname{Im}\left(\gamma'(t_0)\overline{\phi'(s_0)}\right)}{|\gamma'(t_0)||\phi'(s_0)|} = \frac{\operatorname{Im}\left(\phi'(t_0)\overline{\gamma'(s_0)}\right)}{|\gamma'(t_0)||\phi'(s_0)|}.\end{aligned}$$

Supponiamo che le immagini delle due curve $\gamma$ e $\phi$ siano contenute in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$, e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione. La $f$ trasforma le curve $\gamma$ e $\phi$ rispettivamente in $f \circ \gamma : t \mapsto f\big(\gamma(t)\big)$ e $f \circ \phi : s \mapsto f\big(\phi(s)\big)$. Se $f$ è differenziabile in $z_0$, si ha

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0) \quad \text{e} \quad (f \circ \phi)'(t_0) = f'(z_0)\phi'(t_0).$$

**Teorema 3.1.1.** *Se $f'(z_0) \neq 0$ allora l'angolo in $z_0$ tra $\gamma$ e $\phi$ coincide con l'angolo formato in $f(z_0)$ dalle curve $f \circ \gamma$ e $f \circ \phi$.*

*Dimostrazione.* Indichiamo con $\Theta$ l'angolo formato in $f(z_0)$ dalle curve $f \circ \gamma$ e $f \circ \phi$ e con $\theta$ quello formato, in $z_0$, da $\gamma$ e $\phi$. Si ha

$$\begin{aligned}\cos\Theta &= \frac{\operatorname{Re}\left(f'(z_0)\gamma'(t_0)\overline{f'(z_0)\phi'(s_0)}\right)}{|f'(z_0)\gamma'(t_0)||f'(z_0)\phi'(s_0)|} = \frac{|f'(z_0)|^2 \operatorname{Re}\left(\gamma'(t_0)\overline{\phi'(s_0)}\right)}{|f'(z_0)|^2|\gamma'(t_0)||\phi'(s_0)|} = \cos\theta. \\ \sin\Theta &= -\frac{\operatorname{Im}\left(f'(z_0)\gamma'(t_0)\overline{f'(z_0)\phi'(s_0)}\right)}{|f'(z_0)\gamma'(t_0)||f'(z_0)\phi'(s_0)|} = -\frac{|f'(z_0)|^2 \operatorname{Im}\left(\gamma'(t_0)\overline{\phi'(s_0)}\right)}{|f'(z_0)|^2|\gamma'(t_0)||\phi'(s_0)|} = \sin\theta.\end{aligned}$$

Da cui segue la tesi. □

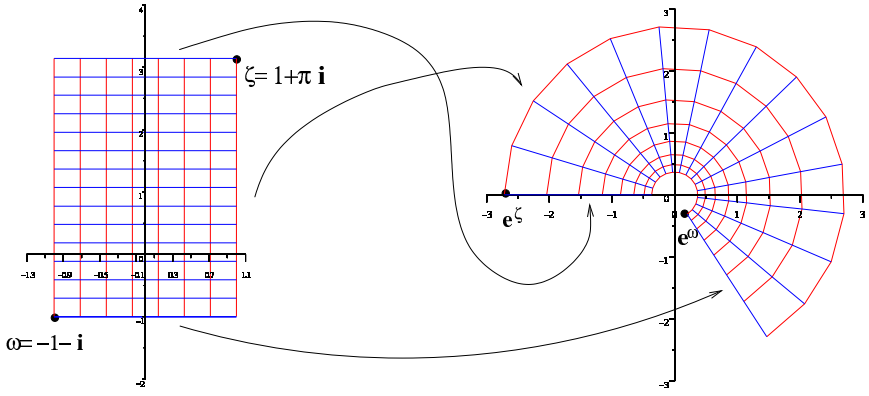



Figura 3.1: Rappresentazione della trasformazione $z \mapsto e^z$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

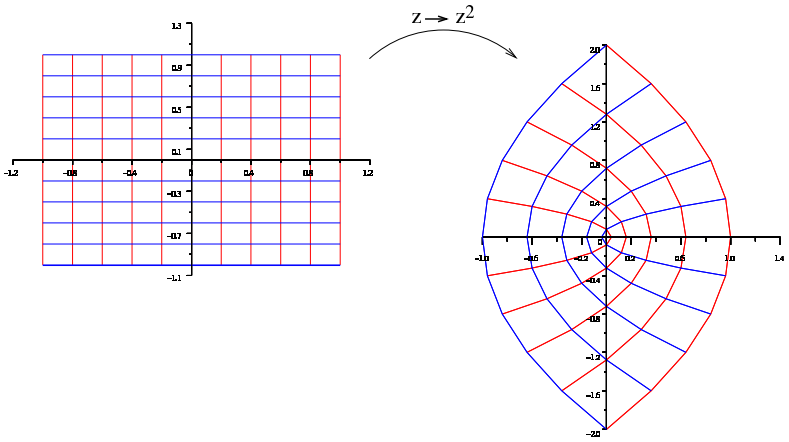



Figura 3.2: Rappresentazione della trasformazione $z \mapsto z^2$

Questo teorema ci dice che una funzione complessa differenziabile con derivata mai nulla è una mappa conforme. Osserviamo che questo non implica l'invertibilità di tali mappe. Infatti la mappa $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ data da $z \mapsto z^2$ non è né suriettiva né iniettiva. La stessa cosa si può dire di dell'applicazione $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $z \mapsto e^z$.

**Esercizio 3.1.2.** Determinare i punti corrispondenti nella figura 3.2.

**Osservazione 3.1.3.** Date due curve $\gamma$ e $\phi$ come sopra, l'angolo $\theta$ da esse formato nel punto $z_0 = \gamma(t_0) = \phi(s_0)$ può essere espresso anche nella forma

$$\theta = \arg\left(\gamma'(t_0)\right) - \arg\left(\phi'(s_0)\right) = \arg\left(\gamma'(t_0)\overline{\phi'(s_0)}\right). \tag{3.1}$$

Questa formula si giustifica facilmente osservando che $\arg\left(\gamma'(t_0)\right)$ e $\arg\left(\phi'(s_0)\right)$ rappresentano, rispettivamente, gli angoli formati da $\gamma'(t_0)$ e $\phi'(s_0)$ con la direzione dell'asse reale.

**Esempio 3.1.4.** Consideriamo la trasformazione $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $z \mapsto z^2$, determiniamo l'immagine della circonferenza in $\mathbb{C}$ centrata in 1 ed avente raggio 1. La circonferenza può essere parametrizzata mediante l'applicazione $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ data da $\varphi(t) = e^{it} + 1$. Pertanto la sua immagine sarà il supporto della curva $F \circ \varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, cioè $f\left(\varphi(t)\right) = e^{2it} + 2e^{it} + 1$. (Questa è una curva famosa: la *cardioide*. Si veda la figura 3.3(a).) Come si vede subito la trasformazione $F$ non è conforme nell'origine.

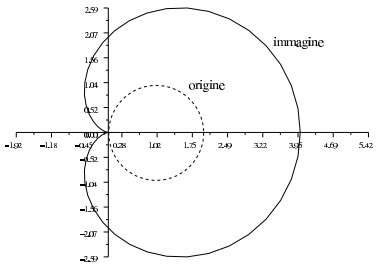
**Esempio 3.1.5.** Consideriamo la trasformazione $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $z \mapsto z^2$, determiniamo l'immagine del segmento di estremi $-1 + i$ e $1 + i$. Il segmento si può parametrizzare mediante la funzione $\varphi(t) = t + i$, $t \in [-1, 1]$. Pertanto la sua

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

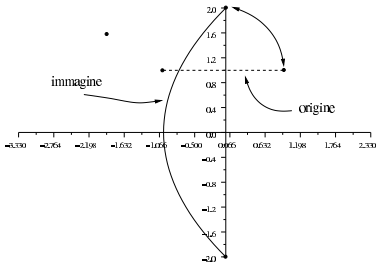
immagine sarà il supporto della curva $F(\varphi(t)) = t^2 - 1 + 2it$, $t \in [-1,1]$. Per identificare questa curva poniamo

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re} F(\varphi(t)) = t^2 - 1, \\ y(y) &= \operatorname{Im} F(\varphi(t)) = 2t. \end{aligned}$$

Eliminando $t$ tra queste due equazioni, si ottiene l'arco di parabola $x = y^2/4 - 1$ che unisce i due punti $F(-1+i) = -2i$ e $F(1+i) = 2i$. (Vedere la figura 3.3(b).)




(a) Immagine della circonferenza $t \mapsto e^{it} + 1$




(b) Immagine del segmento di estremi $-1+i$, $1+i$

Figura 3.3: Immagini secondo la trasformazione $z \mapsto z^2$.

**Esempio 3.1.6.** Consideriamo la trasformazione $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $z \mapsto z^2 + z$, poniamo ci la domanda: "In quali punti essa è conforme?"

Per rispondere, calcoliamo $F'(z) = 2z + 1$. Si ha $F'(z) = 0$ solo se $z = -1/2$, quindi $F$ è conforme in $\mathbb{C} \setminus \{-1/2\}$.

Che cosa si può dire riguardo a $z = -1/2$? Si consideri, per esempio, l'immagine della retta parallela all'asse immaginario e passante per il punto $z = -1/2$. Per calcolarla, consideriamo una sua parametrizzazione $t \mapsto it - 1/2$, $t \in \mathbb{R}$; l'immagine di questa parametrizzazione è $t \mapsto 1/4 - t^2 - it + it - 1/2 = -1/4 - t^2$ che è una semiretta contenuta nell'asse reale. Siccome anche l'immagine secondo $F$ dell'asse reale è un sottoinsieme di $R$, si ha che $F$ non può essere conforme in $z = -1/2$.

**Osservazione 3.1.7.** La trasformazione $T : z \mapsto \bar{z}$, sebbene **non** sia conforme, ha la proprietà di conservare il valore assoluto degli angoli (ma di invertirne il segno).

Per vederlo, prendiamo due curve $\gamma$ e $\phi$ incidenti, come sopra, nel punto $z_0 = \gamma(t_0) = \phi(s_0)$. Sia $\theta$ l'angolo da esse formato in $z_0$ e sia $\Theta$ l'angolo formato, in $\overline{z_0}$,

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

dalle loro immagini secondo $T$, $\overline{\gamma}$ e $\overline{\phi}$. Dalla (3.1) si ottiene

$$\begin{aligned}\Theta &= \arg\left(\overline{\gamma'(t_0)}\ \overline{\overline{\phi'(s_0)}}\right) = \arg\left(\overline{\gamma'(t_0)}\phi'(s_0)\right)\\ &= -\arg\left(\gamma'(t_0)\overline{\phi'(s_0)}\right) = -\theta,\end{aligned}$$

che dimostra quanto affermato.

Le trasformazioni che, come $z \mapsto \bar{z}$, conservano la grandezza (il valore assoluto) degli angoli si chiamano *isogonali*. è chiaro che le trasformazioni conformi sono isogonali.

### 3.1.1 Alcune trasformazioni particolari

Osserviamo che una qualunque retta nel piano complesso può essere rappresentata mediante l'equazione

$$\bar{A}\bar{z} + Az + B = 0, \quad A \in \mathbb{C},\ B \in \mathbb{R}.$$

Infatti, posto $A = a + ib$ e $z = x + iy$, si ha $\bar{A}\bar{z} + Az + B = 2(ax - by) + B$.

Analogamente, si verifica che una qualunque circonferenza in $\mathbb{C}$ può essere rappresentata mediante un'equazione della forma

$$Cz\bar{z} + \bar{A}\bar{z} + Az + B = 0, \quad A \in \mathbb{C},\ B, C \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Osserviamo che la (3.2) rappresenta una circonferenza solo se $C \neq 0$. Se, viceversa, $C = 0$ la circonferenza 'degenera' in una retta. Per questo motivo l'equazione (3.2) è detta del *cerchio generalizzato*. Osserviamo inoltre che se $C = 0$ la circonferenza passa per l'origine.

#### Trasformazioni lineari e inversioni

Dato $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la trasformazione $z \mapsto wz$, è chiaramente conforme. Si vede subito che consiste in una rotazione attorno all'origine di angolo $\arg w$ composta con una dilatazione di fattore $|w|$. Infatti, posto $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e $wz = \zeta = \xi + i\eta$ si ha

$$\zeta = |w|\big(x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta)\big),$$

cioè

$$\begin{cases} \xi = |w|\big(x\cos\theta - y\sin\theta\big), \\ \eta = |w|\big(x\sin\theta + y\cos\theta\big). \end{cases}$$

Dati $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $c \in \mathbb{C}$, le trasformazioni del tipo $z \mapsto wz + c$ sono dette *lineari*. Chiaramente, queste trasformazioni, oltre ad essere conformi, hanno la proprietà di mandare figure geometriche in figure simili.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

La trasformazione $z \mapsto 1/z$ è detta *inversione*. Questa è una trasformazione conforme in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, inoltre sostituendo $z = 1/\zeta$ nella (3.2) si ottiene

$$Bz\bar{z} + \bar{A}\bar{z} + Az + C = 0,$$

da cui segue che l'inversione trasforma cerchi che non passano per l'origine in cerchi, cerchi che passano per l'origine in rette, rette che passano per l'origine in rette che passano per l'origine, e rette che non passano per l'origine in cerchi.

Osserviamo che l'inversione lascia fisso il cerchio di raggio 1 centrato nell'origine e che scambia i punti interni con quelli esterni.

Dati $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ la trasformazione $z \mapsto \mathcal{B}_{A,B,C,D}(z)$ con

$$\mathcal{B}_{A,B,C,D}(z) \underset{\text{def.}}{=} \frac{Az + B}{Cz + D},$$

è detta *bilineare* o di *Möbius*. Osserviamo che se $C = 0$ questa è semplicemente una trasformazione lineare. Se viceversa $C \neq 0$ possiamo scrivere

$$\frac{Az + B}{Cz + D} = \frac{A}{C} + \frac{B - AD/C}{Cz + D}.$$

Quindi $\mathcal{B}_{A,B,C,D}(z)$ è la composizione delle seguenti trasformazioni (in quest'ordine):

$$z \mapsto \zeta_1 \underset{\text{def.}}{=} Cz + D, \quad \zeta_1 \mapsto \zeta_2 \underset{\text{def.}}{=} 1/\zeta_1, \quad \zeta_2 \mapsto \left(B - \frac{AD}{C}\right)\zeta_2 + \frac{A}{C}.$$

Osserviamo che, se $AD - BC = 0$, l'ultima di questa catena di trasformazioni porta tutto il piano complesso in un punto. Se supponiamo $AD - BC \neq 0$ abbiamo che $\mathcal{B}_{A,B,C,D}(z)$ trasforma cerchi generalizzati in cerchi generalizzati. Chiameremo *non singolari* le trasformazioni bilineari per cui vale questa disuguaglianza.

Si può provare facilmente la seguente affermazione:

**Proposizione 3.1.8.** *La composizione di due trasformazioni bilineari è ancora una trasformazione bilineare. Inoltre, date due trasformazioni bilineari $\mathcal{B}_{A,B,C,D}$ e $\mathcal{B}_{E,F,G,H}$, i coefficienti trasformazione composta $\mathcal{B}_{a,b,c,d} = \mathcal{B}_{A,B,C,D} \circ \mathcal{B}_{E,F,G,H}$ sono i coefficienti della matrice prodotto*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

*Conseguentemente, $\mathcal{B}_{a,b,c,d}$ è non singolare se e soltanto se $\mathcal{B}_{A,B,C,D}$ e $\mathcal{B}_{E,F,G,H}$ $ad - bc \neq 0$ lo sono.*[1]

[1] è una conseguenza del fatto che

$$ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = (AD - BC)(EH - FG).$$

(A causa del *Teorema di Binet*.)

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Osserviamo che, in conseguenza della proposizione 3.1.8, data una trasformazione bilineare non singolare $\mathcal{B}_{A,B,C,D}$ si ha che

$$z \mapsto \frac{Dz - B}{-Cz + A}$$

è una trasformazione bilineare (non singolare) che inverte $\mathcal{B}_{A,B,C,D}$.

Una trasformazione bilineare non singolare è univocamente determinata dai valori assunti in tre punti distinti. Più precisamente, si può provare che vale la seguente affermazione.

**Proposizione 3.1.9.** *Dati $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ e $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$, con $z_i \neq z_j$ e $w_i \neq w_j$ per $i, j = 1, 2, 3$ e $i \neq j$, esiste un'unica trasformazione bilineare che, per $i = 1, 2, 3$, porta $z_i$ in $w_i$.*

**Esempio 3.1.10.** Troviamo la trasformazione bilineare che porta $-1$ in $-1$, $0$ in $i$ e $1$ in $1$. Imponendo che la trasformazione operi come richiesto, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 1 = \frac{A+B}{C+D}, \\ i = \frac{B}{D}, \\ -1 = \frac{-A+B}{-C+D}. \end{cases}$$

Da cui segue $A = D$, $B = iD$ e $C = iD$. Scegliendo, per esempio, $D = 1$ si ottiene la trasformazione

$$z \mapsto i\,\frac{z+i}{i-z}.$$

## 3.2 Potenziale complesso

Dobbiamo fare una convenzione: Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, con $I$ un intervallo, una curva regolare; denotiamo con $\vec{n}(t)$ quel versore che, nel punto $\gamma(t)$, forma un angolo retto *positivo*[2] con il vettore tangente $\gamma'(t)$. In altre parole, se $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$, si ha

$$\vec{n}(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\big(-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t)\big).$$

Osserviamo che $\gamma$ può essere interpretata, come una curva a valori in $\mathbb{C}$; in questo caso, indicato con $\vec{T}(t)$ il versore tangente a $\gamma$ in $\gamma(t)$ dato da $\gamma'(t)/|\gamma'(t)|$, si ha $\vec{n}(t) = -i\vec{T}(t)$.

Consideriamo un 'flusso' stazionario (cioè indipendente dal tempo) nell'aperto semplicemente connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, cioè un campo vettoriale $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^2$. (Il campo $\vec{v}(x, y)$ può essere interpretato, per esempio, come la velocità delle particelle di un fluido nel punto $(x, y) \in \Omega$).

Supponiamo che il campo $\vec{v}$ descriva il moto di un fluido incomprimibile e che in $\Omega$ non vi siano né sorgenti né pozzi. Allora, il flusso che attraversa un qualunque

[2] "Angolo retto positivo" significa un angolo di $\pi/2$ misurato nel senso antiorario.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

arco di curva, non dipende dalla forma della curva ma solo dai suoi estremi.[3] In particolare, se fissiamo un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ si può definire su $\Omega$ una funzione **a valori reali** $\Psi$, detta *funzione di flusso*, come segue:

$$\Psi(x,y) = \int_\gamma \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle \, \mathrm{d}s,$$

dove $\gamma$ è una qualunque curva (contenuta in $\Omega$) che congiunge $(x_0, y_0)$ con $(x, y)$ (in quest'ordine). Osserviamo che questa definizione è ben data per l'indipendenza del flusso dalla scelta di una particolare curva $\gamma$.

Osserviamo che la funzione $\Psi$ risulta necessariamente costante lungo le linee di flusso di $\vec{v}$, infatti gli spostamenti lungo una linea di flusso non danno contributo all'integrale che definisce $\Psi$ (perché il prodotto scalare è nullo). Quindi **le linee di flusso di $\vec{v}$ sono le linee di livello della funzione di flusso.**

Scriviamo $\vec{v}(x,y) = \big(v_1(x,y), v_2(x,y)\big)$, si può dimostrare che

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y) = -v_1(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,y) = v_2(x,y). \tag{3.3}$$

Assumiamo che il campo $\vec{v}$ sia irrotazionale, cioè che

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial v_2}{\partial x}(x,y) = 0 \quad \text{per ogni } (x,y) \in \Omega.$$

Dal momento che abbiamo supposto $\Omega$ semplicemente connesso, $\vec{v}$ è conservativo. Definiamo un'altra funzione a valori reali, detta *potenziale di velocità*, come segue:

$$\Phi(x,y) = -\int_\phi \vec{v} \cdot \mathrm{d}\phi,$$

dove $\phi$ è una qualunque curva (contenuta in $\Omega$) che congiunge $(x_0, y_0)$ con $(x, y)$ (in quest'ordine). Osserviamo che, come sopra, questa definizione è ben data per l'indipendenza del flusso dalla particolare scelta di $\phi$. Chiaramente $\Phi(x,y)$ rappresenta il lavoro del campo $\vec{v}$ relativo allo spostamento da $(x_0, y_0)$ a $(x, y)$. Si ha

$$\nabla \Phi(x,y) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y), \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) \right) = -\big(v_1(x,y), v_2(x,y)\big), \tag{3.4}$$

cioè $\Phi$ è il potenziale del campo $\vec{v}$.

Mettendo insieme le condizioni (3.3) e (3.4), si ottiene

$$-v_1(x,y) = \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) \quad \text{e} \quad v_2(x,y) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y).$$

[3] Per vederlo, osserviamo per prima cosa che il flusso attraverso una qualunque curva chiusa deve essere zero perché il fluido non può accumularsi (o rarefarsi) al suo interno. Da questo segue che, date due curve $\gamma_1$ e $\gamma_2$ con gli stessi estremi (nello stesso ordine), il flusso attraverso la curva chiusa ottenuta concatenando $\gamma_1$ con $-\gamma_2$ (cioè $\gamma_2$ percorsa al contrario) deve essere nullo. L'additività dell'integrale che definisce il flusso, tenendo conto del verso di percorrenza (e quindi del verso di $\vec{n}$), dimostra che il flusso attraverso le due curve è lo stesso.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Quindi, scrivendo $z = x + iy$, la funzione

$$f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann e pertanto è differenziabile. La funzione $f$ così definita si chiama *potenziale complesso* del flusso.

Osserviamo che, assegnato un potenziale complesso, è sempre possibile risalire al campo di velocità $\vec{v}$. Infatti,

$$f'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y)$$

e dunque per le (3.3) e (3.4),

$$v_1(x, y) + iv_2(x, y) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) = -\overline{f'(z)},$$

quindi $\vec{v}(x, y) = -\left(\operatorname{Re}\overline{f'(z)}, \operatorname{Im}\overline{f'(z)}\right)$.

**Esempio 3.2.1 (Flusso uniforme).** Sia $\alpha$ un numero reale, consideriamo il potenziale complesso $f(z) = \alpha z$. Le linee di flusso sono rette parallele all'asse reale (con orientazione opposta); $\alpha$ è detta *forza* del flusso. Più in generale, se $w$ è un numero complesso, $f(z) = wz$ è il potenziale complesso di un flusso uniforme di forza $|w|$ le cui linee di flusso formano l'angolo (orientato) $\pi - \arg w$ con l'asse reale. (Si veda la figura 3.4(a).)

Sia $f$ una funzione complessa definita su un dominio $\Omega$ non (necessariamente) semplicemente connesso. Se $f$ è differenziabile, restringendosi a sottodomini semplicemente connessi, possiamo continuare a vedere la sua parte reale come una funzione di flusso e la sua parte immaginaria come un potenziale di velocità.

**Esempio 3.2.2 (Sorgenti e pozzi puntuali).** Consideriamo $f(z) = \frac{\alpha}{2\pi} \ln z$ con $\alpha$ un numero reale. In questo caso, la parte reale di $f(z)$ è $\frac{\alpha}{2\pi} \ln |z|$, mentre la sua parte immaginaria è $\frac{\alpha}{2\pi} \arg(z)$. Si verifica subito che le linee di flusso sono le semirette uscenti dall'origine.[4]

Dal momento che stiamo considerando fluidi incomprimibili, il flusso attraverso una qualunque curva semplice e chiusa che racchiude l'origine è uguale a quello attraverso una circonferenza $C$ centrata nell'origine ed è dato esattamente da $\alpha$ (basta scrivere l'integrale che dà il flusso).

Se $\alpha$ è positivo allora vuole dire che il fluido scaturisce dall'origine con un tasso $\alpha$; in questo caso l'origine è una *sorgente* avente intensità $\alpha$. Se $\alpha$ è negativo il fluido viene assorbito dall'origine con tasso $\alpha$; in tale caso si dice che l'origine è un *pozzo* avente intensità $\alpha$. (Si veda la figura 3.4(b).)

[4]Si osservi che $f$ può essere considerata un potenziale complesso in ogni sottoinsieme semplicemente connesso $\Omega$ del piano bucato $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ a patto che in $\Omega$ sia scelta un'opportuna determinazione del logaritmo.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

**Esempio 3.2.3 (Vortice puntuale).** Consideriamo $f(z) = -\frac{i\beta}{2\pi}\ln z$ con $\beta$ un numero reale (si veda la nota relativa all'esempio precedente). In questo caso, la parte reale di $f(z)$ è $\frac{\beta}{2\pi}\arg(z)$, mentre la sua parte immaginaria è $-\frac{\beta}{2\pi}\ln|z|$. Si nota subito che le linee di flusso sono circonferenze centrate nell'origine. Si può verificare che il flusso attraverso una qualunque curva chiusa che non racchiude l'origine è nullo mentre la circuitazione lungo una qualunque curva semplice chiusa che racchiude l'origine è $\beta$. Questo tipo di flusso è chiamato *vortice* puntuale di intensità $\beta$. (Si veda la figura 3.4(c).)

Sommare i potenziali complessi equivale a sovrapporre gli effetti di flussi più semplici.

**Esempio 3.2.4 (Dipolo).** Dato $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, consideriamo il flusso dato da una sorgente in $a$ e di un pozzo in $-a$ di uguale intensità $\alpha$. Il potenziale complesso è allora

$$f(z) = \frac{\alpha}{2\pi}\ln(z-a) - \frac{\alpha}{2\pi}\ln(z+a).$$

Facciamo ora avvicinare la sorgente ed il pozzo (facendo tendere $a \to 0$) in modo tale da mantenere costante il prodotto $\mu \underset{\text{def.}}{=} 2a\alpha$. Si può scrivere

$$f(z) = -\frac{\mu}{4\pi}\,\frac{\ln(z+a) - \ln(z-a)}{a}. \tag{3.5}$$

Prendiamo il limite del membro destro della (3.5) per $a \to 0$. Si può dimostrare che si ottiene

$$-\frac{\mu}{2\pi z}.$$

Questo è il potenziale complesso di un *dipolo*. (Si veda la figura 3.4(d).)

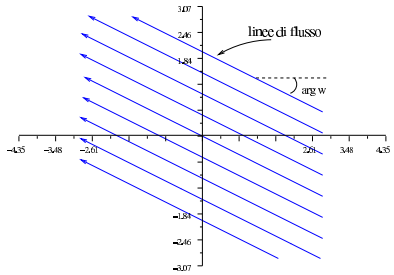
è utile osservare che se $\vec{v}$ è il campo di velocità corrispondente ad un potenziale complesso $f$ dato, allora $f$, vista come mappa di $\Omega$ in $\mathbb{C}$, trasforma le linee di flusso di $\vec{v}$ in quelle di un flusso uniforme (si veda l'esempio 3.2.1). Il motivo è che le linee di flusso di $\vec{v}$ sono le curve di livello di $\operatorname{Re} f$.

Un problema che si pone in fluidodinamica è quello di determinare il moto di un fluido che scorre in un piano attorno ad un ostacolo in modo tale che il flusso lontano dall'ostacolo sia uniforme con velocità $\alpha$. Una possibile soluzione è cercare un potenziale complesso della forma

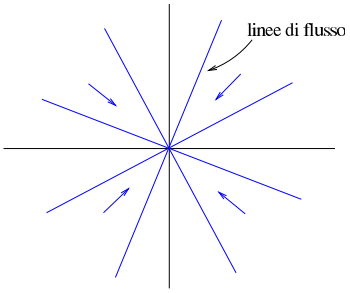
$$f(z) = \alpha z + g(z),$$

con $\lim_{|z|\to\infty} g'(z) = 0$ e tale che le linee di flusso attorno all'ostacolo siano aderenti al bordo. La condizione sul limite di $g'$, fisicamente, significa che lontano dall'ostacolo la velocità ha modulo "vicino" alla costante $\alpha$. La seconda condizione significa che il flusso deve mantenersi tangente agli ostacoli. Questo spesso è d'aiuto per determinare il potenziale complesso. (Si veda anche l'esempio 3.2.5.)

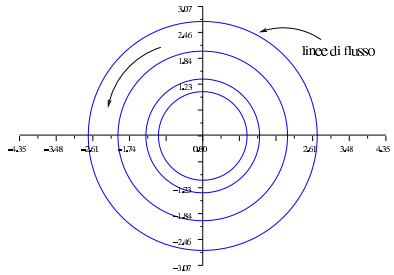
Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003



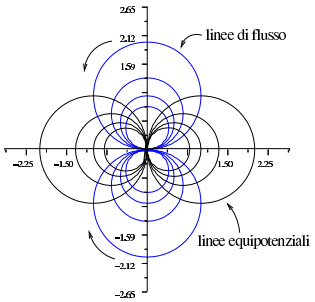

(a) Flusso uniforme ($w = 1 + 0.5i$)




(b) Pozzo ($\alpha < 0$)




(c) Vortice ($\beta = 2\pi$)




(d) Dipolo ($\mu = \pi$)

Figura 3.4: Alcuni flussi particolari.

**Esempio 3.2.5.** Consideriamo il potenziale complesso $f(z) = z + 1/z$ definito nel semipiano $\operatorname{Im} z \geq 0$ privato del semidisco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. La figura 3.5 mostra (a sinistra) le linee di flusso corrispondenti a $f$. La funzione $f$ trasforma le linee di flusso in quelle di un flusso uniforme in un semipiano. Le linee di flusso a sinistra si possono interpretare come quelle di un fluido in moto in un semipiano che incontra un ostacolo semicircolare (centrato nell'origine). Osserviamo che $f$ fa corrispondere quelle particolari linee di flusso che rappresentano i "vincoli fisici" (cioè il bordo del semipiano e dell'ostacolo) a cui è sottoposto il fluido.[5]

[5]Si tratta, in questo caso di curve che non sono vere e proprie linee di flusso, infatti non sono curve regolari. Ciononostante, le continueremo a chiamare in questo modo a causa del loro significato fisico. La condizione di tangenza del flusso sarà da intendersi valida in tutti i punti del bordo in cui esiste la tangente.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

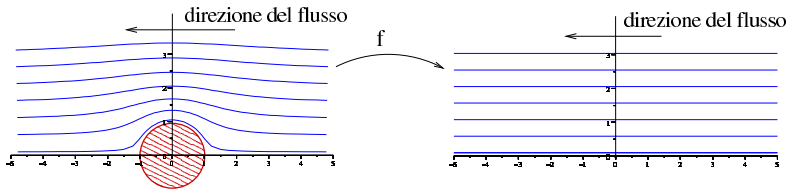



Figura 3.5: Linee di flusso per il potenziale complesso $f(z) = z + \frac{1}{z}$; $f$ trasforma le linee di flusso in quelle di un flusso uniforme

**Esempio 3.2.6.** Consideriamo un flusso uniforme di potenziale $wz$, $w \in \mathbb{C}$ ed inseriamo un ostacolo circolare di raggio $r$ centrato nell'origine. Si può provare che il potenziale è dato da $wz + r^2\bar{w}/z$. Sovrapponendo al flusso un vortice nell'origine di forza $2\pi\kappa$, il potenziale complesso diventa

$$f(z) = wz + \frac{r^2\bar{w}}{z} + i\kappa \log z = ve^{i\theta}z + \frac{vr^2e^{-i\theta}}{z} + i\kappa \log z,$$

dove si è posto $w = ve^{i\theta}$. La figura 3.6 rappresenta le linee di flusso associate a questo potenziale.

