Note del corso di Modelli Matematici per l'Ingegneria
(VERSIONE PRELIMINARE)

elaborate da Marco Di Francesco

Indice

1 Alcuni richiami di analisi e di geometria. 5
1.1 Distanze, norme e topologia. 5
1.2 Matrici 7
1.3 Calcolo differenziale in più variabili 8
1.4 Integrazione 11
1.5 Serie di funzioni 12
1.6 Serie di Fourier 14
1.7 Equazioni differenziali ordinarie 14
1.8 Introduzione alle equazioni alle derivate parziali 15
1.8.1 PDE del primo ordine semilineari 16

2 Sistemi dinamici. 23
2.1 Concetti introduttivi 23
2.2 Sistemi dinamici lineari 25
2.2.1 Matrici diagonalizzabili 30
2.2.2 Autovalori complessi 32
2.2.3 Matrici nilpotenti 34
2.3 Teoria qualitativa 37
2.3.1 Metodo di linearizzazione 38
2.3.2 Metodo dei funzionali di Lyapounov 41
2.4 Applicazioni 43
2.4.1 Sistemi newtoniani 43
2.4.2 Il modello preda-predatore di Lotka e Volterra 45

3 Modelli di diffusione 47
3.1 L'equazione del calore 47
3.1.1 Un modello di propagazione del calore 47
3.1.2 Problemi ben posti 49
3.1.3 Evoluzione della temperatura in una sbarra omogenea. Tendenza all'equilibrio 50
3.1.4 Il metodo dell'energia. Unicità 54
3.1.5 La soluzione fondamentale 55
3.1.6 Il problema di Cauchy 58

3.2 Diffusione non lineare 59

4 Modelli di trasporto e di convezione–diffusione **63**
4.1 Un modello di traffico 63
4.2 Equazione del trasporto lineare 66
4.3 Due modelli di trasporto non lineare 68
4.4 L'equazione di Burgers 69
4.5 Onde smorzate 76
4.6 Modello di inquinante in un fiume (drift-diffusion) 77
4.7 L'equazione di Burgers viscosa 79
4.8 Viscosità evanescente nell'equazione di Burgers 81

Capitolo 1

Alcuni richiami di analisi e di geometria.

1.1 Distanze, norme e topologia.

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è l'insieme dei vettori di n coordinate reali, dotato delle operazioni di somma vettoriale e prodotto per uno scalare. Dati due vettori

$$X, Y \in \mathbb{R}^n, \quad X = (x_1, \ldots, x_n), \quad Y = (y_1, \ldots, y_n),$$

la *distanza euclidea* tra X ed Y è definita da

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Geometricamente, essa esprime la lunghezza del segmento che unisce i punti aventi le coordinate di X ed Y. La *norma euclidea* di un vettore $X \in \mathbb{R}^n$ è il numero $\|X\| := d(X, 0)$. È evidente che $d(X, Y) = \|X - Y\|$.

Esercizio 1.1.1 Usando l'interpretazione geometrica della distanza euclidea tra X ed Y come lunghezza del segmento che li unisce, dimostrare la seguente *disuguaglianza triangolare:*

$$d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y) \tag{1.1}$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$.

Su $\mathbb{R}^n$ è definito il *prodotto scalare standard*

$$(X, Y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n,$$

dove x_j ed y_j (j=1,...,n) sono le rispettive componenti dei vettori X ed Y.

Esercizio 1.1.2 Usando la definizione di distanza euclidea, dimostrare la *disuguaglianza di Cauchy*

$$|(X, Y)| \leq \|X\| \|Y\| \tag{1.2}$$

per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$.

Osservazione 1.1.3 Più in generale, un *prodotto scalare reale* è una applicazione $(\cdot,\cdot)$ che associa ad una coppia di vettori un numero reale, soddisfacendo le proprietà

- $(\alpha X, \beta Y) = \alpha\beta(X,Y)$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $X, Y \in \mathbb{R}^n$,
- $(X+Y, Z) = (X,Z) + (Y,Z)$, per ogni $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$,
- $(X,Y) = (Y,X)$,
- $(X,X) \geq 0$ e $(X,X) = 0$ se e solo se $X = 0$.

In questo caso la (1.2) è ancora vera, ma non può essere dimostrata usando la definizione come nel caso euclideo. Osserviamo che ogni prodotto scalare reale *induce* una norma $\|\cdot\|$ data da

$$\|\cdot\|^2 = (X,X).$$

Su $\mathbb{R}^3$ è definito anche il *prodotto vettoriale esterno* $X \wedge Y$. Scrivendo i vettori per componenti $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$, il prodotto vettoriale $X \wedge Y \in \mathbb{R}^3$ è definito da

$$X \wedge Y = (x_2y_3 - x_3y_2, y_1x_3 - x_1y_3, x_1y_2 - y_1x_2).$$

Dato un vettore $X_0 \in \mathbb{R}^n$ ed un numero reale positivo $r > 0$, la *sfera aperta di centro* X_0 *e raggio* r è l'insieme

$$B(X_0, r) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; d(X, X_0) < r \right\}.$$

Un sottinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice *aperto* se vale la seguente proprietà:

$$\forall\, X \in A,\ \exists\, r > 0 \;\middle|\; B(X,r) \in A.$$

Geometricamente, un insieme A è aperto se in ogni suo punto si può *centrare* una sfera di raggio arbitrario (eventualmente 'piccolo' se il punto è 'vicino' al bordo di A) tutta contenuta in A stesso.

Un insieme $C \subset \mathbb{R}^n$ si dice *chiuso* se il suo complementare $C^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin C\}$ è aperto.

Un insieme $B \subset \mathbb{R}^n$ si dice *limitato* se esiste una sfera aperta $B(0,R)$ che lo contiene.

Un punto X_0 è un *punto di frontiera* (o un punto del bordo) di un insieme limitato B se ogni sfera aperta $B(X_0, r)$ contiene punti di B e punti del suo complementare. L'insieme dei punti di frontiera di B si indica con ∂V.

Un insieme $B \subset \mathbb{R}^n$ si dice *compatto* se è chiuso e limitato.

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Un'applicazione $F : A \to \mathbb{R}^m$ si dice *continua* in un punto $X_0 \in A$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che l'immagine della sfera aperta $B(X_0, \delta)$ di centro X_0 e raggio $\delta > 0$ tramite l'applicazione F è contenuta nella sfera $B(F(X_0), \epsilon)$ di centro $F(X_0)$ e raggio ϵ[1].

F si dice continua su un sottinsieme $A' \subset A$ se è continua in ogni punto di A'.

[1]Ricordiamo anche che il concetto di limite di una funzione di più variabili si formula come nel caso di una variabile, sostituendo gli 'intorni lineari' con le sfere aperte.

Teorema 1.1.4 (Teorema di Weierstrass) *Sia $F : \mathbb{R}^n \supset B \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione continua definita su un compatto B. Allora esistono due punti X_m ed X_M in B tali che*

$$F(X_m) = \min_{X\in B} \|f(X)\|, \qquad F(X_M) = \max_{X\in B} \|f(X)\|,$$

ovvero F assume masssimo e minimo in B.

1.2 Matrici

Lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali si indica con $\mathcal{M}(n, n)$. Su esso sono definite le operazioni di somma, prodotto 'righe per colonne' e prodotto per uno scalare. In particolare, data $A \in \mathcal{M}(n, n)$ e dato $X \in \mathbb{R}^n$ (inteso come vettore 'colonna'), è ben definito il prodotto AX. Ogni matrice può essere trattata come un vettore di n^2 componenti, per cui potremmo definire il concetto di norma in modo analogo ad $\mathbb{R}^n$. Tuttavia, nelle applicazioni è più sensata la seguente definizione di *norma uniforme*

$$\|A\| = \max_{X\in\mathbb{R}^n,\ \|X\|=1} \|AX\|. \tag{1.3}$$

Osserviamo che il massimo esiste per il teorema di Weierstrass. Osserviamo inoltre che, per ogni matrice $A \in \mathcal{M}(n, n)$ e per ogni vettore $X \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\|AX\| \leq \|A\|\|X\|. \tag{1.4}$$

Inoltre, se $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, vale

$$\|A\| \leq \sup_{i,j=1,\dots,n} |a_{i,j}|. \tag{1.5}$$

D'ora in avanti il simbolo di norma per una matrice è da intendersi nel senso della norma uniforme. Una funzione $t \mapsto A(t)$ a valori in $\mathcal{M}(n \times n)$ si dice continua in t_0 se

$$\lim_{t\to t_0} \|A(t) - A(t_0)\| = 0.$$

Data $A \in \mathcal{M}(n, n)$, i vettori $V \in \mathbb{R}^n$ tali che $AV = \lambda V$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$ si dicono *autovettori* di A. I corrispondenti numeri λ si dicono *autovalori*. Gli autovalori possono essere anche numeri complessi. Essi sono dati dalle soluzioni dell' *equazione caratteristica*

$$\det[A - \lambda\mathbb{I}] = 0,$$

che è di grado n. L'operazione di *coniugio tramite la matrice invertibile B* trasforma una data matrice A nella matrice BAB^{-1}. I coefficienti del polinomio caratteristico sono invarianti per coniugio, come la traccia ed il determinante. L'*autospazio* relativo all'autovalore λ è la dimensione del sottospazio generato dai corrispondenti autovettori. La dimensione dell'autospazio relativo a λ è detta *molteplicità geometrica di λ*. Se λ è una radice n–upla del polinomio caratteristico, n è detto *molteplicità algebrica di λ*. Essa è sempre maggiore della molteplicità geometrica. Ricordiamo che, per il Teorema fondamentale dell'algebra,

ogni matrice $n \times n$ ammette n radici complesse (contate con la loro molteplicità algebrica). Inoltre, se $z \in \mathbb{C}$ è una soluzione dell'equazione caratteristica, anche il suo coniugato $\overline{z}$ lo è.

Una matrice $A \in \mathcal{M}(n,n)$ si dice *diagonalizzabile* se tutti i suoi autovalori sono reali e la loro molteplicità algebrica è pari a quella geometrica. Quando ciò accade, esiste una base di autovettori $\{V_1, \ldots, V_n\}$ tali che $AV_j = \lambda_j V_j$, per ogni $j = 1, \ldots, n$ (un autovalore λ_j è ripetuto tante volte quanto la sua molteplicità). Da ciò segue anche che, detta V la matrice quadrata con colonne V_j, si ha

$$V^{-1}AV = D := \mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n].\ ^{2}$$

Un richiamo speciale meritano le matrici quadrate 2×2. In questo caso, l'equazione caratteristica di A è

$$\lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\lambda + \det A = 0.$$

Nel caso in cui l'equazione caratteristica ha due soluzioni reali e distinte, A è certamente diagonalizzabile. Nel caso in cui le radici sono complesse, A è certamente non diagonalizzabile. Nel caso in cui si ha una sola radice reale doppia λ_0 si possono verificare entrambe le situazioni, come appare chiaro dai due esempi

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \qquad Z = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix},$$

ove A è diagonalizzabile (anzi, è già diagonale!) e Z non lo è.

1.3 Calcolo differenziale in più variabili

Una funzione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice *lineare* se essa è rappresentata da

$$F(X) = AX, \qquad X \in \mathbb{R}^n,$$

con $A \in \mathcal{M}(n,n)$.

Una funzione $F : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$ si dice *differenziabile* in un punto $X_0 \in A$ se essa è approssimabile nell'intorno di X_0 con una funzione lineare, con un resto infinitesimo di ordine superiore a $\|X - X_0\|$, ovvero se esiste una matrice $A \in \mathcal{M}(n,m)$ tale che

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\|F(X) - F(X_0) - A(X - X_0)\|}{\|X - X_0\|} = 0. \tag{1.6}$$

Una funzione $F : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$ ammette derivata parziale j–esima nel punto X_0 se esiste finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(F(X_0 + he_j) - F(X_0) \right),$$

[2] La notazione a secondo membro indica la matrice diagonale avente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sulla diagonale principale.

ove e_j è il vettore avente tutte le componenti nulle ad eccezione della j–esima componente uguale ad 1 [3].

Sia ora $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ [4]. La *funzione derivata parziale j–esima* di F associa ad ogni punto X la derivata parziale j–esima di F in X (se esiste!). Tale funzione si indica con $\frac{\partial F}{\partial x_j}$. F si dice *di classe* C^1 se tutte le sue derivate parziali cono continue.

Se una funzione $F : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in X_0, allora la matrice A in (1.6) è data da

$$A = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(X_0) \right)_{i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n},$$

ove F_i, $i = 1, \ldots, m$ sono le m componenti della funzione F. La matrice $A \in \mathcal{M}(m, n)$ è detta *matrice Jacobiana* di F in X_0. Nel caso in cui F è un funzionale definito su $\mathbb{R}^n$, la sua matrice Jacobiana si riduce al vettore riga

$$\nabla F(X_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(X_0), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(X_0) \right)$$

detto *gradiente* di F in X_0.

La derivata parziale di F rispetto a x_j può essere indicata con le seguenti notazioni

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}, \quad \partial_{x_j} F, \quad \partial_j F, \quad F_{x_j}.$$

Teorema 1.3.1 (Differenziale totale) *Ogni funzione di classe C^1 è differenziabile.*

Nel seguente teorema le due generiche componenti di un vettore di $\mathbb{R}^2$ sono indicate rispettivamente con x ed y.

Teorema 1.3.2 (Teorema della funzione implicita) *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$. Sia $F : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e sia $X_0 = (x_0, y_0) \in A$ con $F(X_0) = 0$. Se la derivata parziale di F rispetto ad y in X_0 è diversa da zero, allora esistono un intervallo $U \in \mathbb{R}$ contenente x_0 ed una funzione di una variabile $f : U \to \mathbb{R}$ derivabile in U tali che $F(f(x), x) = 0$ per ogni $x \in U$. Inoltre,*

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}(f(x), x).$$

Analogamente alle derivate parziali prime (ovvero le derivate rispetto ad una sola variabile), si definiscono le derivate parziali seconde di un funzionale $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ottenute derivando ulteriormente le derivate parziali prime rispetto ad una qualsiasi variabile. La derivata parziale seconda di F rispetto ad x_i ed x_j si scrive nei vari modi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i x_j}, \quad \partial^2_{i,j} F, \quad \partial^2_{x_i x_j}, \quad F_{x_i, x_j}.$$

[3] e_j è anche detto il j–esimo componente della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

[4] Una funzione a valori in $\mathbb{R}$ si dice anche un *funzionale*, mentre chiameremo spesso *campo vettoriale* una funzione a valori vettoriali.

La *matrice Hessiana* di F in X_0 (se le derivate parziali seconde sono tutte ben definite) è data da

$$D^2F(X_0) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i x_j}(X_0)\right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Analogamente si definiscono tutte le derivate successive. Una derivata si dice di ordine k se vengono effettuate in tutto k derivazioni. Una funzione si dice di classe C^k se tutte le derivate di ordine k (e quindi anche quelle di ordine inferiore) sono continue.

Durante il corso faremo spesso uso degli operatori diffenziali *divergenza* e *laplaciano*. Dato un campo vettoriale $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F = (F_1, \dots, F_n)$, la divergenza di F in X_0 è il numero (se esiste)

$$\mathrm{div}F(X_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(X_0).$$

Dato un funzionale $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, il laplaciano di f in X_0 è il numero (se esiste)

$$\Delta f(X_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_j}(X_0),$$

ovvero il laplaciano di f è la somma degli elementi della diagonale principale della matrice Hessiana di f.

Una *curva regolare* in $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione

$$\mathbb{R} \supset I \ni t \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^n$$

di classe C^1 tale che la sua derivata $\dot{X}(t)$ (detta anche *vettore velocità*) è diversa dal vettore nullo in ogni t.

Una *ipersuperficie regolare* di $\mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^n$ che può essere rappresentato come

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid F(X) = 0\},$$

ove $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è un funzionale di classe C^1 tale che $\nabla F(X) \neq 0$ per ogni X tale che $F(X) = 0$. Ovvero, una ipersuperficie regolare è l'insieme di livello di un funzionale di classe C^1 in cui il gradiente è non nullo. Dato un punto $X \in S \subset \mathbb{R}^3$, si può facilmente dimostrare che il *versore normale uscente* ad S in X è dato da $\nabla f(X_0)/\|\nabla f(X_0)\|$.