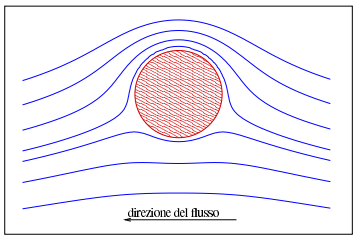



Figura 3.6: Linee di flusso per il potenziale dell'Esempio 3.2.6 con $v = r = \kappa = 1$.

## 3.3 Trasformazione di Joukowski

Consideriamo la funzione $J : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ data da

$$J(z) = z + \frac{\lambda^2}{z},$$

con $\lambda$ un numero reale. La funzione $J$ è detta *trasformazione di Joukowski*.

**Esercizio 3.3.1.** Verificare che, scrivendo $z = x + iy$,

$$J(z) = \left(1 + \frac{\lambda^2}{x^2 + y^2}\right) x + i \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2 + y^2}\right) y.$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Osserviamo che $J$ è differenziabile in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e si ha

$$J'(z) = 1 - \frac{\lambda^2}{z^2}.$$

Cosicché $J'(z) = 0$ se e solo se $z = \pm\lambda$. Questo, per il Teorema 3.1.1, implica che $J$ è una trasformazione conforme per ogni $z \neq \pm\lambda$, pertanto non applicheremo la trasformazione $J$ a regioni che contengono questi punti nel loro interno, anche se essi potranno appartenere alla frontiera.

Consideriamo una circonferenza di raggio $r > \lambda$ centrata nell'origine, e determiniamone l'immagine secondo la trasformazione $J$. Scriviamo la circonferenza parametrizzandola nella forma

$$t \mapsto re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Posto $\zeta = J(z)$, la parametrizzazione dell'immagine è

$$\begin{aligned} t \mapsto J\left(re^{it}\right) &= re^{it} + \frac{\lambda^2}{re^{it}} \\ &= r(\cos t + i \sin t) + \frac{\lambda^2}{r(\cos t + i \sin t)} \\ &= \frac{r^2(\cos t + i \sin t) + \lambda^2(\cos t - i \sin t)}{r} \\ &= \frac{r^2 + \lambda^2}{r} \cos t + i \frac{r^2 - \lambda^2}{r} \sin t, \end{aligned} \tag{3.6}$$

quindi l'immagine di una circonferenza di raggio $r > \lambda$, centrata nell'origine, è un'ellisse con fuochi in $\pm\lambda$.

**Esercizio 3.3.2.** Dimostrare che i fuochi dell'ellisse $t \mapsto J\left(re^{it}\right)$, $t \in [0, 2\pi)$, sono proprio i punti $\pm\lambda$.
*(Ricordando la definizione elementare di ellisse, far vedere che*

$$\left|J\left(re^{it}\right) - \lambda\right| + \left|J\left(re^{it}\right) + \lambda\right|$$

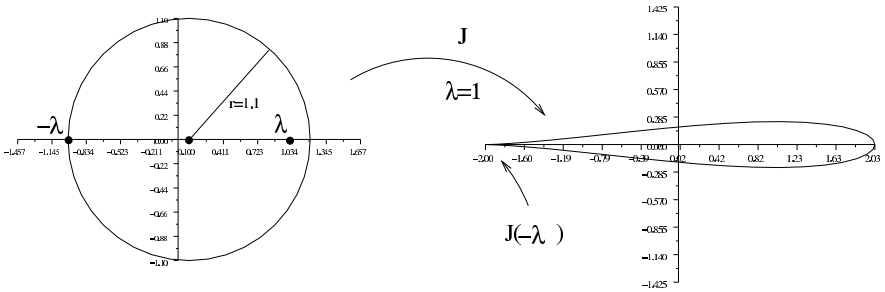
*è costante)*

**Esercizio 3.3.3.** Quale è l'immagine della circonferenza centrata nell'origine di raggio $\lambda$?

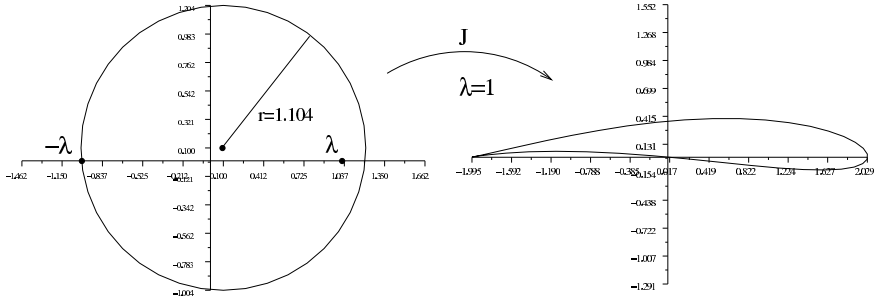
Di particolare interesse è la trasformazione $J$ applicata ad una circonferenza passante per $-\lambda$ e che racchiude $\lambda$. Si ottengono delle particolari curve chiuse, dette *profili di Joukowski*, molto utili in aerodinamica (si veda la figura 3.7).

**Esercizio 3.3.4.** Scrivere una parametrizzazione dell'immagine di una circonferenza centrata in $a + ib$, con $a \geq 0$ e $b \geq 0$, passante per $-\lambda$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003




(a) $\lambda = 1$, centro in 0.1




(b) $\lambda = 1$, centro in $0.1 + 0.1i$

Figura 3.7: Immagini, secondo la trasformazione di Joukowski di circonferenze passanti per $-\lambda$ e racchiudenti $\lambda$

Consideriamo l'immagine di una circonferenza centrata sull'asse reale, con raggio $r > \lambda$, passante per $-\lambda$. Invece di scriverne esplicitamente una parametrizzazione, come abbiamo fatto nel caso di una circonferenza centrata nell'origine, limitiamoci a qualche considerazione geometrica. Osserviamo intanto che si ha simmetria dell'immagine rispetto all'asse reale. Valutiamone le dimensioni. L'immagine secondo $J$ di $-\lambda$ è ovviamente $-2\lambda$. L'immagine di $2r - \lambda$ (cioè dell'intersezione della circonferenza con l'asse reale) è

$$2r - \lambda + \frac{\lambda^2}{2r - \lambda},$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

per cui la lunghezza del profilo è

$$2r + \lambda + \frac{\lambda^2}{2r - \lambda}.$$

Una stima **superiore** dello spessore del profilo si può ottenere osservando che il profilo deve essere contenuto nell'immagine del cerchio centrato nell'origine e avente raggio $\rho = 2r - \lambda$. Dalla (3.6) si ottiene che lo spessore è minore di

$$2\frac{\rho^2 - \lambda^2}{\rho} = 4r - 2\lambda - \frac{2\lambda^2}{2r - \lambda}.$$

Da considerazioni geometriche si intuisce che questa stima è "buona" se $(r - \lambda)/\lambda$ è piccolo.

### 3.3.1 Flusso attorno ad un profilo di Joukowski

Consideriamo un flusso uniforme di potenziale $z \mapsto ve^{i\theta}z$, con $v > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$ dati, ed inseriamo un ostacolo con la forma di un profilo di Joukowski. Per calcolare il flusso risultante, consideriamo il flusso incidente con un ostacolo circolare, come nell'esempio 3.2.6 ed applichiamo a questo una trasformazione di Joukowski.

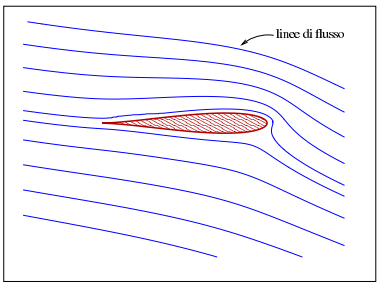



Figura 3.8: Linee di flusso per $r = 1$, $v = 1$, $\theta = \pi/12$, $s = 0.1$ e $\lambda = 0.9$

Se l'ostacolo circolare è centrato nel punto $s \in \mathbb{C}$, il potenziale complesso del flusso incidente con questo assume la forma

$$f(z) = ve^{i\theta}z + \frac{vr^2e^{-i\theta}}{z - s}.$$

Supponiamo $|s| < r$ e applichiamo la trasformazione di Joukowski $J_\lambda(z) = z + \lambda^2/z$ con $\lambda$ tale che $|\lambda + s| = r$. Il profilo dell'ostacolo circolare si trasforma in un profilo di Joukowski e le linee di flusso si trasformano nelle linee di flusso cercate. Tuttavia, la velocità del flusso in corrispondenza dello "spigolo" del profilo di Joukowski può risultare indefinita. Infatti il potenziale complesso di quest'ultimo flusso (definito in $\mathbb{C}$ privato dell'ostacolo) è dato da $F(z) = f\left(J_\lambda^{-1}(z)\right)$. Per cui, posto $z = J_\lambda(\zeta)$,

$$F'(z) = f'(\zeta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}J_\lambda^{-1}(z) = \frac{f'(\zeta)}{J'_\lambda(\zeta)} = \frac{f'(\zeta)\zeta^2}{\zeta^2 - \lambda^2}.$$

Si ha perciò che la derivata di $F$ può risultare non definita quando $\zeta$ assume i valori $\pm\lambda$; l'unico punto del dominio di $F$ per cui ciò accade è $z = J_\lambda(-\lambda)$, cioè lo "spigolo" del profilo. Intuitivamente, questo significa che, a meno che lo spigolo

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

non sia un punto stazionario del flusso (cioè con velocità relativa del fluido nulla), le particelle del fluido devono "svoltare bruscamente" per poter seguire il profilo.

Nei fluidi reali, in cui c'è un po' di viscosità, questo fenomeno non può verificarsi. In effetti, la presenza della viscosità provoca la nascita di un moto vorticoso attorno all'ostacolo. Per studiare questo fenomeno, consideriamo il flusso dell'Esempio 3.2.6 supponendo che sia l'ostacolo circolare sia il vortice siano centrati in $s \in \mathbb{C}$. Il potenziale complesso del flusso è dato da

$$\phi(z) = ve^{i\theta}z + \frac{vr^2e^{-i\theta}}{z-s} + i\kappa \log(z-s).$$

Applicando, come sopra, la trasformazione $J_\lambda(z) = z + \lambda^2/z$, con $\lambda$ tale che $|\lambda + s| = r$, si trovano le linee del flusso incidente con il profilo di Joukowski. Il potenziale complesso di questo flusso è $\Phi(z) = \phi\big(J_\lambda^{-1}(z)\big)$. Determiniamo la forza del flusso in modo tale che la velocità del fluido in corrispondenza dello spigolo del profilo sia definita. Poiché

$$\Phi'(z) = \phi'(\zeta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}J_\lambda^{-1}(z) = \frac{\phi'(\zeta)\zeta^2}{\zeta^2 - \lambda^2},$$

l'unica possibilità è che per $-\lambda = \zeta$ risulti $\phi'(\zeta) = 0$. Cerchiamo $\kappa$ della forma $\kappa = 2rv\sin\beta$, si ha:

$$\phi'(\zeta) = ve^{i\theta} + \frac{2irv\sin\beta}{\zeta - s} - \frac{vr^2e^{-i\theta}}{(\zeta-s)^2} = v\left(e^{i\theta} + \frac{re^{i\beta}}{\zeta - s}\right)\left(1 - \frac{re^{-i(\theta+\beta)}}{\zeta - s}\right).$$

Allora, se si vuole che la velocità del flusso sia nulla nello spigolo, deve essere

$$re^{i\beta} = e^{i\theta}(\lambda + s) \quad \text{oppure} \quad -re^{-i\beta} = (\lambda + s)e^{i\theta}. \tag{3.7}$$

Poiché $e^{i(\pi-\beta)} = -e^{-i\beta}$, è sufficiente risolvere una sola delle (3.7).

Nella figura 3.8 sono rappresentate le linee di flusso corrispondenti alla scelta del più piccolo angolo $\beta$ soddisfacente le (3.7).

---

## Riferimenti ed approfondimenti

**Paragrafi 3.1 e 3.2** [7, cap. 7], [9, cap. 3], [16, cap. 8], [18, cap. 8], [20, cap. 17].

**Paragrafo 3.3:** [9, cap. 6], [10, cap. 7 §40].

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

# Capitolo 4

# Introduzione alle equazioni alle derivate parziali

## 4.1 Generalità sulle equazioni alle derivate parziali

Un'equazione alle derivate parziali (EDP) di ordine $n$ può essere vista come una relazione del tipo

$$F\left(x_1,\dots,x_m,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_m},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{n-1}\partial x_2},\dots,\frac{\partial^n u}{\partial x_m^n}\right)=0, \tag{4.1}$$

dove $u:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ è la funzione incognita delle variabili indipendenti $x_1,\dots,x_m$. Una funzione "sufficientemente regolare" che sostituita insieme alle sue derivate parziali nella (4.1), renda tale relazione vera identicamente in un aperto $U$ di $\mathbb{R}^m$ è detta soluzione della (4.1) in $U$.

C'è da notare che non tutte le derivate parziali devono necessariamente apparire in una equazione alle derivate parziali, si pensi a quelle viste nel capitolo precedente.

Conviene essere più precisi sulla regolarità richiesta ad una soluzione. **Noi richiederemo che $u$ sia continua assieme a tutte le sue derivate fino all'ordine $n$, cioè che $u$ sia di classe $C^n$.** Tale definizione è però troppo restrittiva per alcune applicazioni. In realtà, lo spazio di funzioni in cui si cerca la soluzione dipende dal problema in esame; per esempio, potremmo limitarci a richiedere che $u$ sia continua assieme a tutte le sue derivate che compaiono esplicitamente nell'equazione.

**Notazione.** Per brevità, conviene adottare una notazione un po' più compatta per le derivate parziali. Data $u:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ scriveremo per esempio $u_{x_i}(x_1,\dots,x_m)$ invece di $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_m)$ e $u_{x_ix_j}(x_1,\dots,x_m)$ al posto di $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x_1,\dots,x_m)$.

**Esempio 4.1.1.** Data una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, consideriamo l'equazione alle derivate parziali $u_x(x,t)=f(t)$. Supponiamo di essere interessati al problema di determinarne le soluzioni che soddisfano $u(0,t)=\sin t$.

Per ottenere una soluzione integriamo entrambe i membri rispetto a $x$. Si ottiene $u(x,t) = f(t)x + g(t)$. Imponendo la condizione $u(0,t) = \sin t$, si ottiene $g(t) = \sin t$. Quindi $u(x,t) = f(t)x + \sin t$.

**Esempio 4.1.2.** Data una funzione $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione alle derivate parziali $u_{xt}(x,t) = f(x,t)$. Per determinarne alcune soluzioni integriamone entrambe i membri successivamente rispetto a $t$ e ad $x$. Integrando rispetto a $t$ si ottiene

$$u_x(x,t) = \int_{t_0}^{t} f(x,\tau)\ \mathrm{d}\tau + g(x) = F(x,t) + g(x)$$

dove $F(x,t) = \int_{t_0}^{t} f(x,\tau)\ \mathrm{d}\tau$. Integrando rispetto ad $x$, si ottiene

$$u(x,t) = \int_{x_0}^{x} F(\xi,t) + g(\xi)\ \mathrm{d}\xi + h(t).$$

**Esercizio 4.1.3.** Cercare le soluzioni di $u_{xt} = t$ che soddisfano $u(x,0) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 4.1.4.** Dati $a, b \in \mathbb{R}$ costanti, trovare le soluzioni di $au_x + bu_t = 0$ soddisfacenti $u(x,0) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. *Suggerimento: usare le sostituzioni*

$$\xi(x,t) = bx + at, \quad \eta(x,t) = bx - at, \quad \omega\big(\xi(x,t), \eta(x,t)\big) = u(x,t).$$

*Si ottiene* $u_x = b(\omega_\xi + \omega_\eta)$ *e* $u_t = a(\omega_\xi - \omega_\eta)$ *e l'equazione di partenza si riduce a* $\omega_\xi = 0$.

In quanto segue saremo particolarmente interessati alle *equazioni lineari*. La (4.1) è detta *lineare* se si ha $F = H - f$ con $H$ lineare rispetto a $u$ ed alle derivate di $u$ che vi compaiono, ed $f$ dipendente solo da $x_1, \ldots, x_n$. Se $f = 0$, la (4.1) è detta *lineare omogenea*. La $H$ è la *parte omogenea* mentre la $f$ è il termine noto della (4.1).

### 4.1.1 Un esempio: soluzioni radiali dell'equazione di Laplace

Consideriamo, in $\mathbb{R}^n$, l'equazione

$$u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n} = 0 \tag{4.2}$$

(detta *equazione di Laplace*. A causa della simmetria di quest'equazione cerchiamo, tra tutte le possibili soluzioni, quelle *radiali* cioè quelle che dipendono solamente dalla distanza dall'origine. In altre parole, siamo interessati alle soluzioni della forma $u(x_1, \ldots, x_n) = v(r)$ con $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Si ha, per $i = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_i}{r} \quad (x_1, \ldots, x_n) \neq 0.$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Scrivendo $u(x_1,\dots,x_n)=v(r)$, si ottiene

$$u_{x_i}(x_1,\dots,x_n)=v'(r)\frac{x_i}{r},$$
$$u_{x_ix_i}(x_1,\dots,x_n)=v''(r)\frac{x_i^2}{r^2}+v'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right),$$

per $i=1,\dots,n$. Da cui segue

$$\sum_{k=1}^{n}u_{x_kx_k}(x_1,\dots,x_n)=v''(r)+\frac{n-1}{r}v'(r).$$

Quindi, dalla (4.2) segue

$$v''(r)+\frac{n-1}{r}v'(r)=0$$

Risolvendo questa equazione differenziale (ordinaria) si trovano, a seconda della dimensione $n$, due famiglie di soluzioni:

| $n=2$ | $n\geq 3$ |
|---|---|
| $a\ln r+b$ | $\dfrac{a}{r^{n-2}}+b$ |

con $a$ e $b$ costanti.

## 4.2 Alcune equazioni provenienti dalla fisica

Prendiamo in esame qualche esempio di equazioni alle derivate parziali provenienti dalla fisica ed i principali problemi ad esse associati. Per maggiore semplicità cercheremo sempre soluzioni $C^2$ definite su un aperto di $\mathbb{R}^n$ assumendo che esse siano (almeno) di classe $C^1$ in un intorno della chiusura di tale aperto.

### 4.2.1 Equazione di continuità

Sia $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ limitato e racchiuso da una superficie $\Gamma$ regolare. La variazione della massa di un sistema materiale (per es. un fluido) che occupa $\Omega$ deve essere uguale alla quantità di massa che attraversa $\Gamma$. Esprimiamo questo concetto matematicamente. Sia $\rho(x,y,z,t)$ la densità di massa nel punto $(x,y,z)$ al tempo $t$ e sia $m(t)$ la massa contenuta in $\Omega$ all'istante $t$. Ovviamente

$$m(t)=\int_\Omega \rho(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

conseguentemente[1]

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t)=\int_\Omega \frac{\partial\rho}{\partial t}(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

[1]Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Ora, sia $v(x,y,z,t)$ il campo di velocità al tempo $t$ del sistema materiale che occupa $\Omega$ (si può pensare ad esempio ad un fluido composto di tantissime particelle materiali; in tale caso $v(x,y,z,t)$ è la velocità della particella che all'istante $t$ occupa la posizione $(x,y,z)$). Il tasso di variazione della massa in $\Omega$ è uguale alla velocità con cui il sistema materiale entra o esce attraverso $\Gamma$, cioè è uguale al flusso di $v$ attraverso $\Gamma$. Ovvero[2]

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t) = -\int_\Gamma \rho(x,y,z,t)\langle v(x,y,z,t), n(x,y,z)\rangle \ \mathrm{d}S$$

dove $n(x,y,z)$ rappresenta la normale a $\Gamma$ uscente da $\Omega$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è il prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$. Per ogni $t$ fissato, per il teorema della divergenza quest'ultimo integrale è uguale a[3]

$$\int_\Omega \mathrm{div}\left(\rho(x,y,z,t)v(x,y,z,t)\right) \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z.$$

Ne segue che

$$\int_\Omega \left\{ \frac{\partial\rho}{\partial t}(x,y,z,t) - \mathrm{div}\left(\rho(x,y,z,t)v(x,y,z,t)\right) \right\} \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z = 0.$$

L'arbitrarietà di $\Omega$ implica che deve valere

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,y,z,t) - \mathrm{div}\left(\rho(x,y,z,t)v(x,y,z,t)\right) = 0, \tag{4.3}$$

che è anche detta *equazione di continuità*.

Se il sistema materiale considerato è un fluido incomprimibile (cioè tale che $\rho$ è costante) allora l'equazione di continuità si riduce a

$$\mathrm{div}\left(v(x,y,z,t)\right) = 0$$

### 4.2.2 L'equazione della corda vibrante

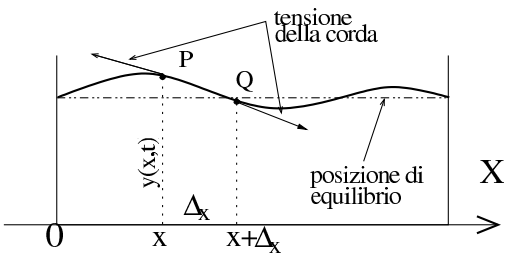
Consideriamo un sistema meccanico costituito da una fune leggera, flessibile tesa tra due punti fissati che compia delle oscillazioni piccole rispetto alla posizione di equilibrio. In particolare, facciamo le seguenti ipotesi semplificatorie:

1. Non c'è gravità, resistenza dell'aria o altro fattore smorzante del moto.
2. Il moto avviene in un piano.
3. I punti della corda si muovono su linee rette perpendicolari alla linea retta che corrisponde alla posizione di equilibrio.
4. Il movimento di ogni punto, in confronto alla lunghezza della corda è piccolo.
5. In ogni punto della corda l'angolo tra la corda e la linea di equilibrio è piccolo.

[2] è un integrale superficiale!

[3] La divergenza del campo vettoriale $v$ è data da $\mathrm{div}(v) = v_x + v_y + v_z$; nel nostro caso $t$ è considerato fissato.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003




Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\{x, y\}$ con l'asse $x$ coincidente con la posizione di equilibrio della corda. Il moto della corda risulterà quindi completamente descritto da una funzione $y(x,t)$ che esprime l'ordinata al tempo $t$ del punto di ascissa $x$. In questo modo, l'ipotesi (4) significa che $y(x,t)$ è piccolo, mentre la (5) significa che $y_x(x,t)$ è piccolo. Le ipotesi (4) e (5) prese insieme implicano che la tensione $F$ della corda può essere considerata costante.

Siano $P$ e $Q$ due punti di ascissa rispettivamente $x$ e $x+\Delta_x$. e siano $\varphi$ e $\varphi+\Delta_\varphi$ gli angoli formati dalla corda con la direzione dell'asse $x$ nei punti $P$ e $Q$. Siano inoltre $x+\theta\Delta_x$, $0 \le \theta \le 1$, la posizione del centro di massa dell'arco $\overset{\frown}{PQ}$ e $M$ la sua massa. Per l'ipotesi (5) $M$ può essere approssimata con $\rho\Delta_x$.

La forza (esercitata dalla corda) agente nel punto $Q$ in direzione $y$ ha intensità $F\sin(\varphi+\Delta_\varphi)$ mentre quella agente nel punto $P$ ha intensità $F\sin(\varphi)$. Di conseguenza, la forza agente sull'arco $\overset{\frown}{PQ}$, tenendo conto della direzione è $F\big(\sin(\varphi+\Delta_\varphi)-\sin(\varphi)\big)$. L'accelerazione del centro di massa dell'arco $\overset{\frown}{PQ}$ è data da $y_{tt}(x+\theta\Delta_x,t)$. Applicando le leggi della dinamica al moto del centro di massa, si ha

$$\rho\Delta_x y_{tt}(x+\theta\Delta_x,t) = F\big(\sin(\varphi+\Delta_\varphi)-\sin(\varphi)\big). \tag{4.4}$$

Per l'ipotesi (5), $\sin(\varphi)$ può essere sostituito con $\tan(\varphi)$ che, a sua volta, può essere approssimata da $y_x(x,t)$. Considerazioni analoghe possono essere fatte per $\sin(\varphi+\Delta_\varphi)$ e $y_x(x+\Delta_x,t)$. Con queste considerazioni l'equazione (4.4) diventa:

$$\begin{aligned}\rho\Delta_x y_{tt}(x+\theta\Delta_x,t) =& F\big(y_x(x+\Delta_x,t)-y_x(x,t)\big)\\ =& F\Delta_x y_{xx}(x,t)\end{aligned}$$

Dividendo per $\Delta_x$ e facendo tendere $\Delta_x \to 0$. Si ottiene

$$y_{tt}(x,t) = c^2 y_{xx}(x,t) \tag{4.5}$$

dove $c^2 = \frac{F}{\rho} > 0$.

L'equazione (4.5) è un importante rappresentante di quella famiglia di equazioni del secondo ordine note come *equazioni iperboliche*. Essa è un caso particolare della cosiddetta *equazione delle onde* in $\mathbb{R}^n$

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = f(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{4.6}$$

che descrive molti fenomeni ondulatori.

Consideriamo per esempio le vibrazioni di una membrana elastica omogenea che in 'posizione di riposo' occupa una regione $\Omega$ del piano $xy$, con contorno $\partial\Omega$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

soggetta alla forza tempo-dipendente $f(t,x,y)$. Allora, con opportune unità di misura, la funzione $u(t,x,y)$ che rappresenta la forma della membrana in dipendenza dal punto e dal tempo soddisfa la (4.6).

Tipici problemi che si possono porre in relazione alla (4.6) sono i seguenti (scriviamoli **a titolo puramente esemplificativo** nel caso di due sole variabili spaziali):

**Problema di Cauchy-Dirichlet** Si cerca una soluzione di (4.6) che soddisfi

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y,0)=h(x,y), \\ u_t(x,y,0)=k(x,y), \end{array}\right\} \quad (x,y)\in\Omega, \tag{4.7}$$

$$u(x,y,t)=\phi(x,y,t), \quad (x,y)\in\partial\Omega, \quad t>0 \tag{4.8}$$

dove $h$, $k$ e $\varphi$ sono funzioni assegnate. Nel caso in cui $\partial\Omega=\emptyset$ la condizione (4.8) ovviamente scompare. Per esempio, per la (4.5) nel caso di lunghezza infinita della corda il problema assume la forma

$$\left\{\begin{array}{l} y_{tt}(x,t)=c^2y_{xx}(x,t), \\ u(x,0)=h(x), \\ u_t(x,0)=k(x), \end{array}\right.$$

con $h$ e $k$ funzioni assegnate.

**Problema di Cauchy-Neumann** Si cerca una soluzione dell'equazione (4.6) che soddisfi la condizione (4.7) ed in più, invece di assegnare per ogni istante la posizione del bordo come nella (4.8) fissiamo la derivata nella direzione normale $n$ al bordo in ogni istante, cioè sostituiamo la (4.8) con la *condizione di Neumann*:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t)=\psi(x,y,t) \quad (x,y)\in\partial\Omega, \quad t>0, \tag{4.9}$$

dove $n$ è un versore normale a $\partial\Omega$ e $\psi$ è una funzione assegnata.

### 4.2.3 Equazione del calore (o di diffusione)

Consideriamo il problema della conduzione del calore in una sbarretta (1-dimensionale) omogenea e isotropa. Supponiamo per fissare le idee che la sbarretta sia disposta lungo l'asse $x$. Se $u(x,t)$ rappresenta la temperatura all'istante $t$ nel punto di ascissa $x$, $k$ è la conduttività termica, $c$ il calore specifico e $\rho$ la densità, allora la funzione $u$ soddisfa l'equazione

$$\frac{c\rho}{k}u_t(x,t)=u_{xx}(x,t).$$

Questa equazione è un rappresentante della famiglia di equazioni del secondo ordine dette *paraboliche*. è un caso particolare della cosiddetta *equazione di diffusione* in $\mathbb{R}^n$

$$u_t-\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}=f(t,x_1,\ldots,x_n). \tag{4.10}$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Questa equazione descrive, con un'opportuna scelta delle unità di misura, la diffusione di calore in un corpo omogeneo e isotropo, in questo caso $f$ rappresenta la quantità di calore per unità di volume prodotta o sottratta da una sorgente (positiva o negativa) presente nel corpo. La (4.10) può anche rappresentare la diffusione di un fluido in un dato ambiente in questo caso $u$ rappresenta la densità del fluido e $f$ è, come sopra, un termine di sorgente.

I problemi tipici che si pongono per la (4.10) sono (ci limitiamo per semplicità ed **a titolo puramente esemplificativo** al caso di tre sole variabili spaziali):

**Problema di Cauchy-Dirichlet** Assumiamo che un dato corpo occupi la regione $\Omega$ dello spazio. Conoscendo la temperatura all'istante iniziale di tutti i punti di $\Omega$, e conoscendo in ogni istante ($t > 0$) quale è la temperatura dei punti del bordo, si vuole conoscere la temperatura dei punti di $\Omega$ per ogni $t > 0$. Cioè si cerca una soluzione di (4.10) che soddisfi

$$u(x, y, z, 0) = h(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega, \tag{4.11}$$
$$u(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega, \quad t > 0 \tag{4.12}$$

dove $h$ e $\varphi$ sono funzioni assegnate. Nel caso in cui $\partial\Omega = \emptyset$, per esempio se $\Omega = \mathbb{R}^3$ la condizione (4.8) ovviamente scompare.

**Problema di Cauchy-Neumann** Assumiamo che un dato corpo occupi la regione $\Omega$ dello spazio. Conoscendo la temperatura all'istante iniziale di tutti i punti di $\Omega$, e conoscendo in ogni istante ($t > 0$) la quantità di calore scambiata tra il corpo e l'ambiente in ogni punto di $\partial\Omega$, si vuole conoscere la temperatura dei punti di $\Omega$ per ogni $t > 0$. Si cerca cioè una soluzione dell'equazione (4.10) che soddisfi la condizione (4.11) e (al posto della (4.12))

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z, t) = \psi(x, y, z, t) \quad (x, y, z) \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{4.13}$$

dove $n$ è un versore normale a $\partial\Omega$ e $\psi$ è una funzione assegnata. (Questa si chiama: *condizione di Neumann*.)

### 4.2.4 Equazioni di Laplace e di Poisson

Consideriamo in $\mathbb{R}^n$ l'operatore differenziale $\Delta u \mapsto \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$. L'equazione di Poisson può essere scritta come segue:

$$\Delta u = f(x_1, \ldots, x_n). \tag{4.14}$$

La sua versione omogenea (cioè con $f = 0$):

$$\Delta u = 0$$

è detta equazione di Laplace. L'equazione (4.14) è un tipico rappresentante della classe delle equazioni del secondo ordine note come *ellittiche*.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Abbiamo già visto, nel caso di due sole variabili, una situazione in cui l'equazione di Laplace si presenta naturalmente (si veda pagina 13). Solitamente le equazioni di Laplace e Poisson rappresentano dei fenomeni stazionari.

Consideriamo, ad esempio un corpo omogeneo e isotropo che occupa una regione $\Omega$ dello spazio $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che in $\Omega$ siano presenti delle sorgenti (positive o negative) di calore e che $f$, rappresentante la quantità di calore prodotta o assorbita per unità di volume in ogni punto del corpo, sia indipendente dal tempo. Allora la distribuzione del calore in $\Omega$, con un'opportuna scelta delle unità di misura, obbedisce all'equazione (4.14).

Un altro esempio, stavolta in due sole dimensioni spaziali, è il seguente: Consideriamo una membrana elastica omogenea che in posizione di riposo occupa la regione $\Omega$ del piano $xy$. Se $f(x,y)$ rappresenta la forza per unità di superficie applicata in direzione verticale (rispetto al piano $xy$) nel punto di coordinate $(x,y)$, la membrana si incurverà assumendo la forma $z = u(x,y)$. Sotto opportune ipotesi e con un'opportuna scelta delle unità di misura $u$ obbedisce all'equazione (4.14).

Usiamo la situazione descritta in quest'ultimo esempio per introdurre i due problemi che si incontrano più frequentemente nell'ambito delle equazioni ellittiche. Anche qui, per semplicità ed **a titolo puramente esemplificativo** considereremo solo il caso di due dimensioni spaziali.

**Problema di Dirichlet** Supponiamo che una membrana elastica omogenea sia fissata al sostegno di una curva chiusa $\Gamma : I \mapsto \mathbb{R}^3$, $I$ un intervallo. Assumiamo inoltre che sulla membrana agisca una forza diretta lungo l'asse $z$; sia $f$ la forza per unità di superficie. Vogliamo conoscere la forma assunta dalla membrana.

Se indichiamo con $\gamma$ la curva nel piano $xy$ su cui si proietta $\Gamma$ ed indichiamo con $\Omega$ la regione di piano racchiusa da $\gamma$, per risolvere il problema dobbiamo cercare una soluzione di (4.14) in $\Omega$ che soddisfi

$$u\big(\xi(s),\eta(s)\big) = \zeta(s), \quad s \in I, \tag{4.15}$$

dove $\Gamma(s) = \big(\xi(s),\eta(s),\zeta(s)\big)$. Spesso la (4.15) viene scritta come segue:

$$u = \zeta, \quad \text{su } \partial\Omega$$

che è chiaramente equivalente.

**Problema di Neumann** Consideriamo una membrana elastica su cui agisce una forza $f$ come nel problema di Dirichlet. Assumiamo che il bordo della membrana non sia fissato ma libero di scorrere verticalmente e sia sottoposto all'azione di una forza di densità lineare $\psi$ diretta verticalmente. Per determinare le posizioni di equilibrio, **se esistono**, si deve trovare una soluzione della (4.14) che soddisfi

$$\frac{\partial u}{\partial n}\big(\xi(s),\eta(s)\big) = \psi(s) \quad s \in I, \tag{4.16}$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

dove $n$ è un versore normale a $\partial\Omega$. Questa, che si chiama *condizione di Neumann*, è spesso scritta nella forma equivalente:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \psi, \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Se $u$ è sufficientemente regolare e la curva $\gamma$ è assegnata nella forma implicita $g(x,y) = 0$, la condizione (4.16) si può chiaramente scrivere:

$$\langle \nabla u, \nabla g \rangle = \psi \quad \text{in ogni punto di } \partial\Omega.$$

## 4.3 Principio di sovrapposizione

I problemi studiati fino qui, ed altri che vedremo più avanti, sono esempi di *problemi lineari*, nel senso che sia l'equazione sia le condizioni supplementari (condizioni iniziali, condizioni al bordo) sono lineari.

Il cosiddetto principio di sovrapposizione è uno strumento molto utile per il calcolo delle soluzioni nel caso di problemi **lineari**. Per illustrarlo, vediamo una notazione che permette di unificare tutti i problemi lineari. Una volta fissato lo spazio $X$ di funzioni in cui cercare le soluzioni e lo spazio $Y$ in cui sono assegnati i dati ed il 'termine noto' dell'equazione[4], tutti i problemi lineari possono essere schematizzati come segue:

**L'equazione** si può scrivere nella forma $\Lambda u = f$, dove $\Lambda : X \to Y$ è l'operatore lineare che rappresenta la parte omogenea dell'equazione e $f$ è il termine noto. Per esempio, nel caso dell'equazione (4.5), $\Lambda u = u_{tt} - c^2 u_{xx}$ e $f = 0$.

**Le condizioni supplementari** (supponiamo ve ne siano $r$) si possono scrivere nella forma

$$\begin{aligned} L_1 u &= \phi_1, \\ &\vdots \\ L_r u &= \phi_r, \end{aligned}$$

dove $L_i : X \to Y$, $I = 1, \dots r$, sono operatori lineari e $\phi_1, \dots, \phi_r \in Y$ sono i dati. Per esempio, per il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione (4.10) le condizioni sono due: (4.11) e (4.12). Queste si possono scrivere rispettivamente $L_1 u = \phi_1$ e $L_2 u = \phi_2$ con $L_1 u(x,y,z,t) = u(x,y,z,0)$, $\phi_1 = h$, $L_2 u = u|_{\partial\Omega}$ e $\phi_2 = \varphi$.

[4] Nel nostro caso $X = C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $Y = C^0((\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ma, in generale, si possono cercare soluzioni ed assegnare condizioni anche in altri spazi, per esempio di funzioni meno regolari.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Conviene rappresentare in un'unica equazione sia l'equazione $\Lambda u = f$ che le condizioni supplementari. Per farlo introduciamo l'operatore lineare

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \Lambda \\ L_1 \\ \vdots \\ L_r \end{pmatrix} \qquad \text{ed il vettore} \quad \Phi = \begin{pmatrix} f \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_r \end{pmatrix}$$

Ogni problema lineare si può scrivere nella forma $\mathcal{L}u = \Phi$, con un'opportuna scelta degli operatori $\Lambda, L_1, \ldots, L_r$ e degli elementi $f, \phi_1, \ldots, \phi_r$.

La linearità dell'operatore $\mathcal{L}$ fa si che se $u^1$ e $u^2$ sono soluzione dei problemi $\mathcal{L}u = \Phi_1$ e $\mathcal{L}u = \Phi_2$ rispettivamente, allora, dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha u^1 + \beta u^2$ è soluzione del problema $\mathcal{L}u = \alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2$. In altre parole gli effetti dei dati iniziali si sommano (sovrappongono) nella soluzione. Questo fatto è noto come *principio di sovrapposizione.*[5]

**Esempio 4.3.1.** Esaminiamo il caso di una corda vibrante di lunghezza infinita. Se consideriamo il caso in cui sulla corda agisce una forza esterna non trascurabile (per esempio la di gravità), al posto dell'equazione (4.5) abbiamo

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x), \tag{4.17}$$

dove $f$ rappresenta la forza esterna (per unità di lunghezza) agente nel punto di ascissa $x$.

Se la corda, nell'istante iniziale ha la forma $u(x,0) = h(x)$ ed i suoi punti hanno 'velocità verticale' $u_t(x,0) = k(x)$, per determinare il moto negli istanti successivi possiamo trovare le soluzioni $u^1$ e $u^2$ dei due problemi (ai valori iniziali)

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x), \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = h(x), \\ u_t(x,0) = k(x). \end{cases}$$

Per il principio di sovrapposizione, il moto della corda sarà dato da $u(x,t) = u^1(x,t) + u^2(x,t)$.

Il seguente esempio mostra che il principio di sovrapposizione **non** è valido in generale per equazioni non lineari.

**Esempio 4.3.2.** Le funzioni $v(x,y) = e^x$, $w(x,y) = e^{-y}$ sono soluzione dell'equazione (non lineare)

$$(u_x + u_y)^2 - u^2 = 0,$$

ma $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$ **non** è soluzione.

[5] Il principio di sovrapposizione può essere esteso, in certi casi, anche ad un'infinità (continua o numerabile) di problemi. Questo è particolarmente utile quando i dati sono in forma di serie oppure di integrale.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

## 4.4 Problemi (non) ben posti

Dato un problema composto da un'equazione alle derivate parziali e da condizioni supplementari, le questioni principali che ci dobbiamo porre sono:

**Esistenza della soluzione** Cioè stabilire se, assegnato un dato iniziale, esiste una soluzione. Nel caso di un problema lineare $\Lambda u = \Phi$ si tratta di stabilire la suriettività di $\Lambda$; per il principio di sovrapposizione questo può essere ridotto a stabilire l'esistenza di soluzioni di problemi più semplici.

**Unicità della soluzione** Stabilire se, per qualche dato si può trovare più di una soluzione. Nel caso di un problema lineare $\Lambda u = \Phi$, la questione si può ridurre a stabilire se la funzione nulla sia l'unica soluzione del problema omogeneo associato $\Lambda = 0$. Per vederlo, è sufficiente osservare che se $u^1$ e $u^2$ sono soluzioni di $\Lambda u = \Phi$, allora, per la linearità, $u^1 - u^2$ è soluzione di $\Lambda = 0$.

**Dipendenza continua dai dati** Si tratta di stabilire se condizioni supplementari 'vicine' danno soluzioni 'vicine'. Per rendere precisa quest'affermazione, si deve definire una nozione di 'distanza ' sia nello spazio di funzioni in cui si cercano le soluzioni sia nello spazio in cui sono assegnati i dati del problema. Una definizione precisa ci porterebbe troppo lontano; limitiamoci ad osservare che questa proprietà ha grande importanza nella pratica. Infatti i dati del problema risultano spesso da misurazioni che, per loro natura, sono affette da errori. Questi errori si riflettono naturalmente sui risultati del problema. La dipendenza continua dai dati assicura che l'errore sui risultati del problema può essere reso arbitrariamente piccolo rendendo sufficientemente accurate le misurazioni. Molti problemi fisici reali, tuttavia, non godono di questa proprietà.

Un problema, composto da un'equazione alle derivate parziali e da condizioni supplementari, si dice *ben posto* (secondo Hadamard) se gode delle tre proprietà elencate sopra. è bene ribadire che non tutti i problemi di interesse fisico sono ben posti.

**Esempio 4.4.1 (Problema retrogrado per l'equazione del calore).** Sia $\Omega$ il rettangolo $(0,1) \times (-1,0)$. Consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, i problemi

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = e^{-n} \sin(n\pi x), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \end{cases} \tag{4.18}$$

e, denotata con $u_n$ la soluzione, determiniamo $u_n(x,-1)$. Questo, con un'opportuna scelta delle unità di misura, corrisponde fisicamente a determinare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, quali condizioni nel passato (al tempo $t = -1$) abbiano determinato la distribuzione attuale ($t = 0$) di temperatura $u(x,0) = e^{-n} \sin(n\pi x)$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Con facili calcoli, si vede che $u_n(x,t) = e^{-n^2\pi^2 t - n}\sin(n\pi x)$, per cui

$$u_n(x,-1) = e^{n^2\pi^2 - n}\sin(n\pi x).$$

Si osservi che, prendendo $n \to \infty$ si ottiene

$$|u_n(x,0)| \to 0 \qquad \text{per ogni } x \in (0,1),$$

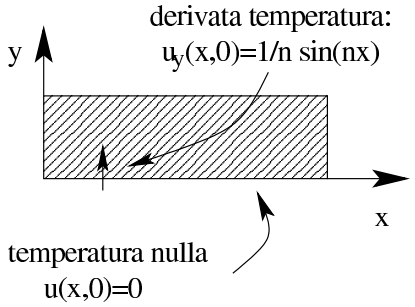
mentre

$$\sup_{x\in(0,1)} |u_n(x,-1)| \to \infty.$$

Cioè, se ammettiamo la possibilità di commettere piccoli errori nella misurazione della temperatura attuale, allora, solo sulla base di quest'informazione, non siamo in grado di conoscere la temperatura nel passato.

Questo ragionamento ci mostra che il problema (4.18) non è ben posto.

Un altro problema non ben posto è il problema ai valori iniziali per l'equazione di Laplace:




**Esempio 4.4.2 (Hadamard).** Consideriamo la distribuzione della temperatura su una piastrina rettangolare con i lati disposti lungo gli assi $x$ e $y$. Supponiamo che non vi siano fonti di calore e che siano note la temperatura lungo l'asse $y = 0$ e la variazione della temperatura ortogonalmente a quest'asse. Cerchiamo di determinare la temperatura nelle vicinanze dell'asse $y = 0$. In quest'esempio, dato $n \in \mathbb{N}$, assumiamo nulla la temperatura sull'asse $x$ ed uguale a $(1/n)\sin(nx)$ la sua derivata lungo l'asse $x$ nella direzione dell'asse $y$. Cioè consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, i seguenti problemi:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u_y(x,0) = \frac{1}{n}\sin(nx). \end{cases} \tag{4.19}$$

Si vede che la soluzione $u^n$ è data da

$$u^n(x,y) = \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2n^2}\sin(nx)$$

Osserviamo che per ogni $x$, $|u^n_y(x,0)| \to 0$ se $n \to \infty$ ma, per quanto piccolo si prenda $y > 0$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u^n(x,y)| \to \infty.$$

Questo significa che, per quanto piccoli siano gli errori che si commettono nella misurazione della derivata della temperatura, questi possono condurre ad errori macroscopici anche in vicinanza dei punti in cui si effettua la rilevazione. Cioè il problema (4.19) non è ben posto.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

## 4.5 Il principio di massimo per l'equazione di Poisson

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Consideriamo il problema di Diriclet

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= -F(x) && x \in \Omega, && \text{(4.20a)} \\ u(x) &= f(x) && x \in \partial\Omega, && \text{(4.20b)} \end{aligned}$$

con $F$ e $f$ funzioni continue. Si può provare il seguente importante risultato.

**Teorema 4.5.1 (Principio di massimo debole).** *Supponiamo che $F(x) \leq 0$ per ogni $x \in \Omega$. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ è una soluzione di* (4.20a)*, allora*

$$u(x) \leq \max_{\xi \in \partial\Omega} u(\xi) \quad \forall x \in \Omega.$$

**Osservazione 4.5.2.** Nel caso dell'equazione di Laplace $\Delta u = 0$, applicando il Teorema 4.5.1 alle soluzioni $u$ e $-u$, si ha

$$\min_{\xi \in \partial\Omega} u(\xi) \leq u(x) \leq \max_{\xi \in \partial\Omega} u(\xi) \quad \forall x \in \Omega.$$

Questo implica che l'unica soluzione del problema

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 && x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 && x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.21}$$

sia $u(x) \equiv 0$. Inoltre, se $v$ e $w$ sono soluzioni del problema (4.20) allora, per il principio di sovrapposizione, si ha che $u = v - w$ è soluzione del problema (4.21). Conseguentemente $v(x) \equiv w(x)$. Si è quindi provata l'unicità delle soluzioni del problema (4.20).

Il Teorema 4.5.1 può essere usato anche per stabilire la dipendenza continua delle soluzioni del problema (4.20) dalle condizioni iniziali. Infatti, se $u$ è una soluzione,

$$-\Delta \left( u + \frac{1}{4} \max_{\xi \in \overline{\Omega}} |F(\xi)| \, \|x\|^2 \right) \leq 0$$

e conseguentemente, se $R$ è il raggio di un cerchio contenente $\Omega$,

$$u + \frac{1}{4} \max_{\xi \in \overline{\Omega}} |F(\xi)| \, \|x\|^2 \leq \max_{\xi \in \partial\Omega} f(\xi) + \frac{1}{4} R^2 \max_{\xi \in \overline{\Omega}} |F(\xi)|,$$

da cui segue che per ogni $x \in \overline{\Omega}$

$$u(x) \leq \max_{\xi \in \partial\Omega} |f(\xi)| + \frac{1}{4} R^2 \max_{\xi \in \overline{\Omega}} |F(\xi)|.$$

Ora, applicando considerazioni simili alla soluzione $-u$ del problema

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= F(x) && x \in \Omega, \\ u(x) &= -f(x) && x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

si ottiene la disuguaglianza opposta. Conseguentemente si ha che

$$|u(x)| \leq \max_{\xi\in\partial\Omega} |f(\xi)| + \frac{1}{4}R^2 \max_{\xi\in\overline{\Omega}} |F(\xi)| \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Questa disuguaglianza, ragionando come nell'Osservazione 4.5.2, prova la dipendenza continua delle soluzioni dai dati iniziali.

Il problema dell'esistenza delle soluzioni dell'equazione (4.20a) è più complessa e ci porterebbe troppo lontano. Per l'equazione di Laplace, comunque, si può provare il seguente teorema:

**Teorema 4.5.3.** *Sia $\Omega$ un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ dotato di frontiera sufficientemente liscia.*[6] *Allora, per ogni funzione $f \in C(\partial\Omega)$, esiste un'unica soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del problema*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \textit{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= f. \end{aligned}$$

Questo teorema, insieme agli altri ragionamenti fatti in questo paragrafo, mostra che il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace è ben posto.

## 4.6 Il metodo dell'integrale dell'energia

Quello dell'integrale dell'energia è un metodo utile per studiare le proprietà di unicità delle soluzioni di alcuni dei problemi introdotti in questo capitolo. Esso deve il suo nome dal fatto che si traggono conclusioni qualitative sulla soluzione $u$ dall'integrale $\int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, \mathrm{d}x$, detto *integrale dell'energia* a causa della sua interpretazione fisica. Qui, per semplicità, studieremo soltanto alcuni esempi.

In tutto questo paragrafo assumeremo che $\Omega$ sia un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera sufficientemente regolare da poter applicare il teorema della divergenza. Inoltre, in questo paragrafo, con la parola 'soluzione' ci riferiremo ad una funzione in $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Ci serviremo della seguente formula:

$$\operatorname{div}(u\nabla u) = u\Delta u + \|\nabla u\|^2 \tag{4.22}$$

che può essere provata direttamente in modo molto semplice.

Consideriamo per esempio il seguente problema di Neumann per l'equazione di Laplace:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \qquad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) &= 0 \qquad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.23}$$

[6] È, per esempio, sufficiente richiedere che la frontiera sia di classe $C^2$, cioè che per ogni punto di $\partial\Omega$ esista un intorno $V$ tale che $V \cap \partial\Omega$ sia rappresentabile come il grafico di una funzione $C^2$ rispetto ad uno qualsiasi degli iperpiani coordinati

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Moltiplichiamo ambo i membri di $\Delta u = 0$ per $u$ ed integriamo su $\Omega$. Tenendo conto della (4.22) e del Teorema della divergenza si ottiene

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega u(x)\Delta u(x)\ \mathrm{d}x &= \int_\Omega \mathrm{div}\left(u(x)\nabla u(x)\right)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial\Omega} u(x)\,\nabla u(x)\cdot n\ \mathrm{d}S - \int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)\ \mathrm{d}S - \int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tenendo conto della condizione al bordo, si ha

$$\int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2\ \mathrm{d}x = 0.$$

Questo, visto che $\|\nabla u(x)\|^2$ è una funzione continua e non negativa, implica $\nabla u(x) = 0$.

Si è quindi provato che il problema (4.23) ammette come soluzione tutte le costanti. Ragionando come nell'Osservazione 4.5.2 si ha che: **Se il problema di Neuman (non omogeneo) per l'equazione di Laplace**

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \qquad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) &= f \qquad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

**ammette soluzione, allora essa è determinata a meno di una costante additiva arbitraria**.

Assegnato $\bar{t}$, consideriamo ora il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione di diffusione:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u = 0 \quad & x \in \Omega,\ 0 < t < \bar{t}, \\ u(x,0) = 0 \quad & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0 \quad & x \in \partial\Omega,\ 0 < t < \bar{t}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Se $u$ è una soluzione, moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione $u_t - \Delta u = 0$ per $u$ ed integriamo su $\Omega$. Dal momento che sia $u^2$ sia $2uu_t$ sono funzioni continue su $\overline{\Omega}$, si ha $\int_\Omega uu_t\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial t}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2\ \mathrm{d}x$. Inoltre, tenendo conto della (4.22) e del Teorema della divergenza, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega uu_t - u\Delta u\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \mathrm{div}\left(u\nabla u\right)\ \mathrm{d}x + \int_\Omega \|\nabla u\|^2\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} u\,\nabla u\cdot n\ \mathrm{d}S + \int_\Omega \|\nabla u\|^2\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}\ \mathrm{d}S + \int_\Omega \|\nabla u\|^2\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Per le condizioni al bordo,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \|\nabla u\|^2\,\mathrm{d}x \le 0.$$

Questa diseguaglianza ci dice che la derivata della funzione $H(t) = \int_\Omega [u(t,x)]^2\,\mathrm{d}x$ è non positiva. Dal momento che $H(0) = 0$, per la condizione iniziale, e che $H(t) \ge 0$, $0 < t < \bar{t}$, per costruzione, si ha necessariamente $H(t) \equiv 0$. Quindi $u(x,t) = 0$ per ogni $0 < t < \bar{t}$.

Abbiamo quindi dimostrato che **il problema** (4.24) **ammette solo la soluzione nulla**.

**Esercizio 4.6.1.** Ripetere gli stessi ragionamenti per il problema di Cauchy-Neumann omogeneo.

**Esercizio 4.6.2.** Ragionando come nell'Osservazione 4.5.2 trarre delle conclusioni relative ai problemi di Cauchy-Dirichlet e di Cauchy-Neumann per l'equazione di Laplace.

## Riferimenti ed approfondimenti

**Paragrafi 4.1 e 4.2** [8], [13, cap. 7 §1], [11], [12], [21].

**Paragrafo 4.3:** [13, cap. 7 §1].

**Paragrafo 4.4:** [13, cap. 7, §1], [21, cap. 6 §5].

**Paragrafo 4.5:** [18, cap. 3 §12].

**Paragrafo 4.6:** [13, cap. 7, §1].

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

# Capitolo 5

# Equazioni del primo ordine

## 5.1 Equazioni lineari e quasi-lineari del primo ordine

Ci limiteremo, per semplicità a considerare equazioni in due sole variabili indipendenti. Le equazioni della forma

$$P\big(x,y,u(x,y)\big)u_x(x,y)+Q\big(x,y,u(x,y)\big)u_y(x,y)=R\big(x,y,u(x,y)\big), \tag{5.1}$$

dove $P$, $Q$ ed $R$ sono funzioni $C^1$ definite su un aperto $\Omega$ di $\mathbb{R}^3$, sono dette *quasi-lineari*.

Le equazioni della forma

$$a(x,y)u_x(x,y)+b(x,y)u_y(x,y)+c(x,y)u(x,y)=d(x,y), \tag{5.2}$$

dove $a$, $b$, $c$ e $d$ sono funzioni $C^1$ definite su un aperto $\Omega$ di $\mathbb{R}^2$, sono dette *lineari*.

**Esempio 5.1.1.** Sia $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una funzione $C^1$ con gradiente non nullo assegnata. Al variare di $c\in g(\mathbb{R}^3)$ l'equazione

$$g(x,y,z)=c$$

definisce una famiglia di superfici. Se la superficie $S$ data da $z=u(x,y)$ è ortogonale ad ognuna di esse, allora, scrivendo $f(x,y,z)=u(x,y)-z$, $S$ ha equazione $f(x,y,z)=0$ e deve essere $\langle\nabla g(x,y,z),\nabla f(x,y,z)\rangle=0$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Dunque $u$ soddisfa

$$g_x\big(x,y,u(x,y)\big)u_x(x,y)+g_y\big(x,y,u(x,y)\big)u_y(x,y)=g_z\big(x,y,u(x,y)\big)$$

che è un'equazione quasi-lineare.

## 5.2 Il problema di Cauchy per equazioni quasi-lineari

Il problema di Cauchy per le equazioni differenziali ordinarie può essere descritto come la ricerca di una soluzione il cui grafico passa per un punto assegnato. Per

le equazioni alle derivate parziali, invece, consiste nella ricerca di una soluzione il cui grafico contenga una curva data.

Più precisamente, sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e sia $\Gamma : I \to \Omega$, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, una curva in $\Omega$ data da $s \mapsto \big(\xi(s), \eta(s), \zeta(s)\big)$. Supponiamo che le funzioni $\xi$, $\eta$ e $\zeta$ siano di classe $C^1$ e consideriamo la curva in $\mathbb{R}^2$ data da $s \mapsto \gamma(s) = \big(\xi(s), \eta(s)\big)$; cioè la proiezione ortogonale di $\Gamma$ sul piano $xy$. Diremo che $u$ è una soluzione (locale) del problema di Cauchy:

$$P(x,y,u)u_x + Q(x,y,u)u_y(x,y) = R(x,y,u), \tag{5.3a}$$

$$u\big(\xi(s),\eta(s)\big) = \zeta(s), \quad \forall s \in I, \tag{5.3b}$$

se esiste un intorno $\tilde{U}$ di $\gamma(I)$ tale che $u : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ è una soluzione di (5.3a) che soddisfa identicamente (5.3b). Chiameremo la curva $\Gamma$ *dato iniziale* del problema (5.3).

In altre parole, la condizione (5.3b) richiede che la soluzione assuma i valori $\zeta(s)$ lungo la curva $\gamma(s)$, per questo diremo che i dati iniziali sono assegnati lungo la curva $\gamma$.

### 5.2.1 Esistenza ed unicità

Cerchiamo di farci un'idea geometrica di come si possa costruire una soluzione locale del problema (5.3). Questo ci permetterà di capire quali sono le condizioni da richiedere affinché tale soluzione esista.

Sia $\Omega$ un sottoinsieme aperto e connesso di $\mathbb{R}^3$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale dato da $f(\vec{x}) = \big(P(\vec{x}), Q(\vec{x}), R(\vec{x})\big)$, dove $\vec{x} = (x,y,z)$. Fissato $s \in I$, consideriamo il problema di Cauchy (per le equazioni differenziali ordinarie)

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau} = f(\vec{x}), \\ \vec{x}(0) = \big(\xi(s), \eta(s), \zeta(s)\big). \end{cases} \tag{5.4}$$

Per il teorema di Cauchy (5.4) ammette un'unica soluzione locale (dipendente da $\tau$ che varia in un intorno di 0). Le soluzioni di (5.4) al variare di $s$ sono curve di $\mathbb{R}^3$ dette *curve caratteristiche*.[1] L'idea è di incollare insieme le diverse soluzioni che si ottengono al variare di $s$ in modo da ottenere una superficie parametrizzata dalla coppia $(s,\tau)$. Perché tale superficie sia il grafico di una soluzione di (5.3), è necessario che il suo versore normale non sia parallelo al piano $xy$. Inoltre, affinché la soluzione risulti determinata univocamente, $\Gamma$ non dovrà essere essa stessa una curva caratteristica.

Una condizione che assicura l'esistenza di una superficie come sopra è che la componente lungo l'asse $z$ del prodotto vettoriale[2] $f\big(\Gamma(s)\big) \times \Gamma'(s)$ sia non nulla;

[1] In generale, il nome curve caratteristiche si applica a tutte le *linee di flusso* del campo $f$, cioè alle curve che hanno la proprietà di essere tangenti in ogni loro punto ad $f$. Le soluzioni di (5.4) godono evidentemente di questa proprietà.

[2] Se $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, $v \times w = (v_2w_3 - w_2v_3, w_1v_3 - v_1w_3, v_1w_2 - w_1v_2)$ è un vettore ortogonale al piano determinato da $v$ e $w$; in molti testi il prodotto vettoriale è indicato con il simbolo $\wedge$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

cioè che

$$P\big(\Gamma(s)\big)\eta'(s) - Q\big(\Gamma(s)\big)\xi'(s) \neq 0. \tag{5.5}$$

In altri termini, le proiezioni di $f$ e di $\Gamma$ sul piano $xy$ devono essere trasverse.

**Osservazione 5.2.1.** Consideriamo il caso di equazioni lineari, cioè della forma (5.2). La (5.5) assume la forma

$$a\big(\gamma(s)\big)\eta'(s) - b\big(\gamma(s)\big)\xi'(s) \neq 0. \tag{5.6}$$

Le curve del piano $xy$ che soddisfano la condizione 'opposta', cioè:

$$a\big(\gamma(s)\big)\eta'(s) - b\big(\gamma(s)\big)\xi'(s) = 0$$

per ogni $s$, sono dette *linee caratteristiche*. Nel caso di equazioni lineari, la condizione (5.6) può essere espressa dicendo che **la curva $\gamma$ su cui sono assegnati i dati iniziali non deve essere tangente in alcun punto ad una linea caratteristica.**

Osserviamo inoltre che, nel caso di equazioni lineari, la condizione (5.6) non dipende dai dati assegnati lungo la curva $\gamma$

Si possono provare i seguenti teoremi.

**Teorema 5.2.2.** *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $I \subset \mathbb{R}$ e $\Gamma : I \to \Omega$ come sopra e supponiamo che $P$, $Q$ ed $R$ siano $C^1$ in $\Omega$. Se per $s_0 \in I$*

$$P\big(\Gamma(s_0)\big)\eta'(s_0) - Q\big(\Gamma(s_0)\big)\xi'(s_0) \neq 0, \tag{5.7}$$

*allora esiste un intorno $U$ di $\big(\xi(s_0), \eta(s_0)\big)$ in $\mathbb{R}^2$, un intorno $\tilde{I} \subset I$ di $s_0$ ed una unica funzione $u : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ che risolve (5.3) con $\tilde{I}$ al posto di $I$.*[3]

**Esempio 5.2.3.** Trovare una soluzione locale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (y+u)u_x + yu_y = x - y, \\ u(x,1) = 1 + x. \end{cases}$$

Qui, chiaramente, il problema di Cauchy non è nella forma (5.3). Per metterlo nella forma richiesta definiamo $\Gamma(s) = (s, 1, 1+s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Il campo vettoriale $f(\vec{x}) = \big(P(\vec{x}), Q(\vec{x}), R(\vec{x})\big)$ è dato da $f(x,y,z) = (y + z, y, x - y)$. Per ogni $s \in \mathbb{R}$,

$$P\big(\Gamma(s)\big)\eta'(s) - Q\big(\Gamma(s)\big)\xi'(s) = -1 \neq 0,$$

dunque il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione locale.