Diremo che un insieme limitato $V \subset \mathbb{R}^n$ ha un *bordo regolare* se l'insieme dei suoi punti di frontiera è un ipersuperficie regolare.

Una ipersuperficie regolare di $\mathbb{R}^n$ può essere espressa anche in forma parametrica mediante una applicazione di classe C^1 $r : \mathbb{R}^{n-1} \supset D \to \mathbb{R}^n$, $r = (r_1, \dots, r_n)$. I punti dell'ipersuferficie S sono i punti dell'immagine di r, ovvero

$$\begin{aligned} S = \{&X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = r_i(y_1, \dots, y_{n-1}),\ i = 1, \dots, n, \\ &\text{per qualche } y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in D\}. \end{aligned}$$

1.4 Integrazione

Supporremo in questa sezione che sia noto il concetto di integrale di una funzione di una o più variabili secondo Riemann e che siano note le sue proprietà principali. Richiamiamo qui alcuni risultati utili nel seguito del corso.

Teorema 1.4.1 *Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann. Supponiamo che*

$$\int_V f(x)dx = 0$$

per ogni sottinsieme $V \subset A$. Allora esiste un insieme $N \subset A$ tale che la misura di N è zero[5] *e tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \in A \setminus N$*[6]*. Se in più f è continua, allora f è identicamente nulla su A.*

Teorema 1.4.2 *Sia $F : A \to B$ un'applicazione differenziabile ed invertibile tra due aperti $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Sia $f : B \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora vale la seguente formula di cambiamento di variabile*

$$\int_B f(x)dx = \int_A f(F(y))|\det \nabla F(y)|dy,$$

ove ∇F è la matrice Jacobiana di F.

Richiamiamo brevemente il concetto di *integrale di superficie* in $\mathbb{R}^3$. Sia S un'ipersuperficie regolare di $\mathbb{R}^3$ espressa in forma parametrica da una mappa $X : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^3$, ovvero

$$S = \left\{X \in \mathbb{R}^3 \mid X = X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ (u,v) \in D\right\}.$$

Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 definita sui punti di S. Allora si definisce l'integrale di superficie di F su S come l'integrale multiplo

$$\int_S F d\sigma := \int_D F(X(u,v))||X_u(u,v) \wedge X_v(u,v)||dudv,$$

ove i vettori X_u ed X_v denotano (coerentemente con la notazione di derivata parziale)

$$X_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \quad X_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Teorema 1.4.3 (Teorema di Gauss) *Sia $F : \mathbb{R}^3 \supset V \to \mathbb{R}^n$, $F = (F_1, F_2, F_3)$, un campo vettoriale di classe C^1 definito su un insieme aperto e limitato V avente bordo ∂V regolare. Allora vale l'identità*

$$\int_V \mathrm{div} F(X)dX = \int_{\partial V} F \cdot \nu d\sigma,$$

ove ν denota il versore normale uscente dalla superficie ∂V.

[5] Qualora il concetto di misura non sia noto, interpretare tale affermazione come $\int_N 1dx = 0$.

[6] Si dice in questo caso che f è nulla *quasi ovunque* in A

1.5 Serie di funzioni

Sia $f_k : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^n$ una successione di funzioni da un intervallo I della retta reale a valori nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. La serie di funzioni con termine generico f_k è la somma infinita

$$f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t). \tag{1.7}$$

La funzione $f(t)$ è definita solo per quei $t \in I$ tali che la corrispondente serie (di vettori) $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ è convergente (ovvero convergono le singole serie numeriche date dalle n componenti). Tale insieme di valori di t è detto insieme di *convergenza puntuale*. In alcune applicazioni si utilizzano nozioni più *forti* di convergenza, quali la convergenza *uniforme* e quella *totale*. La serie (1.7) si dice convergere uniformemente al limite $f(t)$ su un dato sottoinsieme $J \subset I$ se

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in J} \left\| f(t) - \sum_{i=0}^{k} f_k(t) \right\| = 0.$$

La serie (1.7) si dice convergere totalmente su $J \subset I$ se la serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{t\in J} \|f_k(t)\|$$

converge. Ovviamente la convergenza uniforme su J implica la convergenza puntuale su ogni punto di J.

Tutte le definizioni date (così come tutti i risultati richiamati in questa sezione) si generalizzano banalmente al caso in cui le funzioni f_k siano a valori nello spazio vettoriale delle matrici $n \times n$. In tal caso, la norma euclidea $\|\cdot\|$ è sostituita dalla norma uniforme dello spazio delle matrici quadrate definita nella (1.3). La convergenza totale nel caso delle matrici è detta convergenza *in norma*.

Teorema 1.5.1 *Ogni serie di funzioni totalmente convergente su un insieme J è ivi uniformemente convergente.*

Teorema 1.5.2 *Sia $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ una serie di funzioni con f_k funzione continua per ogni intero k. Supponiamo che la serie converga uniformemente su J. Allora la somma della serie è una funzione continua su J.*

Teorema 1.5.3 (Passaggio al limite sotto integrale) *Sia $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ una serie di funzioni uniformemente convergente su I ad una somma $f(t)$. Sia $J \subset I$. Allora*

$$\int_J f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_J f_k(t)dt.$$

Una conseguenza dei due teoremi precedenti è in seguente

Teorema 1.5.4 (Teorema di derivazione di una serie) *Sia $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ una serie di funzioni uniformemente convergente su I ad una somma $f(t)$. Supponiamo che f_k è di classe C^1 su I per ogni intero k e supponiamo che la serie delle derivate prime converga uniformemente su I alla funzione $g(t)$, ovvero*

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(t).$$

Allora anche f è di classe C^1 e si ha $g(t) = f'(t)$.

Una *serie di potenze* è una serie di funzioni ciascuna rappresentata da un monomio, ovvero

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k.$$

Ogni serie di potenze ha un *raggio di convergenza* r, tale che per $|t| < r$ la serie converge. Eventualmente r può essere infinito. Si può dimostrare che ogni serie di potenze converge totalmente su ogni insieme del tipo $|t| \leq r_1 < r$. Un esempio importante di serie di potenze è la *serie esponenziale*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}.$$

Si può dimostrare che il raggio di convergenza di tale serie è infinito e che la somma della serie in $t \in \mathbb{R}$ è dato da e^t. Il tipico esempio di serie di potenze è dato dalla *serie di taylor*: sappiamo dall' Analisi 1 che se una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ammette n derivate continue in un punto x_0, allora vale lo sviluppo di Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{f,x_0,n}(x),$$

con

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{f,x_0,n}(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Nel caso in cui una funzione sia derivabile infinite volte (di classe C^∞), lo sviluppo di Taylor diventa una somma di infiniti termini, detta serie di Taylor. Se esiste un intrevallo aperto contenente x_0 tale che in ogni suo punto x la serie di Taylor centrata in x_0 converge ad $f(x)$, allora la funzione f si dice *analitica* in x_0. Più precisamente, una funzione f di classe C^∞ si dice analitica in x_0 se esiste un intervallo $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tale che per ogni punto $x \in I$ si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Quando ciò accade si dice anche che f è sviluppabile in serie di potenze. Una situazione in cui questo avviene è ad esempio nel caso di $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$.

1.6 Serie di Fourier

Sia data una funzione reale $f : [0, l] \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$. Supponiamo che f sia continua e di classe C^1 su $[0, l]$. Allora è possibile sviluppare f in ogni punto di $[0, l]$ come serie di funzioni trigonometriche. Ovvero,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_b \sin\left(\frac{2\pi n x}{l}\right),$$

con

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{l}\right)dx, \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{l}\right)dx,$$

per ogni $n \geq 1$ e

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)dx.$$

1.7 Equazioni differenziali ordinarie

In questa sezione richiamiamo dei risultati di esistenza ed unicità di soluzioni del *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X) \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{1.8}$$

ove $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale, Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed X_0 un punto di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.7.1 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Un campo vettoriale $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ si dice* lipschitziano *su Ω se esiste una costante $L > 0$ tale che, per ogni coppia $X, Y \in \Omega$ si ha*

$$|F(Y) - F(X)| \leq L|Y - X|. \tag{1.9}$$

La più piccola costante L per cui vale la disuguaglianza (1.9) è della costante di Lipschitz *di F su Ω.*

Esercizio 1.7.2 Si può dimostrare che un campo vettoriale F di classe C^1 è *localmente Lipschitziano,* nel senso che la disuguaglianza (1.9) è soddisfatta, se non su tutto l'aperto Ω, almeno su tutti i suoi sottinsiemi compatti. La dimostrazione di questo fatto è un utile esercizio per 'ri–familiarizzare' con il concetto di funzione differenziabile.

Suggerimenti: dati due punti X ed Y in un compatto $K \subset \Omega$, costruire la funzione di una variabile reale

$$[0, 1] \ni t \mapsto f(t) = F(tx + (1 - t)y)$$

ed applicare il teorema del valor medio (di Analisi Uno) tra i punti $t = 0$ e $t = 1$. Usare quindi le disuguaglianze (1.4) e (1.5) ed il teorema di Weierstrass.

Teorema 1.7.3 (Teorema di esistenza ed unicità) *Sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale localmente lipschitziano, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, il problema di Cauchy (1.8) ammette un'unica soluzione locale $X = X(t)$ definita su un intervallo I, $0 \in I$.*

Teorema 1.7.4 (Teorema di esistenza globale) *Nelle ipotesi del teorema precedente, supponiamo che valga la condizione*

$$\|F(Y)\| \leq A\|Y\| + B,$$

con A, B costanti positive. Allora la soluzione $t \mapsto X(t)$ è definita globalmente per $t \in \mathbb{R}$.

1.8 Introduzione alle equazioni alle derivate parziali

Nella sezione precedente abbiamo avuto a che fare con sistemi di equazioni differenziali *ordinarie*, ovvero equazioni differenziali la cui incognita è una funzione (scalare o vettoriale) dipendende da *una sola variabile reale*, che nelle applicazioni rappresenta un tempo, e che abbiamo sempre indicato con t. Molto spesso nel nostro corso tratteremo di equazioni differenziali *alle derivate parziali*, ovvero di equazioni differenziali la cui incognita è una funzione scalare dipendente da *più di una variabile*. Nelle applicazioni descritte in questo corso, le variabili indipendenti saranno sempre due: una variabile temporale $t \geq 0$ ed una variabile *spaziale* $x \in \mathbb{R}^n$. Molto spesso considereremo il caso unidimensionale $x \in \mathbb{R}$, ovvero $n = 1$. Se un'equazione differenziale ordinaria era una relazione algebrica tra la variabile t, l'incognita $X(t)$ e le sue derivate rispetto al tempo, un'equazione alle derivate parziali sarà una relazione algebrica tra le variabili indipendenti x e t, l'incognita $u(x,t)$ e le sue derivate parziali u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, etc...

Esempi di equazioni alle derivate parziali:[7]

(a) L'equazione del calore $u_t = u_{xx}$

(b) L'equazione del trasporto lineare $u_t + cu_x = 0$

(c) L'equazione delle onde $u_{tt} + c^2 u_{xx} = 0$

(d) L'equazione di Burgers $u_t + uu_x = 0$

(e) L'equazione di Buegers viscosa $u_t + uu_x = u_{xx}$

(f) L'equazione di Laplace $u_{xx} = 0$

Nel seguito useremo l'abbreviazione PDE ad indicare un'equazione alle derivate parziali (dall'inglese Partial Differential Equation). Una categoria importante di PDE è costituita dalle PDE *lineari*, ovvero da quelle equazioni in cui la dipendenza dall'incognita u e dalle sue derivate è lineare. Nell'elenco precedente, le uniche equazioni *non* lineari sono la (d) e la (f). Per le PDE lineari vale il seguente

[7] $u = u(x,t)$ è la funzione incognita. Per semplicità consideriamo solo esempi in cui $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.8.1 (Principio di sovrapposizione) *Siano u_1 ed u_2 soluzioni di una data equazione alle derivate parziali lineare. Siano inoltre λ, μ due costanti reali. Allora*

$$\lambda u_1 + \mu u_2$$

è anch'essa una soluzione della stessa equazione.

Riportiamo qui di seguito una sezione sulle equazioni semilineari del primo ordine, che ci saranno utili soprattutto nel capitolo 4.

1.8.1 PDE del primo ordine semilineari

Per equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine semilineare nelle variabili indipendenti $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ si intende un'equazione della forma:

$$a(x,t)u_t + b(x,t)u_x = f(x,t,u), \tag{1.10}$$

dove la funzione incognita $u = u(x,t)$ è una funzione a valori reali. Le funzioni a, b, f sono funzioni regolari, ad esempio a, $b \in C^1(\Omega)$ e $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto del piano (x,t). Una funzione u è *soluzione* dell'equazione (1.10) in un aperto $U \subset \Omega$ se verifica tale equazione per ogni $(x,t) \in U$.

Definiamo ora il problema di Cauchy per l'equazione (1.10). Sia $\mathcal{C}$ una curva regolare contenuta in Ω di equazioni parametriche $x = x_0(\sigma)$, $t = t_0(\sigma)$. Definiamo problema di Cauchy il seguente sistema:

$$\begin{cases} a(x,t)u_t + b(x,t)u_x = f(x,t,u) \\ u(x_0(\sigma), t_0(\sigma)) = u_0(\sigma) \end{cases} \tag{1.11}$$

e u è soluzione di (1.11) se verifica sia l'equazione differenziale che il *dato iniziale* (ovvero la seconda condizione in (1.11)) in ogni punto della curva $\mathcal{C}$. Prima di discutere l'esistenza e l'unicità delle soluzioni di (1.11), vediamo come determinare tale soluzione in un esempio concreto.

Esempio 1.8.2 Consideriamo l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$u_t + v u_x = 0, \tag{1.12}$$

dove $v > 0$ è una costante, a cui aggiungiamo una condizione iniziale

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{1.13}$$

con u_0 funzione regolare. Associamo all'equazione differenziale (1.12) il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie (che è anche un sistema dinamico):

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = v \\ \dot{t}(s) = 1, \end{cases} \tag{1.14}$$

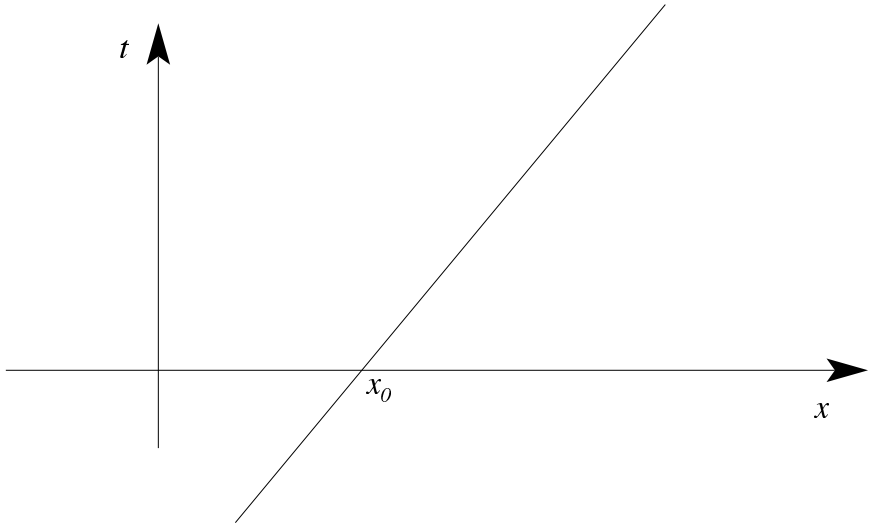

Figura 1.1: caratteristiche per l'equazione (1.12)

dove con "˙" indichiamo la derivata rispetto al parametro s. Le curve soluzioni di (1.14) sono dette *curve caratteristiche* per (1.12). Esse sono curve del piano (x,t), che è detto *piano delle fasi*. Imponendo le condizioni iniziali in $s=0$