[3]Ovviamente dovrà necessariamente essere $\tilde{U} \subset \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in \Omega\big\}$ e, inoltre, $\big(\xi(s), \eta(s)\big) \in \tilde{U}$ per ogni $s \in \tilde{I}$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Procediamo adesso a determinare la soluzione. Per calcolare le curve caratteristiche dobbiamo risolvere il problema di Cauchy (ordinario)

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = y + z, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = y, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = x - y, \\ x(0) = s, \\ y(0) = 1, \\ z(0) = 1 + s. \end{cases} \tag{5.8}$$

Per risolvere questo sistema, fissiamo $s$ ed osserviamo che necessariamente $y_s(\tau) = k_0(t)e^{\tau}$ per qualche funzione $k_0$ di $t$.[4] Derivando la prima equazione e sostituendovi le altre due, tenendo conto della forma di $y_s(\tau)$, si ottiene $\frac{\mathrm{d}^2 x_s}{\mathrm{d}\tau^2} = x_s$, da cui segue $x_s(\tau) = k_1(s)e^{\tau} + k_2(s)e^{-\tau}$. Sostituendo infine nella terza equazione, $z_s(\tau) = \big(k_1(s) - k_0(s)\big)e^{\tau} - k_2(s)e^{-\tau} + k_3(s)$. Sostituendo nella prima delle (5.8) si ottiene, necessariamente $k_3(s) \equiv 0$. La condizione iniziale, poi, ci permette di ottenere un'espressione per $k_0$, $k_1$ e $k_2$; basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_\tau(0) = k_1 + k_2 = s, \\ y_\tau(0) = k_0 = 1, \\ z_\tau(0) = k_1 - k_2 - 1 = 1 + s. \end{cases}$$

Cioè $k_0(s) = 1$, $k_1(s) = s + 1$, $k_2(s) = -1$. Si ottiene la seguente rappresentazione parametrica del grafico della soluzione

$$(s, \tau) \mapsto \big(x_s(\tau), y_s(\tau), z_s(\tau)\big) = \big((1 + s)e^{\tau} - e^{-\tau},\ e^{\tau},\ se^{\tau} + e^{-\tau}\big).$$

Eliminando $s$ e $\tau$ nell'espressione di $z_s(\tau)$, si ha $z = x - y + \frac{2}{y}$. Dunque, la soluzione cercata è

$$u(x, y) = x - y + \frac{2}{y}.$$

**Esercizio 5.2.4.** Trovare una soluzione locale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (y + u)u_x + yu_y = x - y, \\ u(x, 1) = x. \end{cases}$$

**Esercizio 5.2.5.** Trovare una soluzione locale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (y + u)u_x + yu_y = 1 - y, \\ u(x, 1) = 1 + x. \end{cases}$$

Esaminiamo delle condizioni che permettano di escludere l'esistenza di una soluzione locale del problema di Cauchy. Mettiamoci nelle ipotesi del Teorema 5.2.2.

[4] La dipendenza della soluzione di (5.8) da $s$, che per ora è fissato, è indicata dal pedice '$s$'

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

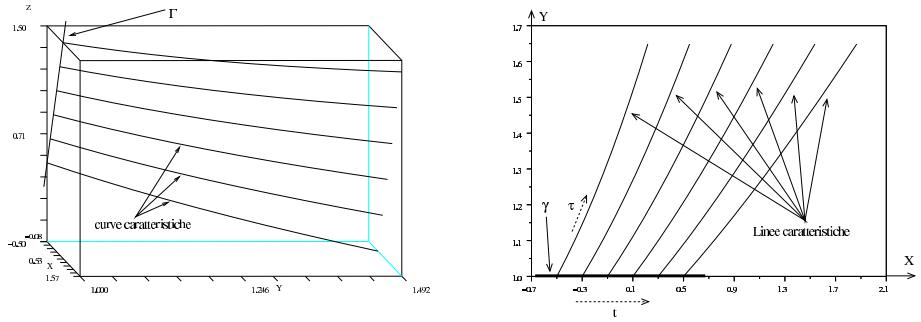



Figura 5.1: Curve e linee caratteristiche per l'Esempio 5.2.3

Se la condizione (5.7) è violata, cioè se vale

$$P\big(\Gamma(s_0)\big)\eta'(s_0) - Q\big(\Gamma(s_0)\big)\xi'(s_0) = 0, \tag{5.9}$$

allora, supponendo che $P$ e $Q$ non si annullino contemporaneamente allora (5.9) significa che esiste $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

$$\begin{aligned} \mu P\big(\Gamma(s_0)\big) &= \xi'(s_0), \\ \mu Q\big(\Gamma(s_0)\big) &= \eta'(s_0). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Supponiamo che

$$\mu R\big(\Gamma(s_0)\big) \neq \zeta'(s_0). \tag{5.11}$$

Se sono soddisfatte le condizioni (5.9)–(5.11) allora non può esistere una condizione locale. La ragione è che, in questo caso, la condizione iniziale e l'equazione forniscono informazioni discordanti sulla derivata della restrizione di $u$ alla curva $t \mapsto \big(\xi(s), \eta(s)\big)$.

Poniamo $v(s) = u\big(\xi(s), \eta(s)\big)$, allora $v'(s_0) = \zeta'(s_0)$. Dalla (5.10) e dalla (5.3a) si ottiene

$$\begin{aligned} v'(s_0) &= u_x\big(\xi(s_0), \eta(s_0)\big)\xi'(s_0) + u_y\big(\xi(s_0), \eta(s_0)\big)\eta'(s_0) = \\ &= \mu\left\{P\big(\Gamma(s_0)\big)u_x\big(\xi(s_0), \eta(s_0)\big) + Q\big(\Gamma(s_0)\big)u_y\big(\xi(s_0), \eta(s_0)\big)\right\} = \\ &= \mu R\big(\Gamma(s_0)\big), \end{aligned}$$

che contraddice la (5.11). Abbiamo provato il seguente teorema.

**Teorema 5.2.6.** *Se sono verificate le condizioni* (5.9)–(5.11) *allora il problema* (5.3) *non ha soluzione locale in nessun intorno del punto* $(x_0, y_0) = \big(\xi(s_0), \eta(s_0)\big)$.

Si può inoltre provare il seguente teorema.

**Teorema 5.2.7.** *Supponiamo che esista* $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *tale che le* (5.10) *siano verificate e che*

$$\mu R\big(\Gamma(s_0)\big) = \zeta'(s_0),$$

*allora il problema* (5.3) *ha infinite soluzioni.*

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

**Esercizio 5.2.8.** Consideriamo l'equazione

$$uu_x + yu_y = x \tag{5.12}$$

con le condizioni iniziali

$$\Gamma_1(s) = (s, s, 2s), \tag{5.13}$$
$$\Gamma_2(s) = (s, s, s), \tag{5.14}$$
$$\Gamma_3(s) = (s, s, \sqrt{2}/2s). \tag{5.15}$$

Stabilire quante soluzioni hanno i problemi (5.12)-(5.13), (5.12)-(5.14) e (5.12)-(5.15) (una, nessuna o infinite?).

**Esercizio 5.2.9.** Dedurre il seguente Corollario del Teorema 5.2.2

**Corollario 5.2.10.** *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} P(x,y,u)u_x + u_y = R(x,y,u), \\ u(x,0) = h(x), \end{cases}$$

*dove $P$ ed $R$ sono come di consueto ed $h$ è una funzione $C^1$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, ammette sempre una soluzione locale.*

## 5.3 Leggi di conservazione

Chiamiamo *leggi di conservazione* le particolari equazioni quasi-lineari della forma

$$a(u)u_x + u_t = 0 \tag{5.16}$$

(la variabile $y$ usata nel paragrafo precedente sarà qui rimpiazzata dalla variabile $t$ rappresentante il tempo). Questo tipo di equazioni differenziali si incontra in molte applicazioni. Esse modellano il flusso attraverso una superficie di una qualche grandezza fisica, che non possa venire creata o distrutta (da cui il nome).[5]

Noi studieremo il caso unidimensionale, questo significa che esamineremo fenomeni fisici che possono venire modellati con una sola variabile spaziale, non che i processi studiati accadono solo in una dimensione. Per maggiore semplicità, dove non diversamente specificato, i dati iniziali saranno considerati assegnati su tutto l'asse $x$; il caso in cui i dati sono assegnati solo su un intervallo $I$ non è molto diverso.

Consideriamo il problema di Cauchy

$$a(u)u_x + u_t = 0, \tag{5.18a}$$
$$u(x,0) = h(x), \tag{5.18b}$$

[5] I termini 'creazione' e 'distruzione' si riferiscono all'aggiunta o sottrazione dall'esterno del sistema in esame della grandezza fisica studiata.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

**Perché '*leggi di conservazione*'?**

Per fissare le idee, supponiamo che $u(x,y)$ sia la densità di massa di un fluido contenuto in un tubo disposto lungo l'asse $x$ (assumiamo questo per comodità, quello che è importante è che il fenomeno sia unidimensionale).
Fissiamo un tratto di tubo $I=[x_1,x_2]$. Se il tubo non ha fori nel tratto $I$ attraverso i quali venga aggiunto o tolto fluido, la massa contenuta in $I$ al tempo $y$ è data da $\int_{x_1}^{x_2} u(x,y)\,\mathrm{d}x$. Il fluido può entrare nel tratto $I$ di tubo solo attraverso le estremità $x_1$ e $x_2$, supponiamo che la quantità in ingresso (o in uscita) di fluido sia funzione soltanto della densità $u$ nei punti $x_1$ e $x_2$. Si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,\mathrm{d}x = f\big(u(x_1,t)\big) - f\big(u(x_2,t)\big), \tag{5.17}$$

dove la funzione $f$ modella il passaggio del fluido attraverso le estremità del tubo. Se $u$ è sufficientemente regolare, per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale,

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(x,t)\,\mathrm{d}x = f\big(u(x_1,t)\big) - f\big(u(x_2,t)\big).$$

Se $f$ è di classe $C^1$ si ha:

$$\begin{aligned} u_t(x_1,t) &= \lim_{x_2\to x_1} \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} u_t(x,t)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{x_2\to x_1} \frac{f\big(u(x_1,t)\big)-f\big(u(x_2,t)\big)}{x_2-x_1} = -f'\big(u(x_1,t)\big)u_x(x_1,t). \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $x_1$, $u_t(x,t)+f'\big(u(x,t)\big)u_x(x,t)=0$, che è della forma (5.16).

dove $a$ ed $h$ sono funzioni $C^1$ assegnate. Il problema (5.18) ammette una soluzione locale per il Corollario 5.2.10. Per determinarla procediamo come nel paragrafo precedente; dalla risoluzione del sistema delle caratteristiche

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = a(z), \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = 1, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = 0, \\ x_s(0) = s, \\ t_s(0) = 0, \\ z_s(0) = h(s), \end{cases}$$

otteniamo la seguente rappresentazione parametrica della soluzione:

$$\begin{cases} x_s(\tau) = a\big(h(s)\big)\tau + s, \\ t_s(\tau) = \tau, \\ z_s(\tau) = h(s). \end{cases}$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Da cui segue che $z$ deve soddisfare l'equazione (implicita, non lineare)

$$z = h\big(x - a(z)t\big). \tag{5.19}$$

Risolvendo quest'equazione rispetto a $z$, se possibile, otteniamo la soluzione locale $z = u(x,t)$ del problema di Cauchy. Il problema è: quest'equazione è veramente risolubile?

Fissiamo un'ascissa $x_0$. Applichiamo il Teorema della Funzione Implicita (Dini) nel punto di coordinate $\big(x_0, 0, h(x_0)\big)$ alla funzione

$$\Psi(x,t,z) = z - h\big(x - a(z)t\big). \tag{5.20}$$

Poichè

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z}(x,t,z) = 1 + h'\big(x - a(z)t\big)a'(z)t, \tag{5.21}$$

Si ha $\frac{\partial \Psi}{\partial z}\big(x_0, 0, h(x_0)\big) = 1 \neq 0$. Allora, per il Teorema della Funzione Implicita, esiste un intorno $U$ di $(x_0, 0)$ ed una funzione $u$ tale che, posto $z = u(x,t)$, si ha $\Psi\big(x,t,u(x,t)\big) = 0$ per ogni $(x,t) \in U$.

Sia $V$ un insieme aperto in cui $u$ è differenziabile (non necessariamente coincidente con $U$), in ogni punto di $V$ valgono le seguenti relazioni:[6]

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \frac{h'\big(x - a(z)t\big)}{1 + h'\big(x - a(z)t\big)a'(z)t}, \\ u_t(x,t) &= -\frac{a(z)h'\big(x - a(z)t\big)}{1 + h'\big(x - a(z)t\big)a'(z)t}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Perciò $u_x$ e $u_t$ tendono a diventate infinite quando la (5.21) tende a zero. In realtà quando la (5.21) diventa zero la soluzione $u$ ha una discontinuità nota come *shock* (o *urto*).[7] Notiamo che la (5.21) è sempre strettamente maggiore di 0 quando $|y|$ è sufficientemente piccolo.

Per capire meglio come si sviluppano gli shocks, osserviamo che le soluzioni della (5.19) sono costanti lungo le linee caratteristiche[8] che come sappiamo (vedere l'Osservazione 5.2.1) sono curve del piano $xt$.

Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e poniamo $z_0 = h(x_0)$. Tutti i punti della retta

$$r = \left\{ (x,t,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x - a(z_0)t = x_0, \\ z = z_0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

[6] Per ricavarle, è sufficiente osservare che $g(x,t) \underset{\text{def.}}{=} \Psi\big(x,t,u(x,t)\big) = 0$ per ogni $(x,t) \in U$ allora $g_x(x,t) = g_y(x,t) = 0$. Per esempio, si ha $g_x(x,t) = \Psi_x\big(x,t,u(x,t)\big) + \Psi_z\big(x,t,u(x,t)\big)u_x(x,t)$, da cui si ricava la prima delle (5.22). La seconda si può ottenere in modo analogo.

[7] Quindi in quei punti $u$ non è una soluzione, almeno non nel senso in cui la intendiamo noi. In realtà, uno studio approfondito degli shocks richiede l'estensione della nozione di soluzione, cosa che non tratteremo.

[8] Non si devono confondere le linee caratteristiche con le curve caratteristiche anch'esse definite nel paragrafo precedente. Infatti le curve caratteristiche (che sono curve di $\mathbb{R}^3$), in quanto soluzioni di un problema di Cauchy per equazioni ordinarie autonome di classe $C^1$, non si possono intersecare; le linee caratteristiche invece, come vedremo, possono.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

soddisfano la (5.19). In altre parole, lungo la retta

$$x - a(z_0)t = x_0 \tag{5.23}$$

del piano $xy$ la soluzione vale costantemente $h(x_0)$.

**Esercizio 5.3.1.** Osservare che, fissato $x_0$, $r$ è una curva caratteristica e che la retta (del piano $xt$) di equazione (5.23) è una linea caratteristica.

Siccome la variabile $t$ indica il tempo, ci interesserà analizzare soprattutto il semipiano $t > 0$ (cioè il futuro, dopo l'istante $t = 0$). Si può dimostrare che se nessuna coppia di rette della forma (5.23) si incontra nel semipiano $t > 0$ allora, per ogni $t > 0$ la soluzione esiste ed è differenziabile (quindi non ci sono shocks). Se viceversa se due rette della forma (5.23) si incontrano per qualche $t > 0$, allora nel punto di intersezione c'è un'incompatibilità data dal fatto che la soluzione dovrebbe assumere due valori distinti.

Fissati, ad esempio, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$, poniamo $z_1 = h(x_1)$ e $z_2 = h(x_2)$. Se $a(z_1) > a(z_2)$ allora le due rette

$$x - a(z_1)t = x_1, \quad \text{e} \quad x - a(z_2)t = x_2,$$

si incontrano in un punto $(x_0, t_0)$ con

$$0 < t_0 = \frac{x_2 - x_1}{a(z_1) - a(z_2)};$$

e nel punto $(x_0, t_0)$ si ha un'incompatibilità in quanto la soluzione in quel punto dovrebbe essere uguale contemporaneamente a $z_1$ ed a $z_2$.

**Esempio 5.3.2.** Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} uu_x + u_t = 0, \\ u(x, 0) = -x. \end{cases} \tag{5.18'}$$

L'equazione (5.19) assume la forma:

$$z = -(x - zt), \tag{5.19'}$$

per cui la soluzione $z = u(x, y)$ esiste ed è univocamente determinata da (5.19') se

$$1 - t \neq 0.$$

In tale caso si ha

$$u(x, t) = z = -\frac{x}{1 - t}.$$

Chiaramente, per $t = 1$ la soluzione perde di validità ed è presente uno shock. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $z_0 = h(x_0) = -x_0$. L'equazione della retta (5.23) diventa

$$x + x_0 t = x_0, \tag{5.23'}$$

che passa per il punto $(0, 1)$ qualunque sia $x_0$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

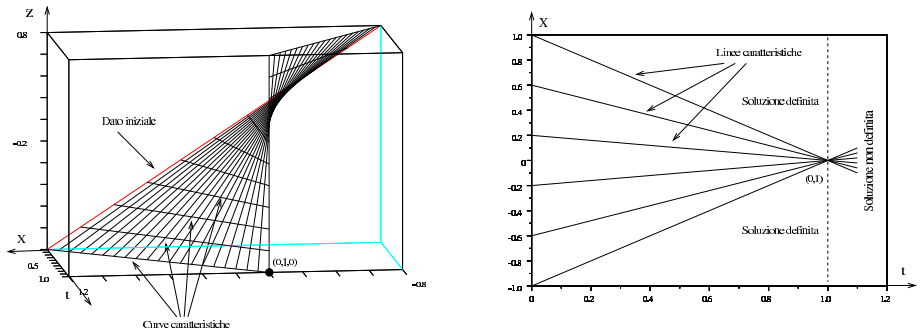



Figura 5.2: Curve e linee caratteristiche per l'esempio 5.3.2

**Esempio 5.3.3.** Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (u+1)u_x + u_t = 0, \\ u(x,0) = x - 1. \end{cases}$$

Scriviamo le linee caratteristiche. Fissato un qualunque $x_0$, la (5.23) diventa $x - x_0 t = x_0$. Per vedere se ci sono shocks per $t > 0$ facciamo l'intersezione tra due generiche linee caratteristiche corrispondenti a $x_0 \neq x_1$. Il sistema

$$\begin{cases} x - x_0 t = x_0, \\ x - x_1 t = x_1, \end{cases}$$

ha come unica soluzione $t = -1,\ x = 0$, pertanto non ci sono shocks per $t > 0$.

**Esercizio 5.3.4.** Determinare la soluzione di

$$\begin{cases} uu_x + u_t = 0, \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

Ci sono shocks per $t > 0$?

Supponiamo che il problema di Cauchy (5.18) ammetta uno shock. Allora esiste una curva $\chi$ (possibilmente degenere) nel semipiano $t > 0$ in ogni punto della quale si intersecano più linee caratteristiche. Tale curva, in un certo senso, "limita" la possibilità di estendere nel futuro le soluzioni classiche di (5.18).

Proponiamoci di determinare $\chi$. Chiaramente ogni punto di $\chi$ appartiene a qualche linea caratteristica, pertanto le sue coordinate $(x,t)$ devono soddisfare la (5.23) per qualche $x_0$. Chiaramente $x_0$ va considerato un parametro. Poniamo $F(s) = a\big(h(s)\big)$ e $\Xi(x,t,s) = x - tF(s) - s$. Allora (5.23), con $x_0 = s$, si può scrivere nella forma

$$\Xi(x,t,s) = x - tF(s) - s = 0. \tag{5.26a}$$

Inoltre, nell'intorno di un punto generico $(x,t)$ di $\chi$ non deve essere possibile risolvere in modo univoco l'equazione (5.26a) rispetto a $(x,t)$. Quindi deve essere

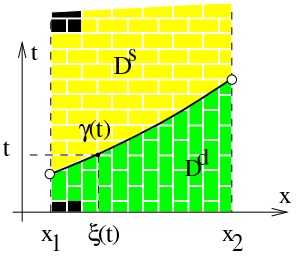
Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

**Soluzioni d'urto**

Consideriamo l'equazione

$$u_t(x,t) + f'\big(u(x,t)\big)u_x(x,t) = 0 \tag{5.24}$$

nel dominio $D = [x_1, x_2]\times[0,+\infty)$. Supponiamo che $u$ sia una funzione di classe $C^1$ in $D$ tranne che su una curva regolare $\gamma : t \mapsto (\xi(t), t)$ con $t > 0$ e $x_1 < \xi(t) < x_2$, sulla quale la $u$ ha una discontinuità di salto[a] con salto continuo lungo $\gamma$. Supponiamo che $u$ risolva la (5.24) in $D$ privato della curva $\gamma$. La (5.17) diventa:




$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{x_1}^{\xi(t)} u(x,t)\,\mathrm{d}x + \int_{\xi(t)}^{x_2} u(x,t)\,\mathrm{d}x\right] = f\big(u(x_1,t)\big) - f\big(u(x_2,t)\big).$$

Derivando sotto il segno di integrale,

$$\int_{x_1}^{\xi(t)} u_t(x,t)\,\mathrm{d}x + \int_{\xi(t)}^{x_2} u_t(x,t)\,\mathrm{d}x - [u]\big(\xi(t),t\big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(t) = f\big(u(x_1,t)\big) - f\big(u(x_2,t)\big).$$

Dalla (5.24), per $x_1 \to \xi(t)^+$ e $x_2 \to \xi(t)^-$, si ottiene la *condizione di Rankine-Hugoniot*

$$-\dot\xi(t)\;[u]\big(\gamma(t)\big) = f\Big(u^-\big(\gamma(t)\big)\Big) - f\Big(u^+\big(\gamma(t)\big)\Big). \tag{5.25}$$

Le soluzioni $u$ come sopra che lungo $\gamma$ soddisfano (5.25) sono dette *soluzioni d'urto*.

[a] La curva $\gamma$ divide $D$ in due parti: destra $D^{\mathrm{d}}$ e sinistra $D^{\mathrm{s}}$. Supponiamo che per ogni punto $p = \gamma(t)$ e per ogni successione $(x^i,t^i) \in D^{\mathrm{d}}$ e $(x_j,t_j) \in D^{\mathrm{s}}$ convergenti a $p$, $u^+(p) = \lim_{j\to\infty} u(x^j,t^j)$, $u^-(p) = \lim_{i\to\infty} u(x_i,t_i)$, ed il *salto* $[u](p) = u^+(p) - u^-(p)$ siano definiti indipendentemente dalla scelta delle successioni

$\frac{\partial\Xi}{\partial z}(x,t,s) = 0$, con $\Xi$ dato dalla (5.20); altrimenti, per il Teorema della Funzione Implicita esisterebbe un'unica soluzione locale. Si ha

$$1 + tF'(s) = 0. \tag{5.26b}$$

Tenendo conto della (5.21), della definizione di $F$ e del fatto che $z = h(s)$ in $(x,t)$, si osserva che la (5.26b) è equivalente a $\frac{\partial\Psi}{\partial s}(x,t,s) = 0$. Infatti l'equazione (5.19) non deve essere risolubile (rispetto a $(x,t)$) nei punti di $\chi$.

La curva $\chi$ è l'*inviluppo delle linee caratteristiche*. Risolvendo le (5.26) rispetto a $s$ si ottiene una rappresentazione parametrica della curva $\chi$. Cioè:

$$s \mapsto \big(x(s),t(s)\big) = \left(s - \frac{F(s)}{F'(s)}\,,\; -\frac{1}{F'(s)}\right) \tag{5.27}$$

valida per ogni $s$ tale che $F'(s) \neq 0$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Poniamoci il problema se vi sia un tempo $T$ tale che la soluzione del problema (5.18) sia definita almeno in tutta la striscia $\mathbb{R} \times [0, T)$. Per rispondere a questa domanda si deve osservare che se esistono $(x, t)$ dove la soluzione perde regolarità allora le considerazioni precedenti mostrano che deve essere $\frac{\partial \Xi}{\partial s}(x, t, s) = 0$; cioè $t = -1/F'(s)$. Allora, definendo

$$t_c = \begin{cases} +\infty & \text{se } F'(s) \geq 0 \text{ per ogni } s \\ \dfrac{1}{\max\limits_{\{s:F'(s)<0\}} |F'(s)|} & \text{se } \{s : F'(s) < 0\} \neq \emptyset. \end{cases}$$

si ha che la soluzione è sicuramente definita nella striscia $\mathbb{R} \times [0, t_c)$. Il tempo $t_c$ è detto *tempo critico* o anche *istante di rottura dell'onda*.

**Osservazione 5.3.5.** Considerazioni del tutto simili si potrebbero fare se considerassimo i dati iniziali assegnati su un intervallo $I$ anziché su tutto l'asse $x$.

**Esempio 5.3.6.** La curva $\chi$ relativa al problema di Cauchy (5.18') è degenere: si riduce al solo punto $(0, 1)$. Il tempo critico è 1.

**Esempio 5.3.7.** La curva $\chi$ relativa al seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} uu_x + u_t = 0, \\ u(x, 0) = x^2, \end{cases}$$

è rappresentata parametricamente dalla curva

$$(x(\tau), t(\tau)) = \left( -\frac{1}{\tau}\, ,\, \frac{\tau}{2} \right).$$

Il tempo critico è 0, quindi non esiste nessuna striscia della forma $\mathbb{R} \times \delta$, $\delta > 0$, in cui l'equazione sia risolubile. Osserviamo che questo non è in contrasto con il teorema di esistenza ed unicità.

### 5.3.1 Flusso di automobili su un'autostrada

Dobbiamo fare delle ipotesi semplificatorie. Innanzi tutto, consideriamo le auto come prive di dimensioni e trattiamo il flusso del traffico come quello di un fluido lungo un tubo sottile.

Sia $\rho(x, t)$ la densità di traffico all'istante $t$ nel punto di ascissa $x$ (cioè il numero di auto per unità di lunghezza); e sia $q(x, t)$ il flusso all'istante $t$ nel punto di ascissa $x$ (cioè il numero di auto per unità di tempo che all'istante $t$ attraversano il punto $x$). Assumiamo che nel tratto autostradale in esame non vi siano entrate o uscite.

Fissato un segmento di estremi $x_1$ e $x_2$ con $x_1 < x_2$ il numero di automobili in esso contenuto è:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t)\, \mathrm{d}x.$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

La variazione di questo numero, è uguale al numero di auto che entrano questo segmento meno quello di auto che lo lasciano; cioè

$$-\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}x = q(x_1,t) - q(x_2,t) = \\ = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\ \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)\ \mathrm{d}x.$$

Pertanto,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial q}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}x = 0.$$

L'arbitrarietà del segmento $[x_1, x_2]$ implica che

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial q}{\partial x}(x,t) = 0. \tag{5.28}$$

Introduciamo ora l'ipotesi, perfettamente ragionevole, che il flusso dipenda in qualche modo dalla densità di traffico; cioè che $q(x,t) = G\big(\rho(x,t)\big)$ per qualche funzione $G$. Quest'ipotesi corrisponde al fatto che la densità dei veicoli che circondano un dato automezzo ne condiziona la velocità. L'equazione (5.28) diventa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + G'\big(\rho(x,y)\big)\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,t) = 0. \tag{5.29}$$

Quindi il nostro modello per il flusso di traffico lungo un'autostrada si riduce ad una legge di conservazione.

La funzione $G$ dipenderà dalle caratteristiche della strada. Una legge empirica è la seguente:

$$G(r) = cr\left(1 - \frac{r}{\rho_1}\right),$$

dove $c$ è la velocità libera (cioè quella di un'auto che viaggia sola e indisturbata) e corrisponde nei casi normali al limite di velocità, e $\rho_1$ è la densità massima di auto (cioè quando le auto sono una a toccare l'altra). Con questa scelta di $G$ e ponendo $u = \rho/\rho_1$ (densità normalizzata), l'equazione (5.29) diventa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(1-2u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{5.30}$$

Sia $h(x)$ la densità iniziale sul tratto autostradale interessato. Lo studio dell'evoluzione del traffico è ricondotto al problema di Cauchy per l'equazione (5.30) con condizione iniziale $u(x,0) = h(x)$. Si può dimostrare che se $h$ è decrescente non si verificano shocks. Tuttavia, se $h$ è crescente in qualche tratto, allora prima o poi si verificherà uno shock (la derivata della densità diventerà infinita). La situazione è rappresentata nelle figure 5.3, 5.4 e 5.5.

**Esercizio 5.3.8.** Discutere il significato 'fisico' della figura 5.3.

**Esercizio 5.3.9.** Discutere il significato 'fisico' della figura 5.4, confrontandola con le figure 5.3 e 5.5.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

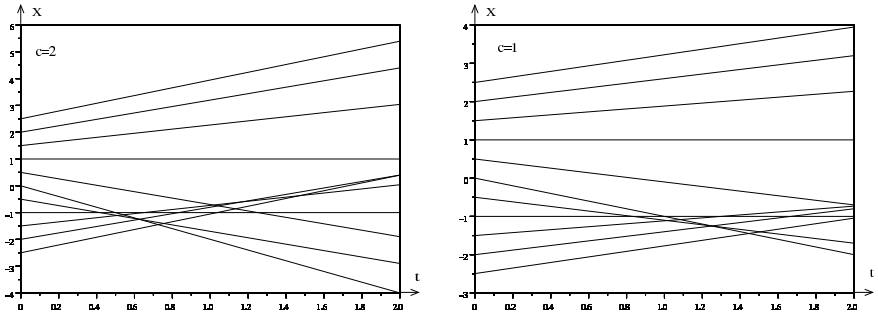



Figura 5.3: Linee caratteristiche per la (5.30) con $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$ e diverse 'velocità massime': $c = 1$ e $c = 2$.

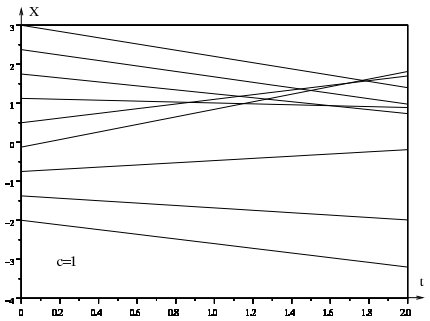



Figura 5.4: Linee caratteristiche per la (5.30) con $h(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1}$.