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ t(0) = t_0 \end{cases},$$

si determina un'unica soluzione per (1.14) fornita chiaramente da:

$$\begin{cases} x(s) = vs + x_0 \\ t(s) = s + t_0. \end{cases}$$

Dato che la condizione iniziale (1.13) è assegnata sulla curva di equazione $t=0$, imponiamo che (x_0, t_0) sia un punto di tale curva. Ciò comporta $t_0 = 0$. Quindi la curva caratteristica si può riscrivere, eliminando il parametro s, come

$$x(t) = vt + x_0. \tag{1.15}$$

La (1.15) rappresenta pertanto la curva caratteristica che interseca in x_0 la curva $\{t=0\}$ del dato iniziale. Tale curva risulta essere nel piano (x,t) una *retta* di pendenza $\dfrac{1}{v}$ o, equivalentemente, di *velocità* v (vedere Figura 1.1). Sia ora $\phi(t) = u(x(t),t)$ la soluzione di (1.12) calcolata lungo le caratteristiche (1.15). Dalla definizie di caratteristica (sistema (1.14)), si ha:

$$\dot{\phi}(t) = \dot{x}(t)u_x(x(t),t) + u_t(x(t),t) = vu_x(x(t),t) + u_t(x(t),t) = 0,$$

vale a dire, *la soluzione di (1.12) è costante lungo le caratteristiche (1.15)*. Quindi, si può risolvere l'equazione differenziale ordinaria per ϕ e si ha:

$$\phi(t) = \phi(0),$$

vale a dire

$$u(vt + x_0, t) = u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(x_0),$$

utilizzando la (1.15) e la condizione iniziale (1.13). Per determinare ora il valore della soluzione u in un punto generico (x, t) del piano, basta determinare il punto x_0 di intersezione tra la caratteristica passante per (x, t) e l'asse $\{t = 0\}$, cioè basta invertire la relazione $x = vt + x_0$ ottenendo

$$x_0 = x - vt.$$

In definitiva, la soluzione di (1.12)–(1.13) è data da

$$u(x, t) = u_0(x - vt),$$

come è a questo punto facile convincersi anche per verifica diretta. La soluzione al tempo t è pertanto ottenuta traslando il grafico della condizione iniziale u_0 della quantità vt: questa proprietà giustifica la definizione di *velocità* data alla quantità v. In altre parole, le caratteristiche trasportano le informazioni dal dato iniziale e le fanno viaggiare con velocità v (vedere Figura 1.2).

Nell'Esempio 1.8.2 abbiamo visto come è utile introdurre una opportuna famiglia di curve (le curve caratteristiche), che nel caso specifico risultano essere rette, lungo le quali l'equazione differenziale ha una formulazione più semplice, formulazione che permette di risolvere esplicitamente il problema di Cauchy (1.12)–(1.13) (nel caso esaminato, la soluzione risultava *costante* lungo le caratteristiche!!). In realtà, l'utilizzo delle curve caratteristiche permette, anche nel caso generale (1.11), di arrivare ad un teorema di esistenza e unicità delle soluzioni per tale problema di Cauchy. Definiamo allora *curve caratteristiche* per l'equazione

$$a(x, t)u_t + b(x, t)u_x = f(x, t, u) \tag{1.16}$$

le soluzioni del seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = b(x(s), t(s)) \\ \dot{t}(s) = a(x(s), t(s)). \end{cases} \tag{1.17}$$

Se calcoliamo la soluzione u di (1.16) lungo le soluzioni di (1.17), ossia consideriamo la funzione $\phi(s) = u(x(s), t(s))$, si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(s) &= \dot{x}(s)u_x(x(s), t(s)) + \dot{t}(s)u_t(x(s), t(s)) \\ &= a(x(s), t(s))u_t(x(s), t(s)) + b(x(s), t(s))u_x(x(s), t(s)) \\ &= f(x(s), t(s), u(x(s), t(s))) \\ &= \psi(s, \phi(s)). \end{aligned}$$

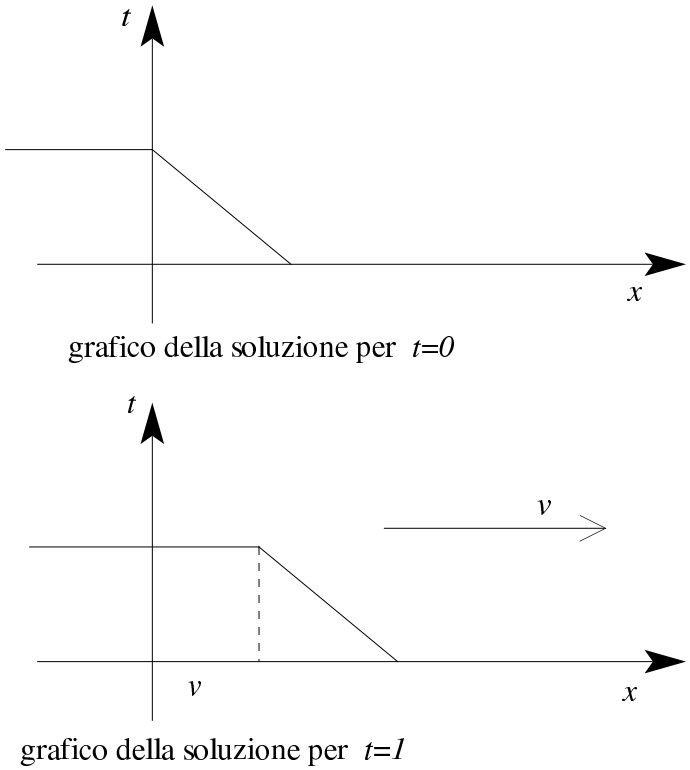

Figura 1.2: la soluzione di (1.12)–(1.13) "viaggia" con velocità v

Pertanto, lungo le caratteristiche, l'equazione alle derivate parziali (1.16) si riscrive come un'equazione differenziale ordinaria: le caratteristiche sono definite proprio in modo che il termine a sinistra in (1.16) diventi una derivata totale rispetto al parametro che descrive le caratteristiche stesse. Abbiamo quindi ridotto lo studio un'equazione alle derivate parziali allo studio di equazioni differenziali ordinarie e, mediante questo metodo, siamo in grado di determinare la soluzione dell'equazione (1.16), con dato iniziale

$$u(x_0(\sigma), t_0(\sigma)) = u_0(\sigma) \tag{1.18}$$

assegnato lungo una curva $\mathcal{C}$ (di equazioni parametriche $(x_0(\sigma), t_0(\sigma))$) regolare contenuta nel dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ di definizione del problema di Cauchy preso in considerazione. Come già osservato nell'Esempio 1.8.2, per far sì che questo metodo sia efficace, le caratteristiche devono poter "pescare" informazioni dalla curva del dato iniziale $\mathcal{C}$ e trasportarle in un aperto $U \subset \Omega$, nel quale otterremo la soluzione cercata. Pertanto, nel teorema di esistenza e unicità locali per (1.16)–(1.18), ci aspettiamo una condizione di compatibilità tra le caratteristiche dell'equazione (1.16) e la scelta della curva del dato iniziale $\mathcal{C}$. Più precisamente, è naturale richiedere che, in ogni punto della curva $\mathcal{C}$ nel quale vogliamo costruire la soluzione locale del problema di Cauchy, la curva caratteristica e la curva

$\mathcal{C}$ siano trasversali, cioè non abbiano la stessa tangente. Questo risultato è stabilito dal teorema seguente.

Teorema 1.8.3 *Sia dato il problema di Cauchy (1.16)–(1.18) per $(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, dove la curva iniziale $\mathcal{C} \subset \Omega$ è regolare e le funzioni a, b, f sono funzioni regolari delle loro variabili e tali che $a(x,t)^2 + b(x,t)^2 \neq 0$ per ogni $(x,t) \in \Omega$. Sia $(x_0,t_0) = (x_0(\sigma_0), t_0(\sigma_0)) \in \mathcal{C}$ un punto della curva iniziale tale che $\mathcal{C}$* non sia caratteristica *in (x_0,t_0) rispetto all'equazione, vale a dire:*

$$a(x_0,t_0)\left.\frac{dx_0}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0} - b(x_0,t_0)\left.\frac{dt_0}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0} \neq 0. \tag{1.19}$$

Allora esiste un aperto $U \subset \Omega$, con $(x_0,t_0) \in U$, e un'unica soluzione $u = u(x,t)$ di (1.16)–(1.18), che verifica (1.16) in ogni $(x,t) \in U$ e (1.18) in ogni punto di $\mathcal{C}$ contenuto in U.