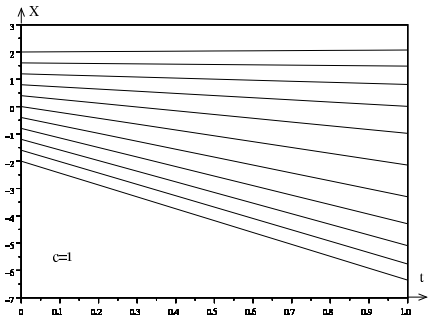



Figura 5.5: Linee caratteristiche per la (5.30) con $h(x) = \pi/2 - \arctan(x)$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

## 5.4 Sistemi di equazioni lineari

Consideriamo sistemi di equazioni differenziali delle funzioni incognite $u^1, \dots, u^n$ nelle variabili $x$ e $y$, della forma:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \{a_{i1}(x,y)u^i_x + b_{i1}(x,y)u^i_y\} = f_1(x,y,u^1,\dots,u^n), \\ \quad \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \{a_{in}(x,y)u^i_x + b_{in}(x,y)u^i_y\} = f_n(x,y,u^1,\dots,u^n), \end{cases} \tag{5.31}$$

dove le funzioni a valori reali $a_{ij}$ e $b_{ij}$ sono $C^1$ in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e le $f_j$ sono $C^1$ in un aperto $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{2+n}$ con la proprietà che

$$\Omega \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{n \text{ volte}} = \{(x,y,\underbrace{0,\dots,0}_{n \text{ volte}}) : (x,y) \in \Omega\} \subset \widetilde{\Omega}.$$

Un esempio di sistema di equazioni differenziali sono le condizioni di Cauchy-Riemann (2.2) che abbiamo incontrato a pagina 11.

### 5.4.1 Problema di Cauchy e caratteristiche

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Assegnamo una curva $\gamma : I \to \Omega$ regolare[9] data da $t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ e consideriamo $n$ funzioni di classe $C^1$, $v_i : I \to \mathbb{R}$, con $i = 1, \dots, n$, tali che

$$(\gamma_1(t), \gamma_2(t), v_1(t), \dots, v_n(t)) \in \widetilde{\Omega} \qquad \forall t \in I.$$

Il problema di Cauchy per il sistema (5.31) consiste nella ricerca di funzioni $u^1, \dots, u^n$, definite in un intorno $U$ (eventualmente più piccolo di $\Omega$) del sostegno di $\gamma$, soddisfacenti la (5.31) tali che per ogni $i = 1, \dots, n$

$$u^i(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = v_i(t), \qquad \forall t \in I. \tag{5.32}$$

In pratica, questo consiste nel cercare le funzioni $u^1, \dots, u^n$ in modo tale che esse assumano nei punti del sostegno di $\gamma$ i valori specificati dalle $v_i$. Se tali funzioni esistono, la ennupla $u^1, \dots, u^n$ è detta *soluzione del Problema di Cauchy* (5.31)-(5.32).

Sorge spontaneamente la domanda se esista o meno una soluzione (locale) del problema di Cauchy (5.31)-(5.32). Per rispondere alla domanda, cominciamo col vedere se, ammesso che una soluzione locale esista, sia possibile ricavare dal sistema (5.31) le derivate $u^i_x$ e $u^i_y$, $i = 1, \dots, n$, nei punti del sostegno di $\gamma$.

Derivando la (5.32) rispetto a $t$, si ottiene per $i = 1, \dots, n$

$$u^i_x(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t) + u^i_y(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_2'(t) = v_i'(t).$$

[9] Cioè derivabile in ogni punto interno di $I$ e tale che $\gamma'(t) \neq (0,0)$ per ogni $t \in I$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

(Queste sono $n$ equazioni.) Dal momento che la curva $\gamma$ è regolare, almeno uno dei $\gamma_1'(t)$ o $\gamma_2'(t)$ è non nullo. Supponiamo per fissare le idee che sia $\gamma_1'(t) \neq 0$. Ricavando $u_x^i\big(\gamma_1(t),\gamma_2(t)\big)$, $i = 1,\dots,n$, e sostituendo le espressioni trovate nel sistema (5.31), si ottiene per $t$ fissato

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(b_{i1}\gamma_1' - a_{i1}\gamma_2')u_y^i + a_{i1}v_i'}{\gamma_1'} = f_1\big(t, g(t), v_1(t),\dots,v_n(t)\big), \\ \qquad\vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(b_{in}\gamma_1' - a_{in}\gamma_2')u_y^i + a_{in}v_i'}{\gamma_1'} = f_n\big(t, g(t), v_1(t),\dots,v_n(t)\big), \end{cases} \tag{5.33}$$

dove, per brevità si è rimossa l'indicazione esplicita della dipendenza di $g'$ da $t$ e degli $a_{i,j}$, $b_{ij}$ e $u_y^i$ da $\big(\gamma_1(t),\gamma_2(t)\big)$.

Per $t$ fissato il sistema (5.33) è un sistema lineare nelle incognite $u_y^1,\dots,u_y^n$ che, come è noto, può essere risolto in modo unico se e soltanto se la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} (b_{11}\gamma_1' - a_{11}\gamma_2') & \cdots & (b_{1n}\gamma_1' - a_{1n}\gamma_2') \\ \vdots & & \vdots \\ (b_{n1}\gamma_1' - a_{n1}\gamma_2') & \cdots & (b_{nn}\gamma_1' - a_{nn}\gamma_2') \end{pmatrix},$$

ha determinante non nullo. Osserviamo che se avessimo supposto $\gamma_2'(t) \neq 0$ saremmo giunti alle stesse conclusioni.

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, chiamiamo *linee caratteristiche* quelle curve $t \mapsto \big(\xi(t),\eta(t)\big)$ per cui $\det A(t) = 0$ per ogni $t$. Osserviamo che le linee caratteristiche non dipendono da $f_1,\dots,f_n$.

Si può provare il seguente teorema:

**Teorema 5.4.1.** *Se la curva $\gamma$ non è in alcun punto tangente ad una linea caratteristica, allora il problema* (5.31)-(5.32) *ammette un'unica soluzione definita in un intorno sufficientemente piccolo del sostegno di $\gamma$.*

Ricordiamo che, in generale, due vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$, $\omega$ e $\bar\omega$ determinano la stessa direzione se esiste $\rho \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tale che $\omega = \rho\bar\omega$.[10]

Diremo che un vettore $\nu = (\nu_1,\nu_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ determina una *direzione caratteristica* nel punto $(x_0,y_0)$ se

$$\det\Big(b_{ij}(x_0,y_0)\nu_1 - a_{ij}(x_0,y_0)\nu_2\Big)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} = 0. \tag{5.34}$$

[10] In matematica, si dice che la relazione '$\omega \simeq \bar\omega$ se e solo se entrambi determinano la stessa direzione' è una *relazione di equivalenza* e che l'insieme

$$[\omega] \underset{\text{def.}}{=} \{\bar\omega : \bar\omega \simeq \omega\}$$

è una *classe di equivalenza* (rispetto a '$\simeq$'). La direzione di $\omega$ è precisamente $[\omega]$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Sviluppando il determinante, la (5.34) diventa

$$\begin{aligned}\alpha_n(x_0,y_0)\nu_1^n+\alpha_{n-1}(x_0,y_0)\nu_1^{n-1}\nu_2+\\ +\ldots+\alpha_1(x_0,y_0)\nu_1\nu_2^{n-1}+\alpha_0(x_0,y_0)\nu_2^n=0,\end{aligned} \tag{5.35}$$

per opportuni coefficienti $\alpha_0,\ldots,\alpha_n$, con $\alpha_0$ e $\alpha_1$ non entrambi nulli.

Vediamo come si possono calcolare le linee caratteristiche. Cerchiamo le linee caratteristiche della forma $y=y(x)$ con $y$ di classe $C^1$. Consideriamo quindi la curva $\gamma(t)=\big(t,y(t)\big)$ e imponiamo che per ogni $t$ il vettore $\gamma'(t)=\big(1,y'(t)\big)$ determini una direzione caratteristica. L'equazione (5.37), con $\nu_1=1$ e $\nu_2=y'$ diventa l'equazione differenziale ordinaria del primo ordine (**non** in forma normale):

$$\det\Big(b_{ij}(x,y)-a_{ij}(x,y)y'\Big)_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}}=0. \tag{5.36}$$

**Osservazione 5.4.2.** Sviluppando il determinante, l'equazione (5.36) può essere scritta nella forma

$$\alpha_p(x,y)\big(y'(x)\big)^p+\ldots+\alpha_1(x,y)y'(x)+\alpha_0(x,y)=0,$$

per qualche $p\le n$ (infatti alcuni dei primi coefficienti della (5.35) potrebbero essere nulli). Fissato un punto $(x_0,y_0)$, le soluzioni reali dell'equazione

$$\alpha_p(x_0,y_0)z^p+\ldots+\alpha_1(x_0,y_0)z+\alpha_0(x_0,y_0)=0, \tag{5.37}$$

sono i coefficienti angolari delle tangenti a quelle linee caratteristiche passanti per $(x_0,y_0)$ che sono della forma $y=g(x)$. Quindi, se $\bar z$ è una soluzione di (5.37), $(1,\bar z)$ è una direzione caratteristica in $(x_0,y_0)$.[11]

**Esempio 5.4.3.** Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} u^1_x+u^1_y+u^3_y=e^x,\\ u^2_y=u^1-u^3,\\ u^3_x=u^2-x.\end{cases}$$

Per determinare le direzioni caratteristiche in $(x_0,y_0)$ si considera l'equazione (si tiene conto della tabella 5.1)

$$\det\begin{pmatrix}\nu_1-\nu_2 & 0 & \nu_2\\ 0 & \nu_1 & 0\\ 0 & 0 & \nu_2\end{pmatrix}=0,$$

da cui segue che le direzioni caratteristiche sono determinate dai vettori $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

[11] Questo metodo permette di trovare tutte le direzioni caratteristiche del tipo $[\nu_1,\nu_2]$ con $\nu_1\neq 0$ (dividendo per $\nu_1$ si resta nella stessa classe di equivalenza). La direzione $[0,\nu_2]$ deve essere considerata a parte.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Cerchiamo le linee caratteristiche della forma $y = y(x)$. L'equazione (5.36) assume la forma (si vedere la tabella 5.1)

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1-y' & 0 & y' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y' \end{pmatrix} = y'(1-y'),$$

da cui è facile ricavare le linee caratteristiche. Infatti, per trovare le linee caratteristiche che passano per il punto $(x_0, y_0)$ si deve risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x)\big(1-y'(x)\big) = 0, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

Si ottiene che le linee caratteristiche cercate sono le rette $y = y_0$ e $y = x + y_0$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1^a$ equazione | $a_{11} = 1$<br>$a_{12} = 0$<br>$a_{13} = 0$ | $b_{11} = 1$<br>$b_{12} = 0$<br>$b_{13} = 0$ | $f_1 = e^x$ |
| $2^a$ equazione | $a_{21} = 0$<br>$a_{22} = 0$<br>$a_{23} = 0$ | $b_{21} = 0$<br>$b_{22} = 1$<br>$b_{23} = 0$ | $f_2 = u^1 - u^3$ |
| $3^a$ equazione | $a_{31} = 0$<br>$a_{32} = 0$<br>$a_{33} = -1$ | $b_{31} = 0$<br>$b_{32} = 0$<br>$b_{33} = 0$ | $f_3 = u^2 - x$ |

Tabella 5.1: Valori di $a_{ij}$, $b_{ij}$ e $f_j$ nell'esempio 5.4.3.

**Esempio 5.4.4.** Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} u^1_x + x u^1_y + u^3_y = e^x, \\ u^2_y = u^1 - u^3, \\ u^3_x = u^2 - x. \end{cases} \tag{5.38}$$

Rispetto ai dati riportati nella tabella 5.1 relativamente all'esempio 5.4.3, cambia solamente il valore di $b_{11}$. Per trovare le direzioni caratteristiche si deve considerare l'equazione

$$\det \begin{pmatrix} x\nu_1 - \nu_2 & 0 & \nu_2 \\ 0 & \nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Si ottiene che le direzioni caratteristiche sono determinate dai vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Determiniamo le curve caratteristiche della forma $y = y(x)$ passanti per $x_0, y_0$. Poiché

$$\det \begin{pmatrix} 1-y' & 0 & y' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y' \end{pmatrix} = y'(1-y'),$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

per farlo risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x)\big(1-y'(x)\big)=0, \\ y(x_0)=y_0. \end{cases}$$

Quindi le curve del piano $xy$ date da $x \mapsto \big(x, y(x)\big)$ con

| | |
|---|---|
| $y(x)=y_0,$ | $y(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2y_0-x_0^2}{2},$ |
| $y(x)=\begin{cases} y_0 & \text{per } x \le x_0 \\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2y_0-x_0^2}{2} & \text{altrimenti} \end{cases}$ | $y(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2y_0-x_0^2}{2} & \text{per } x \le x_0 \\ y_0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ |

sono tutte curve caratteristiche passanti per $(x_0, y_0)$.

**Esercizio 5.4.5.** Determinare le linee caratteristiche del seguente sistema passanti per il punto $(0,0)$

$$\begin{cases} xu_x^1+u_y^1+u_y^3=e^x, \\ u_x^2=u^1-u^3, \\ u_x^3=u^2-x. \end{cases}$$

## Riferimenti ed approfondimenti

**Paragrafi 5.1 e 5.2** [8], [11], [12], [21, cap. 3].

**Paragrafo 5.3:** [21, cap. 3 §5].

**Paragrafo 5.4:** [12, cap. 2], [21, cap. 10].

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

# Capitolo 6

# Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Per semplicità ci limiteremo ad equazioni lineari in due variabili. Considereremo cioè soltanto equazioni della forma:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \mu u = f(x, y), \tag{6.1}$$

dove $a$, $b$, $c$, $\alpha$, $\beta$, $\mu$ ed $f$ sono funzioni $C^1$ di $x$ e di $y$, mentre $u$ è la funzione incognita (delle variabili $x$ e $y$). Cerchiamo soluzioni di classe $C^2$.

Come vedremo, nello studio di questo tipo di equazioni riveste particolare importanza la cosiddetta *parte principale* cioè quella parte di equazione che contiene le derivate seconde (e solo quelle).

**Esempio 6.0.6.** Consideriamo l'equazione

$$\underbrace{u_{xx} + u_{xy} - (x^2+1)u_{yy}}_{\text{Parte principale}} - 3u_x + \sin(x)u_y - u(x) = e^x.$$

La sua parte principale è l'espressione $u_{xx} + u_{xy} - (x^2+1)u_{yy}$.

## 6.1 Problema di Cauchy e classificazione

Per le EDP del primo ordine il problema di Cauchy consiste nella ricerca di una soluzione il cui grafico contiene una curva $\Gamma$ data. Per quelle del secondo ordine si richiede una condizione in più: che la derivata direzionale della soluzione nella direzione normale a $\Gamma$ assuma dei valori assegnati.

Come nel caso delle equazioni del primo ordine, sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e sia $\Gamma : I \to \Omega$, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, una curva in $\Omega$ data da $t \mapsto \big(\xi(t), \eta(t), \zeta(t)\big)$. Supponiamo che le funzioni $\xi$, $\eta$ e $\zeta$ siano di classe $C^1$ e consideriamo la curva in $\mathbb{R}^2$ data da $t \mapsto \gamma(t) = \big(\xi(t), \eta(t)\big)$; cioè la proiezione ortogonale di $\Gamma$ sul piano $xy$.

Definiamo poi, per ogni $t \in I$ il vettore

$$n(t) = \frac{\big(-\eta'(t), \xi'(t)\big)}{\|\gamma'(t)\|} \in \mathbb{R}^2$$

e osserviamo che per ogni $t \in I$, $\|n(t)\| = 1$ e $n(t)$ e $\gamma'(t)$ sono ortogonali.[1]

Assegnata una funzione $\delta : I \to \mathbb{R}$ di classe $C^1$, diremo che $u$ è una soluzione (locale) del problema di Cauchy:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{6.2a}$$
$$u\big(\xi(t), \eta(t)\big) = \zeta(t), \quad \forall t \in I, \tag{6.2b}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}\big(\xi(t), \eta(t)\big) = \delta(t), \quad \forall t \in I, \tag{6.2c}$$

se esiste un intorno $\tilde{U}$ di $\gamma(I)$ tale che $u : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ è una soluzione di (6.2a) che soddisfa identicamente (6.2b) e (6.2c).

In altre parole, le condizioni (6.2b)-(6.2c) impongono dei vincoli sulla soluzione lungo la curva $\gamma(t)$, per questo diremo che i dati iniziali sono assegnati lungo la curva $\gamma$.

### 6.1.1 Linee caratteristiche

Cerchiamo di dedurre dalle condizioni (6.2b)-(6.2c) il valore delle derivate parziali seconde della soluzione $u$ lungo la curva $\gamma$. La possibilità di farlo è chiaramente una condizione necessaria per l'esistenza della soluzione.

Dalle (6.2b)-(6.2c), derivando la prima rispetto a $t$, si ricavano $u_x\big(\gamma(t)\big)$ e $u_y\big(\gamma(t)\big)$; infatti il sistema, per $t$ fissato,

$$\begin{cases} u_x\big(\gamma(t)\big)\xi'(t) + u_y\big(\gamma(t)\big)\eta'(t) = \zeta'(t), \\ -u_x\big(\gamma(t)\big)\eta'(t) + u_y\big(\gamma(t)\big)\xi'(t) = \delta(t)\|\gamma'(t)\|, \end{cases}$$

è risolubile nelle incognite $u_x\big(\gamma(t)\big)$ e $u_y\big(\gamma(t)\big)$ perché, per la regolarità di $\gamma$,

$$\det \begin{pmatrix} \xi'(t) & \eta'(t) \\ -\eta'(t) & \xi'(t) \end{pmatrix} = \big(\xi'(t)\big)^2 + \big(\eta'(t)\big)^2 \neq 0.$$

Poniamo

$$p_0(t) = u_x\big(\gamma(t)\big), \tag{6.3}$$
$$q_0(t) = u_y\big(\gamma(t)\big). \tag{6.4}$$

[1] Per vederlo basta osservare che $\|\big(-\eta'(t), \xi'(t)\big)\| = \sqrt{\big(\eta'(t)\big)^2 + \big(\xi'(t)\big)^2} = \|\gamma'(t)\|$ e che

$$\langle n(t), \gamma'(t)\rangle = \frac{-\eta'(t)\xi'(t) + \eta'(t)\xi'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = 0.$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Per la (6.2a)

$$a\big(\gamma(t)\big)u_{xx}\big(\gamma(t)\big) + b\big(\gamma(t)\big)u_{xy}\big(\gamma(t)\big) + c\big(\gamma(t)\big)u_{yy}\big(\gamma(t)\big) = \pi_0(t), \tag{6.5}$$

dove si è posto[2]

$$\pi_0(t) = f\big(\gamma(t)\big) - \alpha\big(\gamma(t)\big)p_0(t) - \beta\big(\gamma(t)\big)q_0(t) - \mu\big(\gamma(t)\big)\zeta(t).$$

Derivando le (6.3)-(6.4) rispetto a $t$ e mettendo a sistema con la (6.5) si cercano di determinare, per $t$ fissato, i valori di $u_{xx}\big(\gamma(t)\big)$, $u_{xy}\big(\gamma(t)\big)$ e di $u_{yy}\big(\gamma(t)\big)$:

$$\begin{cases} u_{xx}\big(\gamma(t)\big)\xi'(t) + u_{xy}\big(\gamma(t)\big)\eta'(t) = p_0'(t), \\ u_{xy}\big(\gamma(t)\big)\xi'(t) + u_{yy}\big(\gamma(t)\big)\eta'(t) = q_0'(t), \\ a\big(\gamma(t)\big)u_{xx}\big(\gamma(t)\big) + b\big(\gamma(t)\big)u_{xy}\big(\gamma(t)\big) + c\big(\gamma(t)\big)u_{yy}\big(\gamma(t)\big) = \pi_0(t). \end{cases}$$

Il sistema ha un'unica soluzione $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ (omettiamo l'indicazione della dipendenza da $t$) se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} \xi' & \eta' & 0 \\ 0 & \xi' & \eta' \\ a & b & c \end{pmatrix} = c(\xi')^2 - b\xi'\eta' + a(\eta')^2 \neq 0.$$

Si può dimostrare che se questa condizione è soddisfatta e i coefficienti sono sufficientemente regolari allora è possibile determinare tutte le derivate successive della soluzione lungo la curva $\gamma$.

Un vettore $(\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tale che

$$c\nu_1^2 - b\nu_1\nu_2 + a\nu_2^2 = 0, \tag{6.6}$$

determina una *direzione caratteristica*. Una curva regolare tangente in ogni suo punto ad una direzione caratteristica è detta *linea caratteristica*.

Osserviamo che il numero di direzioni caratteristiche in un punto fissato dipende solo dal discriminante $b^2 - 4ac$ dell'equazione (6.6).

### 6.1.2 Classificazione

Le equazioni della forma (6.1) si classificano punto per punto a seconda del numero di direzioni caratteristiche. Più precisamente:

**Definizione 6.1.1.** Fissato un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, si dice che in $(x_0, y_0)$ l'equazione (6.1) è:

1. **ellittica** se $[b(x_0, y_0)]^2 - 4a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) < 0$;
2. **parabolica** se $[b(x_0, y_0)]^2 - 4a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) = 0$;

[2] Ricordiamo che $u\big(\gamma(t)\big) = \zeta(t)$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

3. **iperbolica** se $[b(x_0, y_0)]^2 - 4a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) > 0$.

Se l'equazione è ellittica (risp. parabolica o iperbolica) in tutti i punti di un aperto $W \subset \Omega$ allora si dice che è ellittica (risp. parabolica o iperbolica) in $W$.

Osserviamo che, nel caso in cui i coefficienti $a$, $b$ e $c$ dell'equazione (6.1) siano costanti allora è dello stesso tipo in tutti i punti del piano $xy$.

**Esempio 6.1.2.** L'equazione di Tricomi:

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{6.7}$$

è ellittica in ogni punto del semipiano $y > 0$, iperbolica in ogni punto del semipiano $y < 0$ ed è parabolica nei punti della retta $y = 0$. Infatti, fissato $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, nell'equazione (6.7) $a(x_0, y_0) = y_0$, $b(x_0, y_0) = 0$ e $c(x_0, y_0) = 1$; quindi $b^2 - 4ac = -4y_0$.

Supponiamo che la (6.1) sia dello stesso tipo in tutti i punti di $\Omega$. Si può dimostrare, sotto opportune ipotesi di regolarità dei coefficienti dell'equazione, che con un opportuno cambiamento di coordinate $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, la (6.1) può sempre essere riportata ad una (ed una sola) delle seguenti forme canoniche:

1. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \ldots = 0$: caso ellittico;

2. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \ldots = 0$ (equivalentemente $u_{\xi\eta} + \ldots = 0$): caso iperbolico;

3. $u_{\eta\eta} + \ldots = 0$: caso parabolico;

qui i puntini stanno ad indicare termini che contengono solo derivate di ordine inferiore al secondo (anche nullo). Abbiamo visto come queste equazioni siano originate da problemi fisici di tipo essenzialmente diverso.

Non entriamo nei dettagli del metodo per determinare le trasformazioni necessarie per portare le equazioni in forma canonica (metodo che è intimamente legato alle caratteristiche). Ci limitiamo a mostrare che i cambiamenti di coordinate 'buoni' non alterano il tipo di un'equazione.

Osserviamo un cambiamento di variabili non singolare (cioè con jacobiano non nullo) non altera il segno del discriminante della (6.6) corrispondente all'equazione con le variabili cambiate. Per vederlo, effettuiamo il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y), \end{aligned}$$

e consideriamo

$$U\big(\xi(x, y), \eta(x, y)\big) = u(x, y).$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Per la formula di derivazione delle funzioni composte si ottiene

$$\begin{aligned} u_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x, \quad u_{xx} =& U_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + U_{\eta\eta}\eta_x^2 \\ &+ U_\xi \xi_{xx} + U_\eta \eta_{xx}, \\ u_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y, \quad u_{yy} =& U_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + U_{\eta\eta}\eta_y^2 \\ &+ U_\xi \xi_{yy} + U_\eta \eta_{yy}. \\ u_{xy} =& U_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + U_{\xi\eta}\xi_x\eta_y + U_{\xi\eta}\xi_y\eta_x \\ &+ U_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + U_\xi \xi_{xy} + U_\eta \eta_{xy}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Da cui si ottiene la seguente equazione per $U$:

$$AU_{\xi\xi} + BU_{\xi\eta} + CU_{\eta\eta} + \ldots = 0$$

dove i puntini sono al posto dei termini contenenti derivate di $U$ di ordine inferiore al secondo (anche nullo), e

$$\begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \\ B &= a\xi_x\eta_y + b\xi_x\eta_y + b\xi_y\eta_x + c\xi_y\eta_y, \\ C &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2. \end{aligned}$$

Da cui segue la relazione

$$B^2 - 4AC = J^2(b^2 - 4ac),$$

dove

$$J = \det \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}$$

è il determinante jacobiano della trasformazione di coordinate. Questo prova quanto affermato.

Si osservi inoltre che la relazione appena provata dimostra anche che **una trasformazione di coordinate non singolare porta direzioni caratteristiche in direzioni caratteristiche**.

### 6.1.3 Caratteristiche ed equazioni a coefficienti costanti

Le equazioni a coefficienti costanti hanno una grande importanza. Infatti, come visto nel paragrafo precedente, con opportune trasformazioni ci si può sempre ridurre ad equazioni di questo tipo. L'interesse non è solo di natura teorica: i coefficienti dell'equazione rappresentano solitamente le proprietà del mezzo in cui avviene il processo studiato, dunque nel caso di un mezzo omogeneo e isotropo ci aspettiamo coefficienti costanti.

Per interpretare il significato delle linee caratteristiche nel caso di equazioni a coefficienti costanti, consideriamo l'equazione

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0, \tag{6.9}$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

con $A$, $B$ e $C$ costanti $C \neq 0$. Cerchiamo di determinare i valori di $\lambda$ tali che per ogni $f$ di classe $C^2$ assegnata $u(x,y) = f(x+\lambda y)$ sia soluzione. Sostituendo otteniamo

$$Af''(x+\lambda y) + B\lambda f''(x+\lambda y) + C\lambda^2 f''(x+\lambda y) = 0.$$

Se vogliamo che questa uguaglianza sia soddisfatta per ogni funzione $f$, deve essere

$$C\lambda^2 + B\lambda + A = 0. \tag{6.10}$$

Nel caso $B^2 - 4AC < 0$ non ci sono soluzioni (reali) della forma richiesta. Se $B^2 - 4AC \geq 0$ denotiamo con $\lambda_1$ e $\lambda_2$ le radici (eventualmente coincidenti) di (6.10). Le famiglie di rette

$$x + \lambda_1 y = c_1 \qquad x + \lambda_2 y = c_2,$$

con $c_1$ e $c_2$ costanti, sono esattamente le linee caratteristiche della (6.9).

Abbiamo già osservato che, nel caso in cui i coefficienti $a$, $b$ e $c$ dell'equazione (6.1) siano costanti allora essa è dello stesso tipo in tutti i punti del piano $xy$. La tabella 6.1 riporta delle trasformazioni che riconducono la parte principale dell'equazione alla sua forma normale.

| Tipo | Trasformazione di variabili | | linee caratteristiche |
|---|---|---|---|
| Ellittica: $b^2-4ac<0$ | $\begin{cases} \xi = \frac{2ay-bx}{\sqrt{4ac-b^2}} \\ \eta = x \end{cases}$ | | Non ci sono linee caratteristiche. |
| Parabolica $b^2-4ac=0$ | $a=0$ e $b=0$ | $\begin{cases} \xi = x \\ \eta = y \end{cases}$ | $x = \text{cost.}$ |
| | $a\neq 0$ o $b\neq 0$ | $\begin{cases} \xi = ay - \frac{b}{2}x \\ \eta = x \end{cases}$ | $2ay - bx = \text{cost.}$ |
| Iperbolica: $b^2-4ac>0$ | $a\neq 0$ | $\begin{cases} \xi = ay + \frac{1}{2}\big(-b+\sqrt{b^2-4ac}\big)x \\ \eta = ay + \frac{1}{2}\big(-b-\sqrt{b^2-4ac}\big)x \end{cases}$ | $2ay + \big(-b+\sqrt{b^2-4ac}\big)x = \text{cost.}$<br>$2ay + \big(-b-\sqrt{b^2-4ac}\big)x = \text{cost.}$ |
| | $a=0$ | $\begin{cases} \xi = x \\ \eta = by - cx \end{cases}$ | $x = \text{cost.}$<br>$by - cx = \text{cost.}$ |

Tabella 6.1: Riduzione a forma canonica delle equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

### 6.1.4 Soluzione di D'Alembert per l'equazione delle onde

Applichiamo quanto discusso finora alla risoluzione del seguente problema di Cauchy per l'equazione delle onde:

$$a^2 u_{xx} - u_{tt} = 0, \tag{6.11a}$$
$$u(x,0) = \zeta(x), \tag{6.11b}$$
$$u_t(x,0) = \delta(x). \tag{6.11c}$$

Si vede subito che le linee caratteristiche sono le rette

$$x - at = c_1 \qquad x + at = c_2.$$

Pertanto, comunque assegnate due funzioni $f$ e $g$ di classe $C^2$, $v(x,t) = f(x-at)$ e $w(x,t) = g(x+at)$ soddisfano l'equazione (6.11a). La linearità ci assicura che la stessa affermazione vale per $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$. Usiamo le condizioni (6.11b)-(6.11c) per trovare $f$ e $g$ in modo tale che $u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$ sia soluzione di (6.11).

Imponendo le (6.11b)-(6.11c), si ottiene

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) + g(x) = \zeta(x), \\ u_t(x,0) = -af'(x) + ag'(x) = \delta(x), \end{cases}$$

da cui si ricava subito

$$\begin{cases} g(x) = \zeta(x) - f(x), \\ f'(x) = \frac{a\zeta'(x) - \delta(x)}{2a}. \end{cases}$$

Dalla seconda si ottiene $f(x) = F(x) + c$ con $c$ una costante e $F$ una primitiva di $(a\zeta'(x) - \delta(x))/(2a)$, dalla prima si deduce quindi $g(x) = \zeta(x) - F(x) - c$. Osserviamo che $f$ e $g$ sono determinate a meno di una costante $c$; tale indeterminazione tuttavia scompare nella soluzione $u$ del problema di Cauchy.