Osservazione 1.8.4 Come abbiamo anticipato, per poter avere un risultato di esistenza e unicità per (1.16)–(1.18), è necessario avere una condizione di trasversalità tra le caratteristiche stesse e la curva del dato iniziale $\mathcal{C}$. Tale trasversalità è garantita dalla condizione (1.19) del Teorema 1.8.3. Infatti, il vettore $\tau = (b(x_0,t_0), a(x_0,t_0))$ rappresenta il vettore tangente alla caratteristica nel punto (x_0,t_0) (si veda la definizione delle caratteristiche tramite il sistema (1.17)), mentre il vettore $\nu_0 = \left(-\left.\frac{dt_0}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0}, \left.\frac{dx_0}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0} \right)$ è il vettore normale alla curva iniziale $\mathcal{C}$ nel punto (x_0,t_0), essendo ortogonale al vettore tangente a tale curva, vale a dire il vettore $T_0 = \left(\left.\frac{dx_0}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0}, \left.\frac{dt_0}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0} \right)$. Pertanto, la condizione (1.19) in termini di tali vettori diventa $\langle \tau, \nu_0 \rangle \neq 0$. In altre parole, *il vettore tangente alla caratteristica non è ortogonale alla normale alla curva del dato iniziale $\mathcal{C}$ in (x_0,t_0)*, cioè *la caratteristica e la curva del dato iniziale $\mathcal{C}$ non hanno la stessa tangente in* (x_0,t_0) (vedere la Figura 1.3).

Esempio 1.8.5 Una classe di esempi fisicamente importanti è fornito dal seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + b(x,t)u_x = f(x,t,u) \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1.20}$$

cioè problemi di Cauchy con dato assegnato lungo la curva $\{t = 0\}$ per equazioni della forma (1.16) con $a(x,t) = 1$. In questo caso, l'asse delle x non è caratteristico rispetto all'equazione considerata in ogni punto $(x_0,0)$. Infatti, il vettore normale a tale curva è dato, in ogni punto, da $(0,1)$ e pertanto la condizione (1.19) diventa:

$$1 \cdot 1 + b(x_0,0) \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

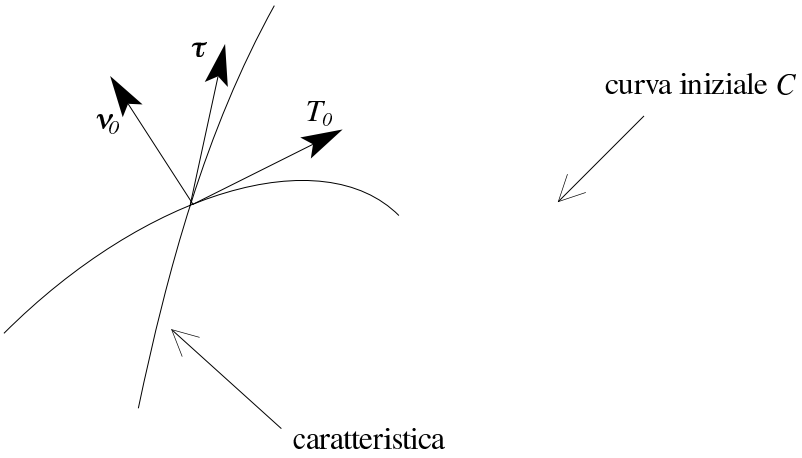

Figura 1.3: interpretazione geometrica della condizione (1.19)

Osserviamo che lo stesso risultato si ottiene per equazioni con coefficiente $a(x,t) \neq 0$ (e non necessariamente uguale a 1), in quanto in questo caso (1.19) diventa:

$$a(x_0,0) \cdot 1 + b(x_0,0) \cdot 0 = a(x_0,0) \neq 0,$$

ma, d'altra parte, tali equazioni si possono ricondurre alla forma (1.20) semplicemente dividendo per $a(x,t)$.

Capitolo 2

Sistemi dinamici.

Un sistema dinamico è un modello matematico che descrive una situazione che cambia nel tempo. Inizieremo introducendo i concetti e le definizioni fondamentali. Discuteremo poi alcuni esempi. Tratteremo quindi in modo completo la teoria dei sistemi lineari, con particolare riferimento ai sistemi 2×2. Il nostro interesse principale, infine, sarà quello di fornire gli strumenti necessari a studiare certe *proprietà qualitative* del modello in esame, quali ad esempio il comportamento per tempi grandi.

2.1 Concetti introduttivi

In ogni sistema dinamico si osservano e si studiano un numero finito di quantità, rappresentate da un vettore di n variabili. Tale vettore vive in un sottinsieme dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ detto *spazio degli stati*, ed è funzione di un parametro reale non negativo t che rappresenta il *tempo*. Indichiamo con $W \subset \mathbb{R}^n$ lo spazio degli stati. L' oggetto matematico che si vuole determinare in un sistema dinamico è una funzione

$$[0, +\infty) \ni t \mapsto X(t) \in W,$$

ovvero una legge che esprime il valore dello stato del sistema dinamico ad un dato istante t. Ricordiamo che uno stato è in realtà un vettore di n componenti, ciascuna delle quali rappresenta una delle grandezze di cui vogliamo studiare l'evoluzione. Saremo più chiari in seguito a tal proposito con degli esempi.

La legge che regola un sistema dinamico esprime la variazione nel tempo degli stati in esame. Più precisamente, un sistema dinamico è specificato tramite una relazione algebrica che coinvolge il tempo t, il valore delle singole componenti del vettore $X(t)$ e la derivata rispetto al tempo dela funzione vettoriale $t \mapsto X(t)$. Formalizziamo il tutto nella seguente definizione.

Definizione 2.1.1 (Sistema dinamico continuo) *Un* sistema dinamico continuo *in un aperto $W \subset \mathbb{R}^n$ (spazio degli stati) è un'equazione differenziale ordinaria vettoriale in $\mathbb{R}^n$*

(oppure un sistema di n equazioni differenziali ordinarie scalari), in forma normale e autonoma (cioè con secondo membro indipendente dal tempo) del tipo

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \tag{2.1}$$

dove $F : W \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale differenziabile (di classe C^1).

*Un'*orbita *(o* soluzione*) di un sistema dinamico continuo è una funzione*

$$[0, +\infty) \ni t \mapsto X(t) \in W$$

che soddisfa l'equazione differenziale (2.1).

Osservazione 2.1.2 (Sistemi dinamici discreti) Nella precendente definizione abbiamo usato il termine 'continuo' per enfatizzare il fatto che il parametro t da cui dipendono gli stati è un numero reale. Esistono anche sistemi dinamici *discreti*, in cui l'orbita è una successione di stati $\{X_j\}_{j=0}^{\infty} \subset W$, con W aperto di $\mathbb{R}^n$. La legge che regola un sistema dinamico discreto è in genere di tipo ricorsivo. Cioè, data un'applicazione vettoriale $f : W \to W$, si definisce il sistema dinamico richiedendo che sia soddisfatta la relazione

$$X_{k+1} = f(X_k)$$

per ogni intero $k \geq 0$. Naturalmente, per determinare univocamente un'orbita è necessario specificare il valore iniziale X_0 della succesione. Una volta che X_0 è noto, l'esistenza e l'unicità di un'orbita del sistema dinamico discreto sono garantite dal principio di induzione.

Ricordiamo che il problema costituito da un sistema dinamico continuo (2.1) e da una condizione iniziale $X(0) = X_0$ prende il nome di *problema ai valori iniziali* o *problema di Cauchy*.