Riassumendo, la soluzione di (6.11) si può scrivere come la sovrapposizione (cioè la somma) delle 'onde viaggianti' $f(x-at)$ e $g(x+at)$ che si spostano con velocità $a$:

$$\begin{aligned} u(x,t) = & f(x-at) + g(x+at) = \int_{x+at}^{x-at} \frac{a\zeta'(s) - \delta(s)}{2a}\, \mathrm{d}s + \zeta(x+at) \\ & = \frac{\zeta(x+at) + \zeta(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \delta(s)\, \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{6.12}$$

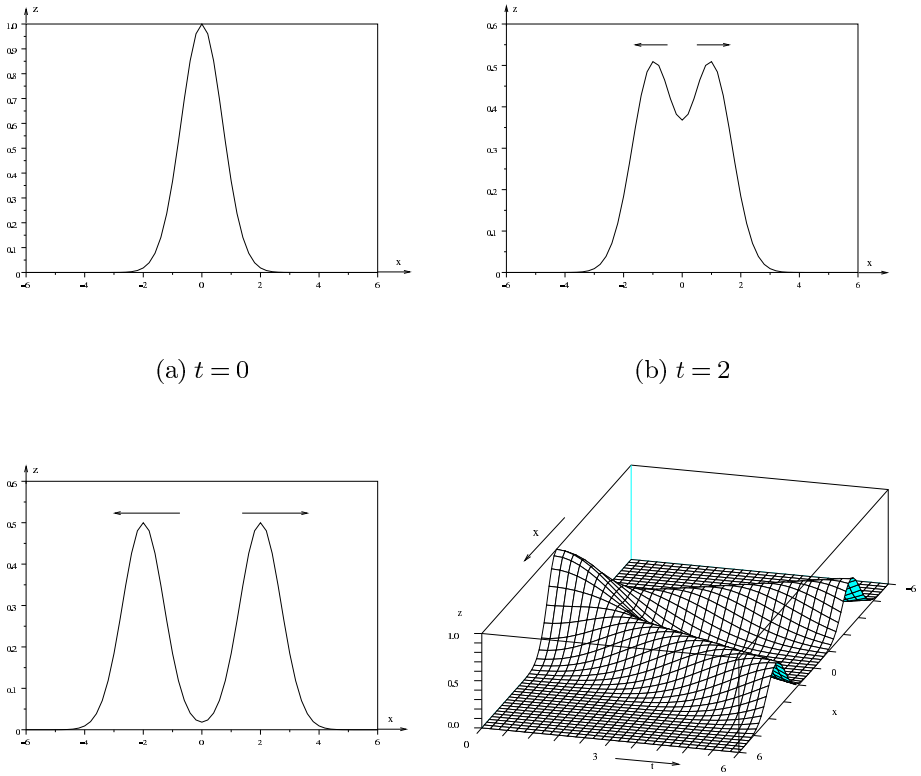
La formula (6.12) si chiama *formula di D'Alembert*.

**Esercizio 6.1.3.** Determinare la soluzione del problema di Cauchy usando la formula di D'Alembert

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, \\ u_t(x,0) = 0, \end{cases}$$

e discuterne il significato fisico. Spiegare in particolare la Figura 6.1

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003



(a) $t = 0$ (b) $t = 2$

(c) $t = 4$ (d) $z = u(x,t)$

Figura 6.1: Onde viaggianti e superficie soluzione per l'esempio 6.1.3

### 6.1.5 Riduzione ad un sistema del primo ordine

Il problema di Cauchy per un'equazione lineare del secondo ordine può essere ridotto (localmente) ad un problema di Cauchy per un sistema di equazioni lineari del primo ordine.

Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ la curva lungo cui sono assegnati i dati iniziali. Supponiamo che essa non sia tangente ad una direzione caratteristica in nessun punto.

Fissato $t_0 \in I$ si può trovare, per la regolarità, un intervallo $\bar{I} \subset I$ contenente $t_0$ ed una trasformazione di coordinate definita in un intorno di $\gamma(t_0)$ che porta $\gamma\,|_{\bar{I}}$ nella curva $t \mapsto (t, 0)$, $t \in \bar{I}$. Almeno localmente, quindi, si può assumere che la curva su cui sono assegnati i dati iniziali sia l'asse $x$; cioè che le condizioni (6.2b)-(6.2c) si possano scrivere

$$u(x,0) = \zeta(x),$$
$$u_y(x,0) = \delta(x).$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Osserviamo anche che $u_x(x,0) = \zeta'(x)$. L'ipotesi che $\gamma$ non sia tangente in nessun punto ad una direzione caratteristica si traduce nell'ipotesi che l'asse $x$ non sia una linea caratteristica.

Sia $u \in C^2$, introduciamo le nuove funzioni $u^1 = u_x$ e $u^2 = u_y$ e poniamo $u^3 = u$. Chiaramente, queste nuove funzioni non sono indipendenti tra di loro ma sono legate per esempio dalle relazioni $u^1_y = u^2_x$ e $u^3_y = u_2$. Il problema (6.2) è dunque equivalente al sistema

$$\begin{cases} au^1_x + bu^1_y + cu^2_y + \alpha u^1 + \beta u^2 + \gamma u = f(x,y), \\ u^1_y - u^2_x = 0, \\ u^3_y = u_2, \\ u^1(x,0) = \zeta'(x), \\ u^2(x,0) = \delta(x), \\ u^3(x,0) = \zeta(x). \end{cases} \tag{6.13}$$

Si osservi che l'ipotesi che abbiamo fatto che l'asse $x$ non sia tangente a nessuna direzione caratteristica (per l'equazione del secondo ordine) si traduce nell'ipotesi corrispondente per il sistema (6.13).

## 6.2 Trasformata di Laplace e problemi su domini illimitati.

Un metodo per determinare la soluzione di problemi ai valori iniziali in domini illimitati, specialmente semi-infiniti, si avvale di una tecnica nota come *trasformata di Laplace*.

Ad una funzione continua a tratti $u : I \to \mathbb{R}$, con $I$ un intervallo che contiene $[0, +\infty)$, che 'non cresce troppo' associeremo un'altra funzione $\mathcal{L}u$, detta *trasformata di Laplace* di $u$.

Più precisamente, se esistono $a, c > 0$ con la proprietà che $|u(t)| < ce^{at}$ per $t$ sufficientemente grande, diremo che $u$ è *di ordine esponenziale* $a$. Osserviamo che se $u$ è di ordine $a$ allora è anche di ordine $a + \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, per esempio $u(t) = t^k$, con $k \in \mathbb{N}$, è di ordine esponenziale $a$ per ogni $a > 0$.

Data una funzione $u$ di ordine esponenziale e continua a tratti, poniamo[3]

$$(\mathcal{L}u)(s) = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-st}\, \mathrm{d}t. \tag{6.14}$$

per tutti i valori di $s$ per cui il secondo membro è finito.

Si può vedere che, se l'integrale a secondo membro della (6.14) è finito per un qualche $s_0$ allora lo è per ogni $s \geq s_0$. Definiamo l'*ascissa di convergenza* $\sigma(u)$

[3] Si definisce

$$\int_0^{+\infty} g(t)\, \mathrm{d}t = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Espressioni del genere di quella a sinistra si chiamano *integrali impropri*

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

come l'estremo inferiore dell'insieme degli $s$ per cui tale integrale è finito. Cioè poniamo

$$\sigma(u) = \inf\left\{ s \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} u(t)e^{-st}\, \mathrm{d}t < +\infty \right\}.$$

Chiaramente $\mathcal{L}u$ è definita su tutto $(\sigma(u), +\infty)$.

Si osservi che se $u$ è di ordine esponenziale $a$ allora $\sigma(u) \leq a$. In particolare, le funzioni limitate sono di ordine esponenziale 0, pertanto, in tale caso $\sigma(u) \leq 0$.

**Esercizio 6.2.1.** Determinare l'ascissa di convergenza per $u(t) = |t|$ e per $u(t) = e^{3t}$.

La trasformata di Laplace porta la funzione assegnata $u$ della variabile $t$ (con $t$ nel cosiddetto *dominio temporale*) nella funzione $U$ della variabile $s$ (appartenente al *dominio della trasformata*).

Osserviamo che $u \mapsto (\mathcal{L}u)$ è un operatore lineare, cioè

$$\big(\mathcal{L}(\alpha u_1 + \beta u_2)\big)(t) = \alpha\,(\mathcal{L}u_1)(t) + \beta\,(\mathcal{L}u_2)(t),$$

per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u_1, u_2$ funzioni come sopra.

Si può dimostrare che la trasformazione di Laplace è un operatore iniettivo, nel senso che se $u_1 \neq u_2$ allora $(\mathcal{L}u_1) \neq (\mathcal{L}u_2)$. Posto $U(s) = (\mathcal{L}u)(s)$, esiste una procedura per risalire dalla conoscenza di $U$ a quella di $u$, tuttavia non ci soffermeremo su di essa. In tale caso scriviamo $u(t) = (\mathcal{L}^{-1}U)(t)$. La tabella 6.2 riporta la trasformata di alcune funzioni comuni.

L'importanza della trasformata di Laplace è che essa trasforma la derivazione di funzioni nel dominio temporale nell'operazione di moltiplicazione nel dominio della trasformata. Cioè:

$$\big(\mathcal{L}u'\big)(s) = s\,(\mathcal{L}u)(s) - u(0), \tag{6.15}$$

$$\big(\mathcal{L}u''\big)(s) = s^2\,(\mathcal{L}u)(s) - su(0) - u'(0). \tag{6.16}$$

Queste formule discendono dalla definizione di $\mathcal{L}$ usando l'integrazione per parti. A causa di queste formule, la trasformata di Laplace risulta particolarmente utile per risolvere alcuni problemi per le equazioni differenziali ordinarie. In pratica, mediante la trasformata di Laplace, si trasforma il problema differenziale in un problema algebrico.

**Esempio 6.2.2.** Consideriamo il seguente problema di Cauchy per equazioni ordinarie del secondo ordine per $t > 0$:

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = 0, \\ u(0) = 0, u'(0) = 1. \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace ad entrambe i membri dell'equazione differenziale ed usiamo la formula (6.16). Posto $U(s) = (\mathcal{L}u)(s)$, si ottiene:

$$s^2U(s) - 1 + U(s) = 0;$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

| $u(t)$ | $(\mathcal{L}u)(s)$ | $\sigma(u)$ |
|---|---|---|
| $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ | 0 |
| $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ | 0 |
| $\sinh \omega t$, $\omega > 0$ | $\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$ | 0 |
| $\cosh \omega t$, $\omega > 0$ | $\frac{s}{s^2-\omega^2}$ | 0 |
| $e^{\omega t}$, $\omega \in \mathbb{R}$ | $\frac{1}{s-\omega}$ | $\omega$ |
| $t^n H(t)$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | 0 |
| $H(t)$ | $1/s$ | 0 |
| $c$ (costante) | $c/s$ | 0 |
| $\frac{\omega e^{-\omega^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi t^3}}$ | $e^{-\omega\sqrt{s}}$ | 0 |
| $\frac{e^{-\omega^2/(4t)}}{\sqrt{\pi t}}$ | $\frac{e^{-\omega\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$ | 0 |
| $\operatorname{erf}(\sqrt{t})$ | $\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$ | 0 |
| $\operatorname{erfc}\left(\frac{\omega}{\sqrt{4t}}\right)$ | $\frac{e^{-\omega\sqrt{s}}}{s}$ | 0 |

La funzione $H$, detta *funzione a gradino o di Heaviside*, è definita da:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione erf, detta *funzione degli errori*, è definita da

$$\operatorname{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-r^2}\, \mathrm{d}r,$$

mentre

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(\xi) =& 1 - \operatorname{erf}(\xi) \\ =& \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\xi^{+\infty} e^{-r^2}\, \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Le funzioni erf ed erfc sono usate nella teoria della probabilità.

Tabella 6.2: Alcune trasformate di Laplace

da cui $U(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Consultando la tabella 6.2, scopriamo che la trasformata della funzione $t \mapsto \sin t$ è la funzione $s \mapsto \frac{1}{s^2+1}$; pertanto $u(t) = (\mathcal{L}^{-1}U)(t) = \sin t$, che è proprio la soluzione del problema di Cauchy.

Vogliamo utilizzare una strategia simile per le equazioni differenziali alle derivate parziali. Finora abbiamo definito la trasformata di Laplace solo per funzioni di una sola variabile. Data $u = u(x,t)$ **definiamo** la trasformata di $u$ come la trasformata della funzione $t \mapsto u(x,t)$, cioè trasformiamo rispetto alla variabile $t$ considerando $x$ come un parametro. In altre parole si definisce

$$(\mathcal{L}u)(x,s) = \int_0^{+\infty} u(x,t) e^{-st}\, \mathrm{d}t.$$

Abbiamo, come nella (6.15) e (6.16)

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u_t)(x,s) &= s\,(\mathcal{L}u)(x,s) - u(x,0), \\ (\mathcal{L}u_{tt})(x,s) &= s^2\,(\mathcal{L}u)(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0). \end{aligned}$$

D'altra parte, vediamo che le derivate rispetto alla variabile spaziale $x$ diventano derivate della trasformata, infatti

$$(\mathcal{L}u_x)(x,s) = \int_0^{+\infty} u_x(x,t) e^{-st}\, \mathrm{d}t = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} u(x,t) e^{-st}\, \mathrm{d}t = (\mathcal{L}u)_x(x,s).$$

Ne segue che la trasformata di Laplace trasforma equazioni alle derivate parziali in equazioni ordinarie.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{L}(\alpha u_1 + \beta u_2)$ | $=$ | $\alpha(\mathcal{L}u_1) + \beta(\mathcal{L}u_2)$ | $: \ s > \max\{\sigma(u_1), \sigma(u_2)\}$ |
| $(\mathcal{L}[u(ct)])(s)$ | $=$ | $\frac{1}{c}(\mathcal{L}u)(s/c)$ | $: \ c > 0, \ s > s\sigma(u)$ |
| $(\mathcal{L}[u(t-t_0)])(s)$ | $=$ | $e^{-t_0 s}(\mathcal{L}u)(s)$ | $: \ t_0 > 0, \ s > \sigma(u)$ |
| $(\mathcal{L}[e^{at}u(t)])(s)$ | $=$ | $(\mathcal{L}u)(s-a)$ | $: \ a \in \mathbb{R}, \ s > \sigma(u) + a$ |
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathcal{L}u)(s)$ | $=$ | $(\mathcal{L}[-tu(t)])(s)$ | $: \ s > \sigma(u)$ |
| $\left(\mathcal{L}\left[\int_0^t u(r)\ \mathrm{d}r\right]\right)(s)$ | $=$ | $\dfrac{(\mathcal{L}u)(s)}{s}$ | $: \ s > \max\{\sigma(u), 0\}$ |
| $(\mathcal{L}u')(s)$ | $=$ | $s(\mathcal{L}u)(s) + u(0)$ | $: \ s > \max\{\sigma(u), \sigma(u')\}$ |
| $(\mathcal{L}(u * v))(s)$ | $=$ | $(\mathcal{L}u)(s)(\mathcal{L}v)(s)$ | $: \ s > \max\{\sigma(u_1), \sigma(u_2)\}$ |

Tabella 6.3: Alcune proprietà della trasformata di Laplace

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

**Esempio 6.2.3.** Se applichiamo la trasformata di Laplace ad entrambe i membri dell'equazione $u_t - u_{xx} = 0$, otteniamo l'equazione ordinaria (nella variabile $x$, $s$ deve essere considerato un parametro) $sU(x,s) - u(x,0) - U_{xx}(x,s) = 0$, dove si è posto $U(x,s) = (\mathcal{L}u)(x,s)$.

Un risultato particolarmente utile per i nostri scopi è il cosiddetto *teorema della convoluzione*:

**Teorema 6.2.4.** *Date due funzioni $u$ e $v$ continue a tratti e di ordine esponenziale, poniamo $U = \mathcal{L}u$ e $V = \mathcal{L}v$. Si ha*

$$(\mathcal{L}(u * v))(s) = U(s)V(s),$$

*dove*

$$(u * v)(t) = \begin{cases} \int_0^t u(t-\tau)v(\tau)\ \mathrm{d}\tau & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

*è detta* convoluzione *di $u$ e $v$.*

Si osservi che $u * v = v * u$, infatti, con un cambio di variabile,

$$\int_0^t u(t-\tau)v(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t u(\tau)v(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau.$$

Alcune delle principali proprietà della trasformata di Laplace sono raccolte nella tabella 6.3.

**Esempio 6.2.5.** Determiniamo l'antitrasformata della funzione $s \mapsto 1/(s^2-1)$. Possiamo scrivere,

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2-1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^t])(s) - \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^{-t}])(s) \\ &= \left(\mathcal{L}\left[\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right]\right)(s). \end{aligned}$$

**Antitrasformata di Laplace.**

Supponiamo di conoscere una funzione $F$ che sappiamo essere la trasformata di Laplace di una qualche funzione $f$; cioè $(\mathcal{L}f) = F$. Come si può, in generale, determinare $f$? Se $a \in \mathbb{R}$ è tale che a destra della retta complessa $\operatorname{Re} z = a$, $F$ risulti estendibile mediante una funzione analitica, si può dimostrare che

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \to +\infty} \int_{a-iR}^{a+iR} e^{st} F(s)\, \mathrm{d}s.$$

Questa è nota come *formula di inversione di Riemann-Fourier*.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Quindi l'antitrasformata è la funzione $t \mapsto \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. Osserviamo che

$$\sigma\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) = 1.$$

Un esempio che ci servirà in seguito è il seguente.

**Esempio 6.2.6.** Sia $u$ una funzione di ordine esponenziale. Definiamo

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Chiaramente $(\mathcal{L}v) = (\mathcal{L}u)$. Dato $t_0 > 0$, calcoliamo la trasformata di Laplace della funzione $t \mapsto v(t - t_0)$. Si ha

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{L}[v(t-t_0)]\right)(s) &= \int_0^{+\infty} v(t-t_0) e^{-st}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0}^{+\infty} v(t-t_0) e^{-st}\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

con il cambiamento di variabile $\tau = t - t_0$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty} v(\tau) e^{-s\tau} e^{-st_0}\, \mathrm{d}t \\ &= e^{-st_0} (\mathcal{L}v)(s) = e^{-st_0} (\mathcal{L}u)(s). \end{aligned}$$

Questa formula permette di antitrasformare le funzioni del tipo $e^{-st_0} F(s)$ se si conosce $\mathcal{L}^{-1} F = f$. Infatti, si ottiene

$$\left(\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-st_0} F(s)\right]\right)(t) = \begin{cases} f(t - t_0) & t > t_0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si confronti questa formula con la tabella 6.3.

### 6.2.1 Equazione di diffusione.

La trasformata di Laplace fornisce un metodo per risolvere alcuni problemi ai valori iniziali per l'equazione di diffusione in domini semi-infiniti. Illustreremo questo metodo attraverso due problemi fisici.

**Diffusione di inquinanti in una dimensione.**

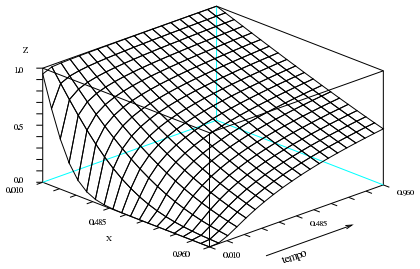



Figura 6.2: Diffusione di un inquinante, $k = 1$.

Sia $u(x,t)$ la concentrazione di un inquinante disciolto in un fluido nel dominio $x > 0$ (che schematizza, per esempio, un tratto di conduttura idraulica). Supponiamo che $u$ sia inizialmente nulla in tutti i punti di ascissa positiva e che nel punto di ascissa $x = 0$ essa sia mantenuta costantemente nel tempo uguale ad 1, per esempio a causa di una infiltrazione nella conduttura. Supponiamo inoltre che l'inquinante non si disperda o vada in altro modo distrutto e che la conduttura sia molto lunga. Vogliamo conoscere l'evoluzione della concentrazione dell'inquinante.

A meno della scelta di opportune unità di misura, la determinazione della densità si riduce a risolvere il seguente problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u(0,t) = 1, & t > 0, \end{cases} \tag{6.17}$$

$k > 0$, a cui aggiungiamo la condizione (fisicamente sensata) che $u(x,t)$ si mantenga limitata. Osserviamo che i valori al contorno non sono continui (nel punto $(0,0)$) quindi non possiamo aspettarci una soluzione 'classica' in tutto il quarto di piano $[0,\infty) \times [0,\infty)$. Tuttavia, il metodo della trasformata di Laplace ci permetterà di determinare una soluzione regolare in $(0,\infty) \times (0,\infty)$.

Applicando la trasformata di Laplace ad entrambe i membri dell'equazione differenziale e tenendo conto della condizione iniziale $u(x,0) = 0$ si ottiene $sU(x,s) - kU_{xx}(x,s) = 0$, dove $U(x,s) = (\mathcal{L}u)(x,s)$. Risolvendo questa equazione differenziale si ricava

$$U(x,s) = a(s)e^{-x\sqrt{s/k}} + b(s)e^{x\sqrt{s/k}}.$$

Poiché cerchiamo soluzioni limitate, deve essere $b(s) = 0$. Cioè

$$U(x,s) = a(s)e^{-x\sqrt{s/k}}.$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Applichiamo poi la trasformata alla condizione al bordo $u(0,t) = 1$, $t > 0$ ottenendo $U(0,s) = 1/s$. Da questo segue $a(s) = 1/s$, e quindi

$$U(x,s) = \frac{e^{-x\sqrt{s/k}}}{s}.$$

Antitrasformando la $U$ così ottenuta (si vedano le tabelle 6.2 e 6.3), si perviene alla soluzione di (6.17) (si veda la figura 6.2):

$$u(x,t) = \operatorname{erfc}\left(x/\sqrt{4kt}\right).$$

Osserviamo che, mediante la trasformata di Laplace il problema (6.17) è stato convertito nel seguente problema di Cauchy (per le equazioni ordinarie) con funzione incognita $U$.

$$\begin{cases} kU_{xx}(x,s) - sU(x,s) = 0, \\ U(0,s) = 1/s. \end{cases}$$

**Trasmissione del calore.**

Consideriamo una sbarretta semi-infinita omogenea e isotropa, che si trova inizialmente a temperatura nulla. Supponiamo che una sua estremità sia a contatto di un termostato la cui temperatura varia nel tempo secondo la legge $f(t)$. Vogliamo determinare la temperatura a distanza $l$ dal secondo estremo.

A meno della scelta di opportune unità di misura, il problema si riduce a considerare il seguente problema ai valori iniziali (analogo a 6.17)

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u(0,t) = f(t), & t > 0, \end{cases} \tag{6.18}$$

a cui aggiungiamo la condizione che $u$ si mantenga limitata.

Come nel caso precedente, posto $U = \mathcal{L}u$, si ha

$$U(x,s) = a(s)e^{-x\sqrt{s/k}}.$$

Indichiamo con $F$ la trasformata di Laplace di $f$, cioè $F = \mathcal{L}f$. La condizione $u(0,t) = f(t)$ si trasforma in $U(0,s) = F(s)$, per cui deve essere $a(s) = F(s)$. Per ottenere $u(x,t)$ si deve antitrasformare $U(x,s) = F(s)e^{-x\sqrt{s/k}}$.

Dalla tabella 6.2 si ottiene

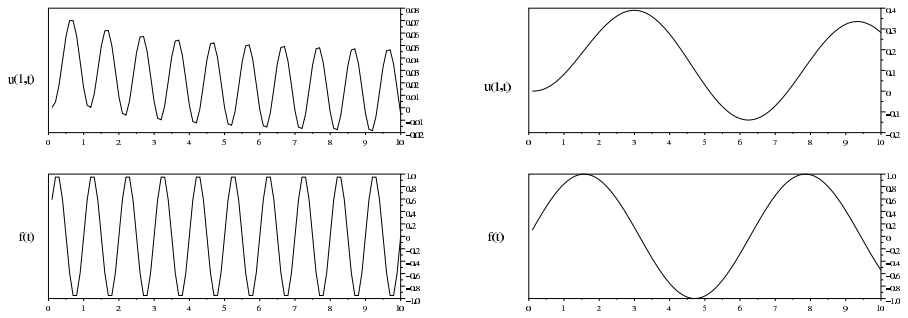
$$\left(\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-x\sqrt{s/k}}\right]\right)(t) = \frac{xe^{-x^2/(4kt)}}{\sqrt{4\pi kt^3}}.$$

Usando il teorema della convoluzione, si ottiene

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{xe^{-x^2/(4k\tau)}}{\sqrt{4\pi k\tau^3}} f(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Pertanto, la temperatura al secondo estremo della sbarretta varia con la legge $u(l,t)$. La figura 6.3 rappresenta $u(1,t)$ per diverse scelte di $f$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003




(a) $f(t) = \sin(2\pi t)$ (b) $f(t) = \sin t$

Figura 6.3: Conduzione del calore in una sbarretta semi-infinita, $k = 1$.

### 6.2.2 Equazione delle onde

Il metodo della trasformata può essere applicato anche alla propagazione delle onde in domini semi-infiniti. Illustriamo questo con un esempio.

Una corda di lunghezza infinita con un estremo in $x = 0$ si trova inizialmente in quiete lungo l'asse $x$. L'estremità in $x = 0$ è sottoposta ad uno spostamento (perturbazione) verticale periodico $f(t)$. Vogliamo determinare il moto della corda.

Ci riduciamo al problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_{tt} - k^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u_t(x,0) = 0, & x > 0, \\ u(0,t) = f(t), & t > 0, \end{cases}$$

a cui aggiungiamo la condizione che $u$ si mantenga limitata.

Trasformando entrambe i membri dell'equazione differenziale e tenendo conto delle condizioni $u(x,0) = 0$ e $u_t(x,0) = 0$ per $x > 0$, posto $U = \mathcal{L}u$, si ha

$$U_{xx} - \frac{s^2}{k^2} U = 0.$$

La trasformata della condizione $u(0,t) = f(t)$ è $U(0,s) = F(s)$, dove $\mathcal{L}f = F$. Tenendo conto della condizione di limitatezza, otteniamo

$$U(x,s) = e^{-xs/k} F(s).$$

Per trovare la soluzione dobbiamo antitrasformare $U$. Usando l'esempio 6.2.6, si ha

$$u(x,t) = \left(\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-xs/k} F(s)\right]\right)(t) = \begin{cases} f(t - x/k) & t > x/k, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Osserviamo che $k$ esprime la 'velocità' con cui si propaga la perturbazione (si veda la Figura 6.4), e che la soluzione trovata **non** è una soluzione 'classica' (cioè di classe $C^2$) infatti le sue derivate parziali hanno una discontinuità lungo la semiretta $t = x/k$, $x > 0$.

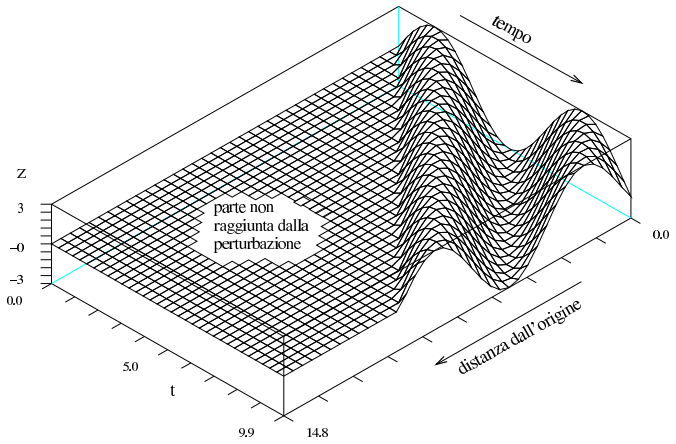



Figura 6.4: Moto della corda semi-infinita, $f(t) = 3\sin t$, $k = 1$.

## 6.3 Trasformata di Fourier e problemi su domini illimitati

La trasformata di Fourier, come quella di Laplace, è un'operatore integrale che converte l'operazione di derivazione nella moltiplicazione nel dominio della trasformata. Per questo motivo è molto utile per risolvere le equazioni differenziali.

Definiamo dapprima lo spazio di funzioni in cui lavorare. Consideriamo le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ che sono infinitamente derivabili e che, all'infinito, "decrescono rapidamente". Più precisamente, poniamo

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \begin{array}{l} \text{per ogni } p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ ed ogni } x \in \mathbb{R}, \text{ esiste} \\ C_{p,q} > 0 \text{ tale che } |x^p f^{(q)}(x)| \leq C_{p,q} \end{array} \right\}.$$

L'insieme $\mathcal{S}$ è detto *spazio di Schwartz* ed i suoi elementi sono le cosiddette *funzioni a decrescenza rapida* perché, per $f \in \mathcal{S}$, quando $x \to \pm\infty$, $f(x)$ e tutte le sue derivate tendono a zero piú velocemente di qualunque funzione razionale.

Data $f \in \mathcal{S}$, poniamo

$$\widehat{f}(\xi) \underset{\text{def.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} \, \mathrm{d}x. \tag{6.19}$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

La funzione $\widehat{f}$ è detta *trasformata di Fourier* di $f$.

**Esempio 6.3.1.** Consideriamo la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ e calcoliamone la trasformata di Fourier. Si ha

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ix\xi}\, \mathrm{d}x = e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\xi/2)^2}\, \mathrm{d}x = e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_r e^{-z^2}\, \mathrm{d}z$$

dove l'ultimo è un integrale complesso lungo la retta $r$ (parallela all'asse reale) data da $z = x + i\xi/2$, $x \in \mathbb{R}$. Per calcolarlo osserviamo che esso coincide con $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\, \mathrm{d}s$, infatti l'integrale (complesso) della funzione differenziabile $e^{-z^2}$ lungo il bordo di un rettangolo con i lati paralleli agli assi vale 0. Poiché

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\, \mathrm{d}s\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\, \mathrm{d}s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2}\, \mathrm{d}\sigma = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(s^2+\sigma^2)}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\sigma$$

(passando a coordinate polari in $\mathbb{R}^2$)

$$= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} \rho e^{-\rho^2}\, \mathrm{d}\theta\right) \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2}\, \mathrm{d}\rho = \pi.$$

si ha $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\, \mathrm{d}s = \sqrt{\pi}$. Ne segue $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$.

| $f(x)$ | $\widehat{f}(\xi)$ |
|---|---|
| $\frac{1}{x^2+w^2}$ | $\frac{\pi}{w} e^{-\lvert\xi\rvert}$ |
| $e^{-w\lvert x\rvert}$ | $\frac{2w}{\xi^2+w^2}$ |
| $e^{-wx^2}$ | $\sqrt{\frac{\pi}{w}} e^{-\frac{\xi^2}{4w}}$ |
| $\chi_{[-w,w]}(x)$ | $\frac{2\sin(w\xi)}{\xi}$ |
| $\frac{\sin(w\xi)}{\pi\xi}$ | $\chi_{[-w,w]}(\xi)$ |
| $H(x)e^{-wx}$ | $\frac{1}{w+i\xi}$ |
| $wxe^{-wx^2}$ | $-i\sqrt{\frac{\pi}{4w}}\xi e^{-\frac{\xi^2}{4w}}$ |
| per $w > 0$ | |

Tabella 6.4: Alcune trasformate di Fourier

In effetti, si può definire la trasformata di Fourier anche per una classe molto più ampia di funzioni: è, per esempio, sufficiente richiedere che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, \mathrm{d}x < +\infty.$$

In questo modo, l'integrale improprio che compare nella (6.19) è convergente. In generale, Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ per cui converga l'integrale che definisce $\widehat{f}$ nella (6.19) è detta trasformabile secondo Fourier (o *F-trasformabile*).