Osservazione 2.1.3 (Esistenza e unicità) Sebbene così ovvie nel caso discreto, l'esistenza e l'unicità di una soluzione di un sistema dinamico continuo (una volta nota la condizione iniziale) costituiscono un risultato non banale. A tal proposito, ricordiamo che un sistema dinamico rientra ovviamente nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie studiate nei precedenti corsi di analisi e richiamate nel capitolo 1. Dato che non è interesse di questo corso esaminare casi di non esistenza o di non unicità per sistemi dinamici, da qui in avanti supporremo che il campo vettoriale F in (2.1) sia di classe C^1. Sotto tale ipotesi, dunque, in virtù del Teorema 1.7.3, dato un punto $X_0 \in W$ esistono un intervallo $[0, t^*)$ ed una curva $X : [0, t^*) \to W$ tali che $X(t)$ è una soluzione locale del sistema dinamico (2.1) sotto la condizione iniziale $X(0) = X_0$.

Definizione 2.1.4 *Il* flusso integrale *(o* integrale generale*) di un sistema dinamico continuo è la famiglia di applicazioni $\Phi_t : W \to W$ (al variare di $t \in [0 + \infty)$) definite come segue: dato $X_0 \in W$, l'immagine $\Phi_t(X_0)$ è data dal valore vettoriale $X(t)$ assunto dalla soluzione del sistema (2.1), avente dato iniziale X_0, calcolata al tempo t.*

Definizione 2.1.5 *Un punto $X_0 \in W$ si dice* punto di equilibrio *del sistema dinamico (2.1) se l'unica orbita corrispondente al dato iniziale X_0 è quella costante $X(t) \equiv X_0$.*

Come vedremo nella prossima sezione, le soluzioni del sistema dinamico (2.1) possono essere esplicitamente calcolate nel caso in cui il campo vettoriale F è lineare. Per convincerci subito di ciò, analizziamo il caso più semplice, ovvero quello unidimensionale $n = 1$.

Esempio 2.1.6 Sia $W = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Consideriamo il sistema dinamico unidimensionale lineare

$$\frac{dx}{dt} = ax.$$

La soluzione con dato iniziale $x(0) = x_0$ è data dalla formula $x(t) = x_0 e^{at}$.

Esempio 2.1.7 (Sistema lineare bidimensionale disaccoppiato) Sia $W = \mathbb{R}^2$. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Consideriamo il sistema dinamico definito per componenti

$$\frac{dx}{dt} = ax, \qquad \frac{dy}{dt} = by.$$

La soluzione $X(t) = (x(t), y(t))$ con dato iniziale $X_0 = (x_0, y_0)$ si trova risolvendo separatamente le equazioni per le singole componenti come nell'esempio precedente, ovvero

$$x(t) = x_0 e^{at}, \qquad y(t) = y_0 e^{bt}.$$

Spesso ci porremo il problema di determinare lo stato limite del sistema dinamico (se esiste) per $t \to +\infty$, ovvero

$$\lim_{t \to +\infty} X(t).$$

Nell'esempio precedente (così come in tutti i casi in cui la soluzione si può calcolare esplicitamente) tale problema si traduce nel semplice calcolo di un limite di una funzione di una variabile. Il comportamento all'infinito dipende ovviamente dalle costanti a e b e dal dato iniziale.

Esercizio 2.1.8 Determinare il limite $\lim_{t \to +\infty} X(t)$ al variare di a, b, x_0, y_0 nell'esempio 2.1.7.

2.2 Sistemi dinamici lineari

Gli esempi trattati nella precedente sezione rientrano nella seguente

Definizione 2.2.1 *Un sistema dinamico si dice* lineare *quando il campo vettoriale F in (2.1) è lineare, ovvero, il sistema è della forma*

$$\frac{dX}{dt} = AX, \tag{2.2}$$

con A matrice $n \times n$ a coefficienti costanti.

Dato che il campo vettoriale F, descritto dalla formula $F(X) = AX$, è ovviamente di classe C^1, sussistono banalmente le condizioni di esistenza ed unicità delle soluzioni del problema ai valori iniziali. Inoltre, valgono anche le ipotesi di esistenza globale richieste nel teorema 1.7.4.

Rivisitiamo l'esempio unidimensionale 2.1.6, ovvero

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Integrando ambo i membri di (2.3) lungo l'intervallo $[0, t]$ otteniamo

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \frac{dx(s)}{ds} ds = x_0 + a \int_0^t x(s) ds. \tag{2.4}$$

Dunque, l'equazione differenziale che regola il sistema è stata riformulata in forma integrale. Pur conoscendo già la soluzione, risolviamo tale equazione con il metodo delle *approssimazioni successive*, che consiste nell'ottenere la soluzione $x(t)$ come approssimazione di una successione di funzioni $x_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$ definita in modo ricorsivo come segue:

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0 \\ x_{k+1}(t) = x_0 + a \displaystyle\int_0^t x_k(s) ds, \quad k \geq 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Calcolando esplicitamente i primi due valori della successione si ottiene

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 + a \int_0^t x_0 ds = (1 + at) x_0 \\ x_2(t) &= x_0 + a \int_0^t (1 + as) x_0 ds = \left(1 + at + \frac{a^2 t^2}{2}\right) x_0, \end{aligned}$$

da cui si deduce (intuitivamente) la seguente formula generale per ogni intero k,

$$x_k(t) = \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{a^i t^i}{i!} \right) x_0. \tag{2.6}$$

Esercizio 2.2.2 Usando il principio di induzione, dimostrare rigorosamente la formula (2.6).

Mandando al limite per $k \to +\infty$ l'equazione approssimante (2.5), ci aspettiamo ovviamente che il limite $x(t) = \lim_{k \to +\infty} x_k(t)$ soddisfi l'equazione integrale (2.4). Se dimostriamo che $x_k(t)$ converge uniformemente al suo limite $x(t)$ sull'intervallo $[0, t]$, tale passaggio sarà giustificato dal teorema 1.5.3 di passaggio al limite sotto il segno di integrale. D'altra parte, la sommatoria in (2.6) non è altro che la successione delle somme parziali relativa

alla serie di Taylor della funzione esponenziale e^{at}, che sappiamo convergere uniformemente su ogni intervallo $[0,t]$, $t \geq 0$. La soluzione del problema (2.3) è dunque rappresentata da

$$x(t) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i t^i}{i!} \right) x_0 = e^{at} x_0.$$

Consideriamo ora il caso generale (2.2) in più di una dimensione, con una condizione iniziale

$$X(0) = X_0. \tag{2.7}$$

Anche in questo caso possiamo riformulare il problema in forma integrale (ove l'integrale di un vettore è il vettore costituito dagli integrali delle singole componenti)

$$X(t) = X_0 + \int_0^t AX(s)ds. \tag{2.8}$$

Definiamo le approssimanti successive $X_k(t)$ come nel caso unidimensionale, ovvero

$$\begin{cases} X_0(t) \equiv X_0 \\ X_{k+1}(t) = X_0 + \displaystyle\int_0^t AX_k(s)ds, \quad k \geq 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

In modo del tutto analogo al caso unidimensionale, otteniamo la seguente formula per le approssimanti

$$X_k(t) = \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{A^i t^i}{i!} \right) X_0, \tag{2.10}$$

ove tutte le operazioni algebriche sono intese nel senso del calcolo matriciale. Contrariamente al caso unidimensionale, la soluzione nel caso generale non è nota a priori. Utilizzeremo pertanto le approssimanti $X_k(t)$ per otterere la rappresentazione della soluzione. Esistono però due problemi. Il primo è quello della *convergenza* della successione $X_k(t)$ (al limite per k che tende all'infinito abbiamo a che fare con una serie di funzioni a valori nello spazio delle matrici quadrate). Il secondo è quello della *consistenza* del limite: occore cioè verificare che l'eventuale limite della serie sia la soluzione del problema di Cauchy (2.2)-(2.7). Per affrontare entrambi i problemi occorre definire un nuovo oggetto: l' esponenziale di una matrice.

Definizione 2.2.3 (Esponenziale di una matrice) *Sia B una matrice $n \times n$. L'esponenziale di B è definito 'formalmente' dalla serie*

$$e^B = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!}. \tag{2.11}$$

Chiariamo il senso dell'avverbio 'formalmente' nella precedente definizione. L'oggetto a secondo membro della formula (2.11) è una serie infinita il cui termine generico è una matrice. Occorre dunque verificare che la serie converga in qualche senso. Ci occuperemo di tale problema nel caso specifico dell'esponenziale che risolve il problema ai valori iniziali in esame, ovvero

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}.$$

Iniziamo con il considerare i casi più semplici.