La tabella 6.4 elenca alcuni esempi di trasformate di Fourier (anche per funzioni non appartenenti ad $\mathcal{S}$). In essa $H$ denota la funzione di Heaviside, e $\chi_{[-w,w]}$ la funzione caratteristica dell'intervallo $[-w, w]$.

Il motivo per cui è conveniente confinare il nostro studio della trasformata di Fourier allo spazio $\mathcal{S}$ è che vale la seguente proprietà:

**Teorema 6.3.2.** *Se $f \in \mathcal{S}$ allora $\widehat{f} \in \mathcal{S}$.*

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

L'operatore che associa ad una funzione F-trasformabile $f$ la sua trasformata $\widehat{f}$ è chiaramente lineare. In particolare, questo operatore ristretto ad $\mathcal{S}$ è sia iniettivo sia suriettivo. Vale infatti il seguente *teorema di inversione*:

**Teorema 6.3.3.** *Sia $g \in \mathcal{S}$, allora, posto*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi x} \, \mathrm{d}\xi,$$

*si ha $\widehat{f} = g$.*

Conseguentemente, per $f \in \mathcal{S}$, si ha

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} \, \mathrm{d}\xi,$$

dove $\widehat{f}$ denota la trasformata di Fourier di $f$.

Una delle proprietà fondamentali della trasformata di Fourier è che essa converte la derivazione in un'operazione algebrica. Più precisamente, si può provare che per $f \in \mathcal{S}$

$$\boxed{\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{f}(\xi)}$$

dove $f^{(k)}$ denota la $k$-sima derivata di $f$.

**Esempio 6.3.4.** Vediamo come questa proprietà possa essere usata per calcolare la trasformata di Fourier di alcune funzioni. Consideriamo $g(x) = xe^{-x^2}$. Sia $f(x) = e^{-x^2}$ la funzione dell'esempio 6.3.1. Si ha

$$-2\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} -2xe^{-x^2} e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x = \widehat{f}'(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi) = i\xi\sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$

In conclusione, si ha $\widehat{g}(\xi) = -\frac{i\xi\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$

Conviene inoltre ridefinire, nell'ambito della teoria della trasformata di Fourier, la nozione di convoluzione di due funzioni. Date due funzioni $f$ e $g$ tali che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x < +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| \, \mathrm{d}x < +\infty, \tag{6.20}$$

si pone

$$f * g(x) \underset{\text{def.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) \, \mathrm{d}y.$$

Con questa definizione di convoluzione si può dimostrare che, date $f$ e $g$ come sopra,

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

La tabella 6.5 raccoglie alcune delle principali proprietà della trasformata di Fourier.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

| $f$ e $g$ funzioni che soddisfano (6.20) | | |
|---|---|---|
| $\widehat{(\alpha f+\beta g)}(\xi)$ | $=\alpha\widehat{f}(\xi)+\beta\widehat{g}(\xi)$ | per $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ |
| $\widehat{g}(\xi)$ | $=\widehat{f}(\xi-t)$ | per $g(x)=f(x)e^{itx}$ e $t\in\mathbb{R}$ |
| $\widehat{g}(\xi)$ | $=\widehat{f}(\xi)e^{-it\xi}$ | per $g(x)=f(x-t)$ e $t\in\mathbb{R}$ |
| $\widehat{f*g}(\xi)$ | $=\widehat{f(\xi)}\widehat{g}(\xi)$ | |
| $\widehat{g}(\xi)$ | $=\overline{\widehat{f}(\xi)}$ | per $g(x)=\overline{f(-x))}$ |
| $\widehat{g}(\xi)$ | $=\lambda\widehat{f}(\lambda\xi)$ | per $g(x)=f(x/\lambda)$ e $\lambda>0$ |
| $\widehat{f^{(k)}}(\xi)$ | $=(i\xi)^k\widehat{f}(\xi)$ | per $f\in\mathcal{S}$ e $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ |

Tabella 6.5: Alcune proprietà della trasformata di Fourier

**Esempio 6.3.5.** Data $g\in\mathcal{S}$, cerchiamo $f\in\mathcal{S}$ tale che

$$f''(x)-f(x)=g(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Osserviamo che questa equazione differenziale ammette infinite soluzioni, qui stiamo cercando di determinare solo quella che appartiene ad $\mathcal{S}$.

Prendendo la trasformata di entambi i membri e risolvendo rispetto a $\widehat{f}$ otteniamo

$$\widehat{f}(\xi)=-\frac{1}{1+\xi^2}\,\widehat{g}(\xi).$$

Dalla tabella 6.4 sappiamo che $\frac{1}{1+\xi^2}$ è la trasformata di $e^{-|x|}/2$. Allora, per la proprietà della convoluzione,

$$f(x)=-\frac{e^{-|x|}}{2}*g(x)=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-y|}f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Analogamente a quanto già fatto nel caso della trasformata di Laplace, se abbiamo una funzione $u$ di due variabili, definiamo $\widehat{u}$ come la trasformata di Fourier della funzione (di una variabile) $x\mapsto u(x,t)$. In altre parole trasformiamo rispetto a $x$ considerando $t$ un parametro. Si pone cioè

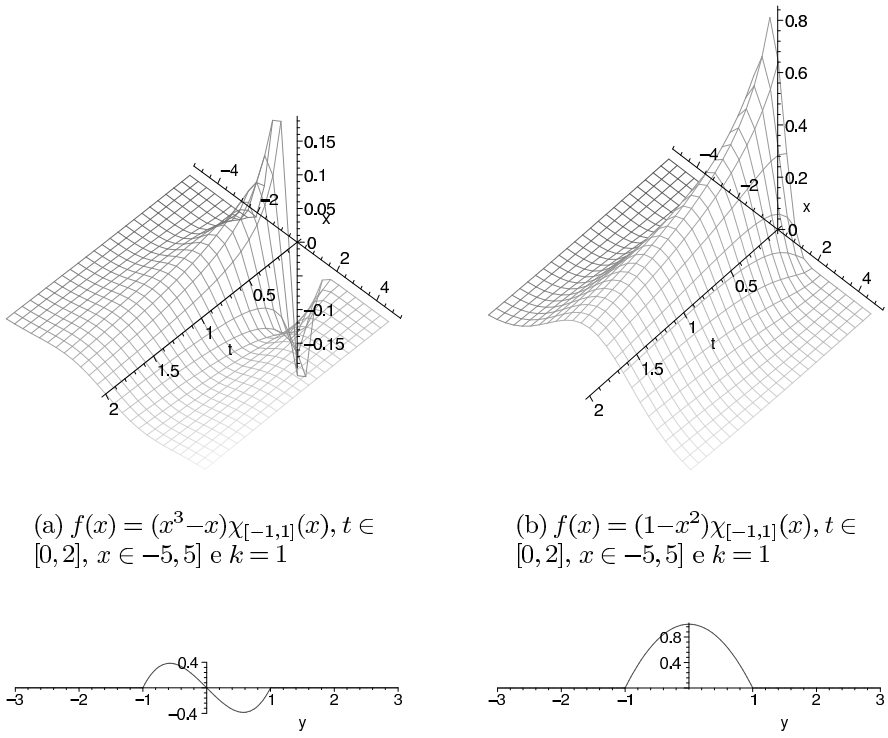
$$\widehat{u}(\xi,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x.$$

Chiaramente, per le derivate parziali rispetto a $x$ valgono

$$\begin{aligned}\widehat{u_x}(\xi,t)&=i\xi\widehat{u}(\xi,t),\\ \widehat{u_{xx}}(\xi,t)&=-\xi^2\widehat{u}(\xi,t).\end{aligned}$$

Similmente al caso delle trasformate di Laplace si ha che le derivate parziali rispetto a $t$ "passano sotto al segno di trasformata", cioè $\widehat{u_t}(\xi,t)=\widehat{u}_t(\xi,t)$ e $\widehat{u_{tt}}(\xi,t)=\widehat{u}_{tt}(\xi,t)$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003




(a) $f(x) = (x^3 - x)\chi_{[-1,1]}(x)$, $t \in [0,2]$, $x \in -5,5]$ e $k = 1$

(b) $f(x) = (1 - x^2)\chi_{[-1,1]}(x)$, $t \in [0,2]$, $x \in -5,5]$ e $k = 1$

Figura 6.5: Diffusione del calore in una sbarretta infinita

### 6.3.1 Un esempio per l'equazione di diffusione

Consideriamo il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t - k^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dove $f \in \mathcal{S}$ ha immagine contenuta in $\mathbb{R}$. Questo problema, per esempio, può rappresentare l'evoluzione della temperatura in una sbarretta isolata di lunghezza infinita essendo nota la temperatura di tutti i suoi punti all'istante iniziale.

Prendendo la trasformata di Fourier di entrambi i membri dell'equazione differenziale si ottiene l'equazione differenziale ordinaria

$$\widehat{u}_t(\xi,t) = -k^2\xi^2\widehat{u}(\xi,t). \tag{6.21}$$

Dalla condizione iniziale segue

$$\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi). \tag{6.22}$$

Risolvendo la (6.21) con la condizione iniziale (6.22) si ottiene

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-\xi^2 k^2 t}\widehat{f}(\xi).$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Per ricavare $u$ usiamo la tabella 6.4 ed il teorema della convoluzione:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2|k|\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4k^2 t}} f(y)\, \mathrm{d}y.$$

Osserviamo che per poter procedere come sopra si deve assumere che $f$ sia F-trasformabile (qui avevamo assunto addirittura $f \in \mathcal{S}$). Tuttavia, si può verificare che la formula ottenuta fornisce una soluzione anche sotto condizioni molto meno restrittive sulla $f$. Qui, per esempio, assumendo una nozione di soluzione più debole della usuale, basta che $f$ sia continua e limitata.

Quanto appena detto esemplifica una strategia generale: cercare di ottenere una soluzione sotto tutte le ipotesi che possano essere necessarie per operare e poi verificare che quanto ottenuto sia veramente una soluzione nel senso che ci interessa. Nella figura 6.5 è rappresentata la soluzione del problema per due diversi dati iniziali.

## 6.4 Costruzione di soluzioni mediante separazione delle variabili

Il metodo di separazione delle variabili consiste nel ricercare soluzioni della particolare forma $u(x,t) = f(x)g(t)$. Questo risulta molto utile per affrontare problemi al contorno in domini limitati e spesso conduce (grazie al principio di sovrapposizione) a soluzioni espresse in forma di serie di Fourier.

Illustriamo il metodo con alcuni esempi che raccogliamo a seconda del tipo di equazione. In questo paragrafo non ci occuperemo mai della effettiva convergenza delle serie incontrate nè di dimostrare che le funzioni così costruite siano realmente le uniche soluzioni dei problemi proposti, e neppure di determinare se queste siano soluzioni classiche oppure no. Questi problemi necessitano di un'analisi più dettagliata e vanno oltre i limiti di questo corso. Per questo motivo, le soluzioni costruite dovranno essere viste come 'candidati' al ruolo di soluzione.

### 6.4.1 Esempi per l'equazione delle onde

**Esempio 6.4.1.** Consideriamo una corda di lunghezza $l$ tesa tra i suoi estremi che assumiamo fissati. Supponiamo che la corda sia libera di muoversi soltanto in un piano verticale. Fissiamo un sistema di riferimento in modo tale che gli estremi abbiano coordinate $(0,0)$ e $(l,0)$, e che il piano in cui avviene il moto sia il piano $xy$. Supponiamo inoltre che la corda sia inizialmente in quiete e che la posizione iniziale del punto di ascissa $x \in [0,l]$ sia data da $\varphi(x)$. Assumendo che il peso della corda sia trascurabile rispetto alla tensione, vogliamo determinare il moto della corda.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Per farlo dobbiamo risolvere il seguente problema:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < l,\ t > 0, \tag{6.23a}$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{6.23b}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 < x < l, \tag{6.23c}$$
$$u_t(x,0) = 0, \qquad 0 < x < l, \tag{6.23d}$$

dove $c$ è una costante che dipende dalla tensione e dalla massa per unità di lunghezza della corda.

Cerchiamo soluzioni **non identicamente nulle** di (6.23) della forma $u(x,t) = f(x)g(t)$. Differenziando e sostituendo nella (6.23a) otteniamo

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{c^2 g(t)}.$$

Poichè il membro destro e sinistro dipendono da due **diverse** variabili **indipendenti**, le due frazioni devono avere un valore costante comune, diciamo $\mu$. Siamo quindi condotti a due equazioni ordinarie:

$$f''(x) = \mu f(x), \tag{6.24a}$$
$$g''(t) = \mu c^2 g(t). \tag{6.24b}$$

Consideriamo dapprima il caso $\mu > 0$. Posto $\mu = \lambda^2$, risolvendo le (6.24) si ottiene

$$f(x) = c_1 \sinh(\lambda x) + c_2 \cosh(\lambda x) \quad \text{e} \quad g(t) = c_3 \sinh(\lambda c t) + c_4 \cosh(\lambda c t).$$

Imponendo le condizioni (6.23b) e (6.23d) su $u(x,t) = f(x)g(t)$ si ottiene $c_1 = c_2 = 0$ cioè $u \equiv 0$. Siccome cercavamo soluzioni non identicamente nulle, il caso $\mu > 0$ deve essere escluso.

Similmente si esclude il caso $\mu = 0$ Rimane da considerare il caso $\mu = -\lambda^2$. Risolvendo le (6.24) si ottiene:

$$u(x,t) = f(x)g(t) = \big(c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x)\big)\big(c_3 \sin(\lambda c t) + c_4 \cos(\lambda c t)\big).$$

Imponendo le (6.23b) e tenendo conto che non vogliamo $u \equiv 0$, si ottiene $c_2 = 0$ e $\sin(\lambda l) = 0$, da cui segue $\lambda = n\pi/l$ con $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Imponendo poi la (6.23d) si deduce $c_3 = 0$.

In definitiva, si sono trovate infinite soluzioni della (6.23a):

$$u_n(x,t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi c t}{l}\right)$$

che soddisfano le condizioni (6.23b) e (6.23d). Tuttavia, in generale, nessuna delle soluzioni $u_n$ ha in sé abbastanza libertà da poter soddisfare la condizione (6.23c). Si può però verificare (usando il principio di sovrapposizione) che

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi c t}{l}\right)$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

è una soluzione della (6.23a) che soddisfa le condizioni (6.23b) e (6.23d). Affinché sia soddisfatta la (6.23c), si devono scegliere i coefficienti $b_n$ in modo tale che

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Estendiamo $\varphi$ in modo dispari all'intervallo $[-l,l]$, cioè poniamo

$$\varphi(x) = -\varphi(-x) \quad \text{per } x \in [-l,0).$$

Allora i $b_n$ sono i coefficienti di Fourier dello sviluppo in serie della funzione $\varphi$ (così estesa)[4] cioè:

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,\mathrm{d}x.$$

**Esempio 6.4.2.** Consideriamo, nelle stesse ipotesi dell'Esempio precedente,

$$\varphi(x) = h\sin(\pi x/l).$$

In questo caso si ha la soluzione del problema (6.23)

$$u(x,t) = h\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi ct}{l}\right).$$

La nota prodotta è detta *fondamentale* ed il coefficiente $h$ è la sua *intensità*. Ricordando il significato della costante $c$, si ha che la frequenza della nota fondamentale è direttamente proporzionale alla radice quadrata della tensione della corda ed inversamente proporzionale al suo diametro. Inoltre la frequenza della nota è anche inversamente proporzionale alla lunghezza della corda.

Consideriamo la configurazione iniziale $\varphi(x) = h_k \sin(k\pi x/l)$, con $k \in \mathbb{N}$ e $h_k \in \mathbb{R}$. La soluzione del problema (6.23) è

$$u(x,t) = h_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{k\pi ct}{l}\right). \tag{6.25}$$

La nota prodotta è detto $(k-1)$-simo *sovratono* e $h_k$ è la sua intensità.

L'esempio precedente mostra che il suono prodotto da una corda vibrante è la sovrapposizione della nota fondamentale e dei suoi sovratoni (ognuno con una sua intensità).

Sia $k \in \mathbb{N}$, consideriamo il $k$-simo sovratono. Osserviamo che vi sono $k$ punti detti *nodi* in $(0,l)$ in cui la corda rimane in quiete. Sono i punti la cui l'ascissa $x \in (0,l)$ soddisfa

$$\sin\left(\frac{(k+1)\pi x}{l}\right) = 0$$

cioè $(k+1)\pi x/l = n\pi$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.

[4] Ricordiamo che nello sviluppo in serie di Fourier di una funzione dispari compaiono solo seni.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

### 6.4.2 Esempio per l'equazione di Laplace

**Esempio 6.4.3.** Consideriamo la distribuzione di temperatura in una piastrina, come in figura 6.6, avente facce isolate, i cui bordi superiore ed inferiore sono isolati, quello sinistro è mantenuto a temperatura nulla, mentre sul bordo destro è data una distribuzione di temperatura $h(y)$. Supponiamo che l'esperimento sia iniziato da abbastanza tempo da poter considerare in equilibrio (stazionaria) la distribuzione di temperatura, e che non vi siano sorgenti o pozzi di calore all'interno della piastrina.

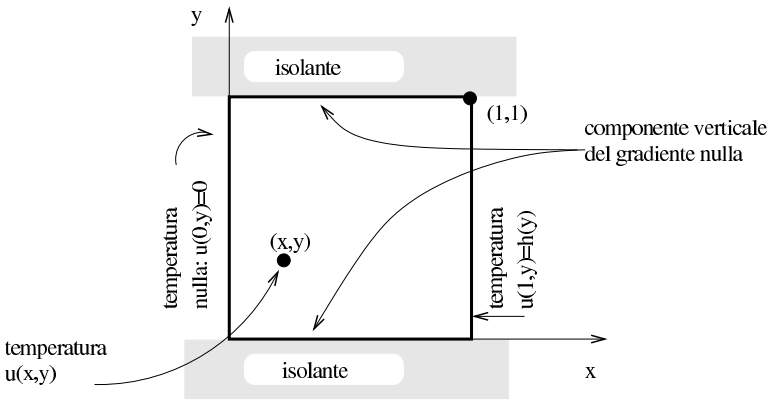



Figura 6.6: Distribuzione stazionaria di temperatura

Per stabilire quale sia la temperatura nei punti della piastrina dobbiamo risolvere il seguente problema per l'equazione di Laplace.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \tag{6.26a}$$
$$u(0, y) = 0, \qquad 0 < y < 1, \tag{6.26b}$$
$$u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0, \qquad 0 < x < l, \tag{6.26c}$$
$$u(1, y) = h(y), \qquad 0 < y < l, \tag{6.26d}$$

Cerchiamo soluzioni **non identicamente nulle** di (6.23) della forma $u(x,t) = f(x)g(y)$. Differenziando e sostituendo nella (6.23a) otteniamo

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)}.$$

Poichè il membro destro e sinistro dipendono da due **diverse** variabili **indipendenti**, le due frazioni devono avere un valore costante comune, diciamo $\mu$. Siamo quindi condotti a due equazioni ordinarie:

$$f''(x) = \mu f(x), \tag{6.27a}$$
$$g''(y) = -\mu g(y). \tag{6.27b}$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Consideriamo dapprima il caso $\mu < 0$. Posto $\mu = -\lambda^2$, risolvendo le (6.27) si ottiene

$$f(x) = c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x) \quad \text{e} \quad g(y) = c_3 \sinh(\lambda y) + c_4 \cosh(\lambda y).$$

Imponendo la condizione (6.26b) si ottiene $c_2 = 0$. Dalle condizioni (6.26c) segue $c_3 = c_4 = 0$. Siccome cercavamo soluzioni non identicamente nulle, il caso $\mu < 0$ deve essere escluso.

Consideriamo il caso $\mu = 0$. Risolvendo le (6.27) si ottiene

$$u(x, y) = f(x)g(y) = (c_1 x + c_2)(c_3 y + c_4).$$

Dalle condizioni (6.26b) e (6.26c) segue $c_2 = c_3 = 0$. Si è quindi trovato che $u(x, y) = c_1 c_4 x$ è una soluzione di (6.26a) che soddisfa (6.26b) e (6.26c). Conviene scrivere questa soluzione nella forma $u_0(x, y) = \frac{1}{2} a_0 x$.

Consideriamo il caso $\mu > 0$. Posto $\mu = \lambda^2$, risolvendo le (6.27) si ottiene

$$f(x) = c_1 \sinh(\lambda x) + c_2 \cosh(\lambda x) \quad \text{e} \quad g(y) = c_3 \sin(\lambda y) + c_4 \cos(\lambda y).$$

Imponendo la condizione (6.26b) si ottiene $c_2 = 0$. Dalle condizioni (6.26c), ricordando che cerchiamo soluzioni non identicamente nulle, seguono $c_3 = 0$ e $\sin(\lambda) = 0$.

Si ottengono quindi infinite soluzioni della (6.26a) che soddisfano le (6.26b) e (6.26c):

$$u_n(x, y) = a_n \sinh(n\pi x) \cos(n\pi y).$$

In generale, nessuna delle soluzioni $u_n$ ha in sé abbastanza libertà da poter soddisfare la condizione (6.26d). Si può però verificare che

$$u(x, y) = \frac{1}{2} a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \frac{1}{2} a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(n\pi x) \cos(n\pi y)$$

è una soluzione della (6.26a) che soddisfa le condizioni (6.26b) e (6.26c). Affinché sia soddisfatta la (6.26d), si devono scegliere i coefficienti $a_n$ in modo tale che

$$h(y) = u(1, y) = \frac{1}{2} a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(n\pi) \cos(n\pi y).$$

Poniamo $a_n = A_n \sinh(n\pi)$ per $n \in \mathbb{N}$, ed estendiamo $h$ in modo pari all'intervallo $[-1, 1]$, cioè poniamo $h(y) = h(-y)$ per $y \in [-1, 0)$. Allora gli $a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, sono i coefficienti di Fourier dello sviluppo in serie della funzione $h$ (così estesa)[5] cioè, si avrà:

$$A_n = \frac{2}{\sinh(n\pi)} \int_0^1 h(y) \cos(n\pi y) \, \mathrm{d}y.$$

[5] Ricordiamo che nello sviluppo in serie di Fourier di una funzione pari compaiono solo coseni.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

**Esercizio 6.4.4.** Consideriamo la stessa situazione dell'Esempio ma con la differenza che sul bordo sinistro della piastrina viene mantenuta la distribuzione di temperatura $s(y)$. Determinare la temperatura nei punti della piastrina.

*Suggerimento: Risolvere il problema con la distribuzione $s(y)$ a sinistra e temperatura nulla a destra, e poi usare il principio di sovrapposizione.*

Considerare inoltre il caso particolare $s(y) \equiv 1$.

*Suggerimento: Il problema con temperatura 1 a sinistra e 0 a destra è 1-dimensionale, quindi si riduce a risolvere un'equazione ordinaria. Usare poi il principio di sovrapposizione*

### 6.4.3 Esempi per l'equazione di diffusione.

**Esempio 6.4.5.** Consideriamo una sbarretta sottile e di lunghezza $l$. Supponiamo che la superficie laterale sia isolata termicamente. Sia $T_0$ la temperatura iniziale della sbarretta e supponiamo che al tempo $t = 0$ la temperatura dell'estremo sinistro sia portata al valore $T_s$ (in un tempo tanto breve da poter essere considerato nullo) mentre, invece, la temperatura dell'estremo viene mantenuta costantemente uguale a $T_0$. Vogliamo trovare l'evoluzione della temperatura $u(x,t)$ della sbarretta.

Dobbiamo risolvere il problema

$$\begin{cases} u_t - k^2 u_{xx} = 0, \\ u(0,t) = T_s, \\ u(l,t) = T_0, \\ u(x,0) = T_0. \end{cases}$$

Cerchiamo soluzioni della forma $u(x,t) = f(x)g(t)$. Differenziando e sostituendo nell'equazione differenziale otteniamo

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{k^2 g(t)}.$$

Poichè il membro destro e sinistro dipendono da due **diverse** variabili **indipendenti**, le due frazioni devono avere un valore costante comune, diciamo $\mu$. Siamo quindi condotti a due equazioni ordinarie:

$$f''(x) = \mu f(x), \tag{6.28a}$$

$$g'(t) = \mu k^2 g(t). \tag{6.28b}$$

Consideriamo dapprima il caso $\mu > 0$. Risolvendo le (6.28) si ottiene

$$f(x) = c_1 e^{x\sqrt{\mu}} + c_2 e^{-x\sqrt{\mu}} \quad \text{e} \quad g(t) = c_3 e^{k^2 \mu t},$$

da cui $u(x,t) = \left(C_1 e^{x\sqrt{\mu}} + C_2 e^{-x\sqrt{\mu}}\right) e^{k^2\mu t}$ che deve necessariamente essere esclusa infatti, dal momento che $\mu k^2 > 0$, $g(t)$ cresce illimitatamente in modulo quando $t \to +\infty$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Consideriamo il caso $\mu = 0$. Dalle (6.28) seguono

$$f(x) = c_1 x + c_2 \quad \text{e} \quad g(t) = c_3,$$

da cui segue $u(x,t) = C_1 x + C_2$. Imponendo le condizioni al bordo si ottiene $C_2 = T_s$ e $C_1 = (T_0 - T_s)/l$. Allora

$$\bar{u}(x,t) = \frac{T_0 - T_s}{l} x + T_s$$

è una soluzione dell'equazione del calore che soddisfa le condizioni al contorno ma **non** soddisfa la condizione iniziale a meno che non sia $T_s = T_0$.

Rimane da considerare il caso $\mu < 0$. Conviene scrivere $\mu = -\lambda^2$. Dalle (6.28) seguono

$$f(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x) \quad \text{e} \quad g(t) = c_3 e^{-\lambda^2 k^2 t},$$

e quindi

$$\hat{u}(x,t) = \big(C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)\big) e^{-\lambda^2 k^2 t}$$

è una soluzione dell'equazione del calore per ogni scelta delle costanti $C_1$ e $C_2$.

In generale, neppure la soluzione appena trovata contiene abbastanza 'parametri liberi' per poter soddisfare tutte le condizioni imposte. Tuttavia, il principio di sovrapposizione ci viene in aiuto.

Cerchiamo le soluzioni (non identicamente nulle) della forma $\hat{u}$ che valgono zero sul bordo. Per il principio di sovrapposizione, la somma di un qualunque numero di tali soluzioni con $\bar{u}$ dà ancora una soluzione che, chiaramente, soddisfa le condizioni al bordo.

Imponiamo le condizioni $\hat{u}(0,t) = 0$ e $\hat{u}(l,t) = 0$. Si ottiene

$$C_1 e^{-\lambda^2 k^2 t} = 0 \quad \text{e} \quad \big(C_1 \cos(\lambda l) + C_2 \sin(\lambda l)\big) e^{-\lambda^2 k^2 t} = 0.$$

Dalla prima di queste identità si ottiene $C_1 = 0$. Dalla seconda (escludiamo $C_2 = 0$ per evitare la soluzione nulla) si ottiene $\sin(\lambda l)$ da cui si ricavano i seguenti valori possibili per $\lambda$:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dunque, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(x,t) = b_n \sin\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big) e^{-\frac{n^2\pi^2 k^2 t}{l^2}}$$

è una soluzione dell'equazione del calore che è nulla sul bordo. Usando il principio di sovrapposizione, Si può vedere che, ammesso che la serie a secondo membro converga,

$$u(x,t) = \frac{T_0 - T_s}{l} x + T_s + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big) e^{-\frac{n^2\pi^2 k^2 t}{l^2}} \tag{6.29}$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

è una soluzione dell'equazione che soddisfa le condizioni al contorno richieste. Rimane da determinare la successione $\{b_n\}$ in modo tale che sia soddisfatta anche la condizione iniziale. Otteniamo

$$T_0 = u(x,0) = \frac{T_0 - T_s}{l}x + T_s + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

cioè

$$T_0 - T_s - \frac{T_0 - T_s}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Quindi $A_n$ sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier della funzione $x \mapsto T_0 - T_s - \frac{T_0-T_s}{l}x$ estesa in modo dispari a $[-l, l]$, cioè della funzione:

$$x \mapsto \begin{cases} T_0 - T_s - \frac{T_0-T_s}{l}x & 0 < x \le l \\ \frac{T_0-T_s}{l}x + T_s - T_0 & -l < x \le 0 \end{cases}$$

Dunque si ha

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{2}{l}\int_0^l \left(T_0 - T_s - \frac{T_0 - T_s}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,\mathrm{d}x \\ =& \frac{2(T_0 - T_s)}{l}\int_0^l \left(1 - \frac{1}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2(T_0 - T_s)}{n\pi}. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (6.29) i valori di $b_n$ trovati, si ottiene finalmente la soluzione cercata:

$$u(x,t) = \frac{T_0 - T_s}{l}x + T_s + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(T_0 - T_s)}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)e^{-\frac{n^2\pi^2k^2t}{l^2}}.$$

**Esempio 6.4.6.** Consideriamo una sbarretta sottile, di lunghezza $l$ con superficie laterale isolata, il cui estremo sinistro sia mantenuto a temperatura nulla mentre l'estremo destro è libero di irraggiare nell'aria mantenuta anch'essa a temperatura nulla. Non ci sono fonti o pozzi di calore all'interno della sbarretta. Supponendo di conoscere all'istante iniziale la temperatura $\varphi(x)$ dei punti della sbarretta, vogliamo determinarne l'evoluzione nel tempo.

Dobbiamo risolvere il problema

$$u_{tt} - k^2 u_{xx} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0, \tag{6.30a}$$
$$u(0,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{6.30b}$$
$$u_x(l,t) = -hu(l,t), \qquad t > 0, \tag{6.30c}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 < x < l, \tag{6.30d}$$

dove la (6.30c) rappresenta la *legge di Stefan*: Il flusso di calore è proporzionale alla differenza di temperatura (questa legge è valida per differenze non troppo elevate di temperatura). La costante $h$ è detta *conduttività superficiale*.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Come nell'esempio precedente, cerchiamo soluzioni **non identicamente nulle** della forma $u(x,t) = f(x)g(t)$. Differenziando e sostituendo nella (6.30a) otteniamo

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{k^2 g(t)} = \mu,$$

con $\mu$ una costante. Siamo quindi condotti a due equazioni ordinarie:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mu f(x), \\ g'(t) &= \mu k^2 g(t). \end{aligned} \tag{6.31}$$

Si verifica subito che i casi $\mu > 0$ e $\mu = 0$ non conducono a soluzioni utili. Resta da considerare il caso $\mu < 0$.

Poniamo $\mu = -\lambda^2$. Risolvendo le (6.31) si ha

$$u(x,t) = f(x)g(t) = \big(c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x)\big) e^{-\lambda^2 k^2 t}.$$

Dalla condizione (6.30b) segue $c_1 = 0$, mentre dalla (6.30c), ricordando che cerchiamo soluzioni non identicamente nulle, segue

$$h \sin(\lambda l) + \lambda \cos(\lambda l) = 0,$$

o, equivalentemente, $\tan(\lambda l) = -\lambda/h$. Questa equazione ha (numerabilmente) infinite radici positive che indichiamo con $\lambda_n$. Si sono quindi trovate infinite soluzioni della (6.30a)

$$u_n(x,t) = b_n e^{-\lambda_n^2 k^2 t} \sin(\lambda_n x)$$

che soddisfano le condizioni (6.30b) e (6.30c). Nessuna di queste soluzioni, da sola, può in generale soddisfare la (6.30d). Come nell'esempio precedente, cerchiamo una soluzione della forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2 k^2 t} \sin(\lambda_n x). \tag{6.32}$$

La condizione (6.30d) diventa

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\lambda_n x). \tag{6.33}$$

Osserviamo che $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\lambda_n x)$ non è una serie di Fourier nel senso usuale (i numeri $\lambda_n$ non sono equispaziati). Si può provare, analogamente al caso delle serie Fourier, che, affinché valga la (6.33), la seguente scelta dei coefficienti $b_n$ è

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

necessaria:[6]

$$b_n = \frac{\int_0^l \varphi(x)\sin(\lambda_n x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^l [\sin(\lambda_n x)]^2\,\mathrm{d}x} = \frac{2}{l\big(1+\frac{[\cos(\lambda_n l)]^2}{hl}\big)}\int_0^l \varphi(x)\sin(\lambda_n x)\,\mathrm{d}x,$$

per $n = 1, 2, \ldots$. La (6.32) con questa scelta dei coefficienti ci offre un candidato per la soluzione del problema (6.30) in forma di *serie di Fourier generalizzata*.

### 6.4.4 Un metodo di trasformazione di coordinate per l'equazione di Laplace in domini piani

Supponiamo che $u$ soddisfi l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e supponiamo di avere un dominio $D^* \subset \mathbb{R}^2$ ed una trasformazione differenziabile $f$, definita in un intorno $V$ di $D^*$, che porta $D^*$ in $D$ e $\partial D^*$ in $\partial D$, che sia iniettiva e tale che $f'(\xi+i\eta) \neq 0$ per ogni $(\xi,\eta) \in V$. In queste condizioni esiste una trasformazione conforme $g$ "inversa" di $f$, cioè tale che $f\big(g(z)\big) = z$. Definiamo $U(\xi,\eta) = u\big(f(\xi,\eta)\big)$ per $(\xi,\eta) \in D^*$; dalle formule (6.8) e dalle condizioni di Cauchy-Riemann segue che $U$ soddisfa $\Delta U = 0$ in $D^*$. Allora i due seguenti problemi di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } D, \\ u|_{\partial D} = h \end{cases} \qquad (6.34) \qquad\qquad \begin{cases} \Delta U = 0, & \text{in } D^*, \\ U|_{\partial D^*} = h \circ f \end{cases} \qquad (6.34')$$

sono strettamente collegati nel senso che, conoscendo una soluzione $U$ del secondo, $u(x,y) = U\big(g(x,y)\big)$, $(x,y) \in D$, è una soluzione del primo.

Per applicare questo ragionamento alla risoluzione del problema di Dirichlet si deve essere in grado di trovare una trasformazione dal dominio dato ad un dominio $D^*$ in cui siamo in grado di risolvere il problema di Dirichlet per generici dati al bordo.

**Esempio 6.4.7.** Consideriamo l'insieme $D$ dato dal settore di corona circolare di raggi 1 ed $r > 1$, giacente nel semipiano $y \geq 0$. Posto $\alpha = \ln r$, la trasformazione conforme $z \mapsto e^{\xi+i\eta}$ porta il rettangolo $D^* = \{\xi+i\eta \in \mathbb{C} : 0 \leq \xi \leq \alpha,\ 0 \leq \eta \leq \pi\}$ in $D$ (si veda la figura 6.7). Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in D, \\ u(x,0) = h(x), & 1 \leq x \leq r, \quad -r \leq x \leq -1 \\ h(x,y) = 0 & \text{per } y > 0 \end{cases}$$

[6] Si può verificare che, similmente al caso delle serie di Fourier,

$$\int_0^l \sin(\lambda_m x)\sin(\lambda_n x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ \neq 0 & n = m. \end{cases}$$

Cioè la famiglia di funzioni $\{x \mapsto \sin(\lambda_n x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una *famiglia ortogonale di funzioni*.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

dove $h$ è una funzione assegnata con la proprietà che $h(1) = h(r) = h(-1) = h(-r) = 0$. Poniamo $U(\xi, \eta) = u(e^\xi \cos\eta, e^\xi \sin\eta)$. Il nostro problema al bordo su $D$ si trasforma nel seguente problema al bordo (per $U$) su $D^*$

$$\begin{cases} \Delta U(\xi,\eta) = 0, & (\xi,\eta) \in D^* \\ U(\xi,0) = h(e^\xi) = -U(\xi,\pi), & 0 \le \xi \le \alpha, \\ U(0,\eta) = 0 = U(\alpha,\eta), & 0 \le \eta \le \pi, \end{cases}$$

che può essere risolto –per esempio– con il metodo di separazione delle variabili. Dalla soluzione trovata si può poi risalire alla soluzione del problema originale invertendo la trasformazione.

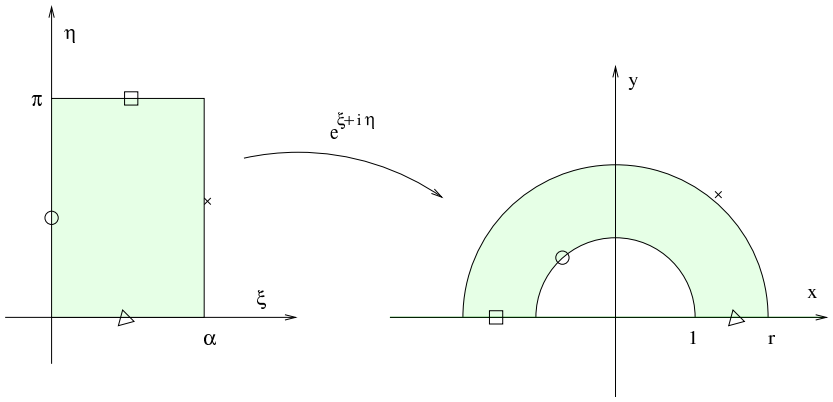



Figura 6.7: Trasformazione del problema di Dirichlet

## Riferimenti ed approfondimenti

**Paragrafo 6.1** [8], [11], [13, cap. 7 §1], [20, cap. 11], [21, cap. 5].

**Paragrafo 6.2:** [11, cap. 5 §19], [8, cap. 2 §6], [15] [18, cap. 11], [19, capp. 13-14].

**Paragrafo 6.3:** [2, cap. 6], [8, cap. 2 §6], [15], [18, cap. 10].

**Paragrafo 6.4:** [13, cap. 7 §1], [12, cap. 2], [20, cap. 11], [19, cap. 12].

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

# Appendice A

# Calcolo integrale in $\mathbb{R}^n$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

## A.1 Limiti ed integrazione

Per trattare in modo esauriente questo argomento sarebbe necessario conoscere la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue. Tale teoria permette di definire l'integrale su sottoinsiemi molto generali di $\mathbb{R}^n$, anche di funzioni molto irregolari e può essere pensata come un'estensione della (nota) teoria di Riemann, nel senso che ogni qualvolta risulta definito l'integrale secondo Riemann allora è definito anche secondo Lebesgue ed i valori dei due integrali coincidono. Comunque, il principale vantaggio della teoria di Lebesgue rispetto alla teoria Riemann è proprio la sua maggiore facilità d'uso rispetto all'operazione di passaggio al limite.

Tuttavia, lo studio della la teoria di Lebesgue porterebbe via troppo spazio. Qui vedremo soltanto alcuni risultati di passaggio al limite espressi in una forma (ridotta) compatibile con la teoria di Riemann.

**Proposizione A.1.1 (Convergenza dominata).** *Dato un dominio regolare*[1] $D \subset \mathbb{R}^n$, *sia* $f_k : D \to \mathbb{R}$ *una successione di funzioni tali che*

1. $\int_D f_k \, \mathrm{d}x$ *risulti ben definito;*
2. *esista una costante* $K$ *tale che* $|f_k(x)| \leq K$ *per ogni* $x \in D$ *e* $k \in \mathbb{N}$*;*
3. *posto, per ogni* $x \in D$, $f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_k(x)$, $\int_D f \, \mathrm{d}x$ *sia ben definito.*

[1] Un dominio di $\mathbb{R}^n$ si dice regolare se è unione di un numero finito di domini semplici. Si dice che $D$ è un dominio semplice di $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, se esiste un dominio semplice $D^*$ di $\mathbb{R}^{n-1}$ e funzioni $\alpha : D^* \to \mathbb{R}$ e $\beta : D^* \to \mathbb{R}$ tali che rispetto ad una qualche coordinata $i$-sima,

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} \alpha(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq x_1 \leq \beta(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ \text{con } (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in D^* \end{array} \right\}$$

Questo procedimento definisce "iterativamente" i domini semplici se definamo dominio semplice di $\mathbb{R}$ un qualunque intervallo del tipo $[a, b]$. Osserviamo infatti che ad ogni "passo" si scende di una dimensione.

*Allora*

$$\int_D \lim_{k\to+\infty} f_k(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty} \int_D f_k(x)\ \mathrm{d}x.$$

**Corollario A.1.2.** *Sia $D_k \subset \mathbb{R}^n$ una successione di domini semplici tale che*

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_k \subset \ldots$$

*Se $D = \cup_{k=1}^{\infty} D_k$ è un dominio semplice e limitato ed $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e limitata, allora*

$$\int_D f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{D_k} f(x)\ \mathrm{d}x$$

**Corollario A.1.3.** *Sia $D_k \subset \mathbb{R}^n$ una successione di domini semplici tale che*

$$D_1 \supset D_2 \supset \ldots \supset D_k \supset \ldots$$

*Se $D = \cap_{k=1}^{\infty} D_k$ è un dominio semplice ed $f : D_1 \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e limitata con $D_1$ limitato, allora*

$$\int_D f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{D_k} f(x)\ \mathrm{d}x$$

**Derivazione sotto il segno di integrale**

Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio semplice, $A \subset \mathbb{R}^s$ un aperto, ed $f : D \times A \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(\cdot, t)$ è limitata per ogni $t \in A$. Allora risulta definita la funzione $F : A \to \mathbb{R}$ data da

$$F(t) = \int_D f(x,t)\ \mathrm{d}x.$$

Valgono i seguenti risultati.

**Proposizione A.1.4.** *Supponiamo che esista una costante $K$ tale che $|f(x,t)| \leq K$ per ogni $(t,x) \in D \times A$. Allora $F$ è una funzione continua.*

**Proposizione A.1.5.** *Supponiamo che $f$ sia di classe $C^1$ e che esistano $s$ costanti $K_1, \ldots, K_s$ tali che*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t_j}(x,t)\right| \leq K_j \qquad \forall (x,t) \in D \times A,\ j = 1, \ldots s$$

*Allora $F$ è di classe $C^1$ in $A$ e*

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = \frac{\partial}{\partial t_j} \int_D f(x,t)\ \mathrm{d}x = \int_D \frac{\partial f}{\partial t_j}(x,t)\ \mathrm{d}x.$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Un caso particolarmente interessante si ha quando $D$ è un intervallo. Se $D = [\alpha(t), \beta(t)]$ con $\alpha$ e $\beta$ funzioni $C^1$ in $A$, scrivendo

$$G(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\ \mathrm{d}x,$$

dalla proposizione precedente e dalla formula di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$\frac{\partial G}{\partial t_j}(t) = f\big(\beta(t),t\big)\frac{\partial \beta}{\partial t_j}(t) - f\big(\alpha(t),t\big)\frac{\partial \alpha}{\partial t_j}(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t_j}(x,t)\ \mathrm{d}x$$

per $j = 1, \dots s$.

In particolare, se $A \subset \mathbb{R}$,

$$G'(t) = f\big(\beta(t),t\big)\beta'(t) - f\big(\alpha(t),t\big)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\ \mathrm{d}x.$$

## A.2 Integrali di linea

Supponiamo che $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ sia immagine di una curva regolare, cioè di una funzione $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ di classe $C^1$ e tale che $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a,b]$. Data una funzione continua $f$ definita su $\Gamma$ a valori in $\mathbb{R}$, si pone

$$\int_\Gamma f\ \mathrm{d}s \underset{\text{def.}}{=} \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t.$$

Si dimostra facilmente che questa definizione non dipende dalla scelta della rappresentazione parametrica di $\Gamma$; cioè che, se $\phi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ è tale che $\gamma\big([a,b]\big) = \Gamma = \phi\big([\alpha,\beta]\big)$, allora

$$\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\phi(t)\big)\|\phi'(t)\|\ \mathrm{d}t.$$

Osserviamo che $\int_\Gamma f\ \mathrm{d}s$ è indipendente dal verso in cui $\Gamma$ viene percorsa. Inoltre, si ha

$$\text{Lunghezza}(\Gamma) = \int_\Gamma 1\ \mathrm{d}s.$$

Risulta inoltre utile la seguente notazione. Sia $F : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo. Si pone

$$\int_\Gamma F \cdot\ \mathrm{d}\vec{s} \underset{\text{def.}}{=} \int_a^b F\big(\gamma(t)\big)\cdot\gamma'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Come nel caso precedente si vede che questa definizione è ben data. Inoltre, posto

$$\vec{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\ ,$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

si ha

$$\int_\Gamma F \cdot \, \mathrm{d}\vec{s} = \int_\Gamma F \cdot \vec{T} \, \mathrm{d}s.$$

Osserviamo che invertendo il senso di percorrenza di $\Gamma$ si cambia il segno di $\int_\Gamma F \cdot \, \mathrm{d}\vec{s}$.

### Potenziale

Supponiamo che il campo $F$ sia definito nell'aperto $D \subset \mathbb{R}^n$ contenente $\Gamma$. Si può dimostrare che se esiste una funzione $U : D \to \mathbb{R}$ di classe $C^1$ tale che $\nabla U(x) \equiv F(x)$ (cioè un *potenziale* di $F$) allora

$$\int_\Gamma F \cdot \, \mathrm{d}\vec{s} = U\big(\gamma(b)\big) - U\big(\gamma(a)\big). \tag{A.1}$$

Osserviamo che se $U$ è un potenziale di $F$ allora, per ogni costante $a$, $U + a$ è ancora un potenziale di $F$.

La formula (A.1) mostra, nel caso dell'esistenza di un potenziale, che $\int_\Gamma F \cdot \, \mathrm{d}\vec{s}$ dipende solamente dai punti estremi di $\Gamma$ (con il loro ordine). In particolare, nel caso dell'esistenza di un potenziale, l'integrale di $F$ lungo un camino chiuso deve annullarsi. Per questi motivi, un campo per cui esista un potenziale è detto *conservativo*.

Viceversa, si può provare che se $\int_C F \cdot \, \mathrm{d}\vec{s}$ dipende soltanto dal punto di arrivo e dal punto di partenza di qualunque curva regolare a tratti $C$ allora $F$ deve essere conservativo. Si vede inoltre facilmente che, se $F$ è tale che $\int_C F \cdot \, \mathrm{d}\vec{s} = 0$ per ogni cammino chiuso $C$ (regolare a tratti) contenuto in $D$, allora $F$ è conservativo.

Queste considerazioni permettono di dare la seguenteespressione per il potenziale di un campo conservativo $F$ (per semplicità supponiamo che $D$ sia connesso)

$$U(x) = \int_{C(x,x_0)} F \cdot \, \mathrm{d}\vec{s}$$

dove $x_0 \in D$ è un qualunque punto arbitrariamente fissato, e $C(x, x_0) \subset D$ è una qualunque curva regolare a tratti che connette $x_0$ (come primo estremo) con $x$ (come secondo estremo).

Vediamo delle condizioni utili per stabilire se un campo vettoriale ammette un potenziale.

**Proposizione A.2.1.** *Supponiamo che $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia di classe $C^1$ e che sia conservativo. Allora, posto $F(x) = \big(F_1(x), \dots, F_n(x)\big)$ e $x = (x_1 \dots x_n)$,*

$$\boxed{\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \qquad i, j \in \{1, \dots, n\}.} \tag{A.2}$$

**Proposizione A.2.2.** *Supponiamo che $D \subset \mathbb{R}^n$ sia semplicemente connesso, che $F : D \to \mathbb{R}^n$ sia di classe $C^1$ e che soddisfi la condizione* (A.2)*. Allora $F$ è conservativo.*

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

## A.3 Integrali di superficie

Per approfondimenti su questa parte si veda [5, cap. 1].

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un aperto ed $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione $C^1$. Diremo che $F$ è un'*immersione* se sia $F$ sia l'operatore $F'$ associato alla matrice jacobiana $JF$ sono iniettivi.[2] Denotiamo con '$\cdot$' il prodotto matriciale righe per colonne, allora $JF(x) \cdot [JF(x)]^t$ è una matrice quadrata $n-1 \times n-1$ definita positiva.

Poniamo $\Sigma = \{F(x) : x \in \Omega\}$, e sia $\varphi : S \to \mathbb{R}$ una funzione continua a supporto compatto (cioè tale che la chiusura dell'insieme degli $x$ tali che $\varphi(x) \neq 0$ è un insieme compatto). Allora, si pone

$$\int_\Sigma \varphi \, \mathrm{d}S \underset{\text{def.}}{=} \int_\Omega \varphi\big(F(x)\big) \sqrt{\det\left(JF(x) \cdot [JF(x)]^t\right)} \, \mathrm{d}x.$$

Si può dimostrare che questa definizione è ben data nel senso che l'integrale al membro sinistro dipende solo da $\Sigma$ e non dall'immersione $F$; cioè, se $G : W \to \mathbb{R}^n$ è un'altra immersione tale che $\{G(x) : x \in W\} = \Sigma = \{F(x) : x \in \Omega\}$ allora

$$\int_\Omega \varphi\big(F(x)\big) \sqrt{\det\left(JF(x) \cdot [JF(x)]^t\right)} \, \mathrm{d}x = \int_W \varphi\big(G(x)\big) \sqrt{\det\left(JG(x) \cdot [JG(x)]^t\right)} \, \mathrm{d}x.$$

### A.3.1 Integrazione per parti e Teorema della divergenza

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, diremo che la sua frontiera $\partial\Omega$ è $C^k$, $k \geq 0$ se per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ esistono un intorno $W$ di $x_0$ in $\mathbb{R}^n$ ed una funzione $C^k$, $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tali che (a meno di un eventuale riordinamento e riorientamento delle coordinate) si ha

$$\Omega \cap W = \big\{x \in W : x_n > g(x_1, \ldots, x_{n-1})\big\}.$$

Se $\partial\Omega$ è $C^1$ allora per ogni punto $x \in \partial\Omega$ risulta definito un versore $n(x)$ ortogonale a $\partial\Omega$ e diretto verso l'esterno di $\Omega$. Data una funzione $u \in C^1(\overline{\Omega})$, la derivata direzionale

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = n(x) \cdot \nabla u(x)$$

sarà detta *derivata normale* di $u$ su $\partial\Omega$.

[2] Con $JF(x)$ denotiamo la matrice jacobiana di $F$ in $x$, cioè, posto $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ e $F = (F_1, \ldots, F_n)$,

$$JF(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}}(x) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_{n-1}}(x) \end{pmatrix}$$

L'iniettività dellóperatore $F'$ è equivalente a rango$[JF(x)] = n-1$ per ogni $x \in \Omega$.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

**Proposizione A.3.1.** *Supponiamo che $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sia un aperto con frontiera $C^1$. Se $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ è $C^1$ e a supporto compatto, allora*

*Formula di integrazione per parti*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\ \mathrm{d}S, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

*Conseguentemente*

*Teorema della divergenza*

$$\int_\Omega \operatorname{div} u(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u \cdot n\ \mathrm{d}S.$$

**Corollario A.3.2 (Formule di Green).** *Supponiamo che $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sia un aperto con frontiera $C^1$. Se $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ e $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ sono $C^1$ e a supporto compatto, allora*

$$\int_\Omega \left[v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)\right]\ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial n}v - \frac{\partial v}{\partial}u\right]\ \mathrm{d}S$$

$$-\int_\Omega v(x)\Delta u(x)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}v\ \mathrm{d}S.$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

# Appendice B

# Serie di Fourier

L'idea che sta alla base degli sviluppi in serie di Fourier è quella di approssimare, in qualche senso, le funzioni (integrabili) periodiche per mezzo di funzioni più regolari e/o più facilmente maneggiabili come le funzioni trigonometriche. Un riferimento MOLTO completo per questi argomenti è [17] oppure [19, Cap. 12].

## B.1 Funzioni $2\pi$-periodiche

Limitiamoci dapprima a considerare una funzione $f$ di periodo $2\pi$. Cercheremo di "approssimarla" con polinomi trigonometrici di ordine $n$ della forma

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big( a_k \cos kx + b_k \sin kx \Big). \tag{B.1}$$

Data una funzione $2\pi$-periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cerchiamo di scegliere i coefficienti $a_0$, $a_k$ e $b_k$ in modo da minimizzare lo *scarto quadratico* cioè da rendere minima la quantità

$$E_n = \int_0^{2\pi} \big( f(x) - s_n(x) \big)^2 \, \mathrm{d}x.$$

I coefficienti scelti, per $f$ integrabile, come nella Tabella B.1 sono detti *coefficienti di Fourier* di $f$. Osserviamo che con tale scelta $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{d}x$.

| | |
|---|---|
| $a_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x,$ | $b_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x.$ |
| $k = 0, 1, 2, \ldots$ | $k = 1, 2, \ldots$ |

Tabella B.1: Coefficienti di Fourier per funzioni $2\pi$-periodiche

Si dimostra che vale il seguente teorema

**Teorema B.1.1.** *Supponiamo che $f$ sia $2\pi$-periodica ed integrabile in $[0, 2\pi]$, allora, al variare di $s_n$ tra tutti i polinomi trigonometrici di ordine $n$ della forma* (B.1)*, lo scarto quadratico $E_n$ è minimo quando i coefficienti di $s_n$ sono scelti come nella Tabella B.1. In questo caso si ha*

$$E_n = \int_0^{2\pi} f(x)^2 \, \mathrm{d}x - \pi \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

*Inoltre (identità di Parseval)*

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right),$$

*cioè* $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$.

La serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big( a_k \cos kx + b_k \sin kx \Big). \tag{B.2}$$

con i coefficienti dati dalla Tabella B.1 è detta *serie di Fourier* di $f$. Si può dimostrare che

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} \, \mathrm{d}t.$$

Questa formula è utile per il calcolo numerico di $s_n(x)$, infatti richiede il computo di un solo integrale ed evita la somma (numericamente instabile) di termini di diversa grandezza.

È facile vedere che se $f : R \to \mathbb{R}$ è una funzione $2\pi$-periodica *pari*, cioè tale che $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora nella sua serie di Fourier compaiono solo coseni (cioè $0 = a_0 = a_1 = \ldots$); se invece $f$ è dispari, ovvero tale che $f(x) = -f(-x)$ per ogni $\in \mathbb{R}$, allora nella sua serie di Fourier compaiono soltanto seni (cioè $0 = b_1 = b_2 = \ldots$).

Osserviamo inoltre che ogni funzione definita sull'intervallo $[0, 2\pi]$ può sempre essere estesa ad una funzione $2\pi$-periodica su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, ogni funzione $f$ definita definita sull'intervallo $[0, \pi]$ può essere estesa sia ad una funzione $2\pi$-periodica *pari* su $\mathbb{R}$, sia ad una funzione $2\pi$-periodica *dispari* su $\mathbb{R}$ dando così luogo ad uno sviluppo in (soli) coseni o in (soli) seni di $f$.

## B.2 Funzioni di periodo qualunque

Sia $T > 0$ dato e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $T$-periodica integrabile su $[0, T]$. Prendendo $\omega = 2\pi/T$, e

$$s_n^T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big( a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \Big), \tag{B.3}$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

si ha che lo scarto quadratico

$$E_n^T = \int_0^T \big(f(x) - s_n(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x.$$

è reso minimo dalla scelta dei coefficienti come nella Tabella B.2

| | |
|---|---|
| $a_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\ \mathrm{d}x,$ | $b_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\sin(k\omega x)\ \mathrm{d}x.$ |
| $k = 0, 1, 2, \ldots$ | $k = 1, 2, \ldots$ |

Tabella B.2: Coefficienti di Fourier per funzioni $T$-periodiche

Più precisamente vale il seguente risultato

**Teorema B.2.1.** *Supponiamo che $f$ sia $T$-periodica ed integrabile in $[0, T]$, allora, al variare di $s_n^T$ tra tutti i polinomi trigonometrici di ordine $n$ della forma* (B.3)*, lo scarto quadratico $E_n^T$ è minimo quando i coefficienti di $s_n^T$ sono scelti come nella Tabella B.2. In questo caso si ha*

$$E_n^T = \int_0^T f(x)^2 \ \mathrm{d}x - \frac{T}{2}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right).$$

*Inoltre (identità di Parseval)*

$$\int_0^T f(x)^2 \ \mathrm{d}x = \frac{T}{2}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right),$$

*cioè* $\lim_{n\to\infty} E_n^T = 0$.

La serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos(k\omega x) + b_k\sin(k\omega x)\Big).$$

con i coefficienti dati dalla Tabella B.2 è detta *serie di Fourier* di $f$.

## B.3 Convergenza puntuale

Poniamoci il problema della convergenza puntuale di una serie di Fourier.

Sia $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata monotona a tratti[1] Estendiamo $f$ ad una funzione $T$-periodica su $\mathbb{R}$. In questo caso, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, risultano ben

[1] Cioè tale che $[0, T]$ si possa decomporre in un numero finito di sottointervalli su cui $f$ risulti monotona.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

definiti i limiti destro e sinistro di $f$

$$f(x_0^+) \underset{\text{def.}}{=} \lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad f(x_0^-) \underset{\text{def.}}{=} \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

**Teorema B.3.1.** *Sia $f$ come sopra. Allora i coefficienti di Fourier sono ben definiti e la serie di Fourier converge per ogni $x_0$ alla media dei limiti destro e sinistro di $f$, cioè*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big( a_k \cos(k\omega x_0) + b_k \sin(k\omega x_0) \Big) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

*con $\omega = 2\pi/T$. In particolare, negli estremi dell'intervallo $[0, T]$ la serie converge a $\big(f(0^+) + f(T^-)\big)/2$, inoltre in ogni punto di continuità $x \in (0, T)$ di $f$ la serie di Fourier converge a $f(x)$.*

Questo teorema non deve far pensare che il grafico del polinomio $S_n^T$ si avvicini necessariamente a quello di $f$. A questo proposito si consideri la serie di Fourier dell'*onda quadra* ($2\pi$-periodica di ampiezza 1) cioè della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

estesa periodicamente a $\mathbb{R}$. Con facili calcoli si vede che la serie di Fourier di $f$ è data da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin(2n+1)x.$$

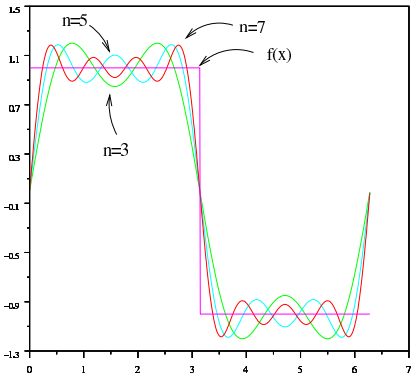



Figura B.1: Alcune somme parziali della serie di Fourier relativa all'onda quadra $2\pi$-periodica

Si può dimostrare che la proiezione sull'asse delle ordinate della curva $y = s_n(x)$ ristretta ad un intorno di $x_0 = 0$ tende (per $n \to \infty$) ad un segmento i cui estremi sono diversi da $f(x_0^+) = 1$, $f(x_0^-) = -1$.[2] Questo fatto è noto come *fenomeno di Gibbs* (si veda per esempio [14, Cap. 2 §10]) ed è del tutto generale nei punti di discontinuità.

## B.4 Rappresentazione nel campo complesso

Usando la relazione

$$e^{int} = \cos(nt) + i \sin(nt), \quad n \in \mathbb{Z}$$

[2] Con questa scelta di $f$, per esempio, si può dimostrare che la proiezione tende al segmento di estremi

$$\pm \left( 1 + \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t \right).$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

è facile dimostrare che la (B.1) può essere scritta nella forma

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

scegliendo, per $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & \text{for } k \geq 0, \\ \frac{a_k + ib_k}{2} & \text{for } k \leq 0, \end{cases}$$

dove si è posto $b_0 = 0$.

La serie di Fourier (B.2) di una funzione $f$ si può allora scrivere nella forma:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx},$$

dove i coefficienti $c_k$, $k \in \mathbb{Z}$, sono dati dalla formula:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x.$$

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

# Bibliografia


[1] Apostol T.M., *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley, 1974.

[2] Barozzi G.C., *Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione*, Zanichelli, Bologna, 2001.

[3] Deshpande J.V., *Complex Analysis*. Tata McGraw-Hill, Singapore, 1986.

[4] Gherardelli F. - Rosati L.A. - Tomassini G., *Lezioni di Geometria II*, CEDAM, Padova, 1980.

[5] Kavian O., *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*. Springer-Verlag, Paris, 1993.

[6] Knopp K., *Theory of Functions, vol. I*. Dover, New York, 1945.

[7] Lang S., *Complex Analysis, IV edizione*. Springer-Verlag, 1999.

[8] Logan J.D., *Applied Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[9] Milne-Thomson L.M., *Theoretical Aerodynamics*. Dover, New York 1973.

[10] Milne-Thomson L.M., *Theoretical Hydrodynamics*. Dover, New York 1996.

[11] Piva A., *Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali*. Pitagora, Bologna, 1993.

[12] Prouse G., *Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali*. Masson, Milano, 1987.

[13] Pagani C.D. - Salsa S., *Analisi Matematica, vol. II*. Masson, Milano, 1994.

[14] Sansone G., *Orthogonal functions*. Dover, New York, 1991.

[15] Sneddon I.N., *Fourier transforms*. Dover, New York, 1995.

[16] Silverman R.A., *Complex Analysis with Applications*. Dover, New York, 1984.

[17] Tolstov G.P., *Fourier series*. Dover, New York, 1976.


Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003

[18] Weinberger H.F., *A first course in Partial Differential equations*. Dover, New York.

[19] Widder D.V., *Advanced Calculus, II edition*. Dover, New York, 1989.

[20] Wilie C.R. - Barrett L.C., *Advanced Engineering Mathematics, VI edition*. McGraw-Hill, New York, 1995.

[21] Zachmanoglou E.C. - Thoe D.W., *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*. Dover, New York, 1986.

Ultimo aggiornamento: 10 aprile 2003