Esempio 2.2.4 (Multipli dell'identità) Sia $A = \lambda\mathbb{I}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $A^k = \lambda^k\mathbb{I}$, e dunque

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i t^i \mathbb{I}}{i!} = e^{\lambda t}\mathbb{I}.$$

Dunque la corrispondente soluzione del sistema dinamico (2.3)-(2.7) è $X(t) = e^{\lambda t}X_0$. Dato che in questo caso il sistema dinamico è disaccoppiato (come nell'esempio 2.1.7), la verifica che l'espressione precedente è effettivamente soluzione è banale.

Esempio 2.2.5 (Matrice diagonale) Sia $A = diag[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$. Anche in questo caso il calcolo delle potenze di A è semplice, ovvero

$$A^k = diag[\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k],$$

e si ha

$$e^{At} = diag[e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}].$$

Pertanto, la soluzione del corrispondente sistema dinamico è

$$X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) = (e^{\lambda_1 t}x_{0,1}, \ldots, e^{\lambda_{1n} t}x_{0,n}),$$

dove $X_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n})$ è la condizione iniziale. Anche in questo caso il sistema è disaccoppiato e la verifica è un facile esercizio.

Esempio 2.2.6 (Matrice nilpotente) Consideriamo una matrice del tipo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una matrice siffatta si dice *nilpotente*, nel senso che una sua potenza di ordine finito dà come risultato la matrice nulla. Verificare (facile esercizio) che in questo caso $A^2 = 0$. Dunque, in questo l'esponenziale e^{At} è una somma di due termini

$$e^{At} = \mathbb{I} + At = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}.$$

Posto $X_0 = (x_0, y_0)$, la soluzione del problema (2.3)-(2.7) è dunque data da

$$X(t) = (x(t), y(t)) = (x_0, y_0 + x_0 t).$$

Il seguente teorema – del quale omettiamo la dimostrazione – ci sarà utile nel futuro.

Teorema 2.2.7 (Somma degli esponenti) *Se due matrici quadrate A e B commutano tra loro, cioè se $AB = BA$, allora l'esponenziale dela somma è il prodotto delle esponenziali, ovvero*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Risolviamo di seguito il problema della convergenza della serie esponenziale.

Teorema 2.2.8 *Sia A una matrice quadrata $n \times n$. Allora la serie esponenziale*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = e^{At}$$

converge puntualmente per ogni $t \in \mathbb{R}$ ed uniformemente su ogni intervallo compatto di $\mathbb{R}$. Inoltre il limite e^{At} è una funzione continua.

Dimostrazione. Consideriamo la serie delle norme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^j t^j}{j!} \right\|.$$

Usando la maggiorazione (1.4) si ha

$$\left\| \frac{A^j t^j}{j!} \right\| \leq \frac{\|A\|^j |t|^j}{j!}.$$

Dunque la serie delle norme è maggiorata dalla serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^j |t|^j}{j!} = e^{\|A\| t}$$

che sappiamo convergere su ogni compatto (si tratta di una serie esponenziale classica, vedi la sezione 1.5). Dunque la serie di partenza converge in norma. Inoltre, dal teorema 1.5.2 segue che il limite è una funzione continua su ogni compatto di $\mathbb{R}$, ovvero su tutto $\mathbb{R}$. □

Il teorema precedente risponde senz'altro al primo dei due problemi sollevati in precedenza riguardo alle approssimanti X_k definite (2.10), ovvero quello della convergenza. Infatti, si ha evidentemente

$$\lim X_k(t) = e^{At} X_0 =: X(t).$$

In realtà, grazie al teorema 1.5.3 è possibile risolvere anche il problema della consistenza. Infatti, la convergenza uniforme della serie esponenziale implica la convergenza uniforme

del termine $AX_k(s)$ nella (2.9), e dunque la possibilità di passare tale limite sotto il segno di integrale. Dunque, come primo passo otteniamo, al limite per $k \to \infty$,

$$X(t) = X_0 + \int_0^t AX(s)ds.$$

La relazione precedente ci dice in particolare che la curva $t \mapsto X(t)$ è regolare e soddisfa il problema (2.2)-(2.7).

Nel seguito di questa sezione ci occuperemo della soluzione esplicita del problema di Cauchy (2.2)-(2.7) per un sistema dinamico lineare, introducendo anche dei concetti relativi all'analisi qualitativa. Nel seguito utilizzeremo le nozioni richiamate nella sezione 1.2.

Supponiamo di sottoporre il sistema dinamico lineare $\dot{X} = AX$ ad un cambiamento di coordinate $Y = BX$, con $B \in \mathcal{M}(n,n)$. Si suppone che B sia invertibile, ovvero $\det B \neq 0$. Allora l'equazione differenziale diventa

$$\dot{Y} = B\dot{X} = BAX = (BAB^{-1})Y,$$

ovvero $t \mapsto Y(t)$ è soluzione del sistema dinamico lineare $\dot{Y} = CY$ ove C è ottenuta per coniugio da A mediante il cambiamento di coordinate B, ovvero $C = BAB^{-1}$. Posto $Y_0 = BX_0$, avremo

$$Y(t) = e^{Ct}Y_0,$$

per cui

$$X(t) = B^{-1}Y(t) = B^{-1}e^{Ct}Y_0 = B^{-1}e^{Ct}BX_0. \tag{2.12}$$

Dunque le orbite $X(t)$ ed $Y(t)$ sono uguali a meno dell'operazione di coniugio operata mediante il cambio di variabile B^{-1}. Poichè tale operazione non modifica le proprietà geometriche del flusso integrale, è conveniente effettuare uno studio basato su proprietà delle matrici che siano *invarianti* per coniugio, come ad esempio gli autovalori.

2.2.1 Matrici diagonalizzabili

Supponiamo che la matrice A sia diagonalizzabile. In tal caso tutte le orbite del sistema dinamico (2.2) si possono esprimere medidante combinazioni lineari di funzioni esponenziali. Tale affermazione è una diretta conseguenza dell'espressione (2.12) e dell'esempio 2.2.5. Infatti, siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori reali di A (con eventuali ripetizioni a seconda della loro molteplicità algebrica). Siano $V_1, \ldots, V_n$ i corrispondenti autovettori e sia V la matrice avente per colonne i vettori V_j. Allora, da quanto richiamato nella sezione 1.2 e dalla (2.12) segue che

$$X(t) = Ve^{Dt}V^{-1}X_0,$$

ove X_0 è il dato iniziale e $D = \mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$. Dall'esempio 2.2.5, otteniamo quindi

$$X(t) = V\mathrm{diag}\left[e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right] V^{-1}X_0,$$

per cui ogni coordinata di $X(t)$ è combinazione lineare di funzioni esponenziali scalari.

Analizziamo nel dettaglio il caso 2×2. Nell'ipotesi che A sia diagonalizzabile, il comportamento del sistema dinamico è racchiuso nell'esempio 2.1.7. A meno di cambiamenti di coordinate (e quindi a meno di operazioni di coniugio), la soluzione $X(t) = (x(t), y(t))$ si esprime come

$$\begin{cases} x(t) = e^{at} x_0 \\ y(t) = e^{bt} y_0, \end{cases}$$

ove a e b sono i due autovalori di A ed $X_0 = (x_0, y_0)$ è il dato iniziale. Il comportamento qualitativo del sistema dipende dal segno di a e b. Distinguiamo i seguenti casi significativi.

- $a < 0$, $b < 0$. Tutte le orbite hanno per limite per $t \to +\infty$ l'origine. Per $x_0 \neq 0$, le orbite si scrivono in forma cartesiana (detta anche *traiettoria*) come

$$y = y_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{b/a}.$$

  Osserviamo che le tangenti delle orbite nell'origine sono parallele all'asse $x = 0$ se $a < b$, all'asse $y = 0$ se $b < a$. Se $a = b$ le traiettorie sono rette passanti per l'origine con coefficiente angolare y_0/x_0. Nel caso in cui $x_0 = 0$ le orbite sono racchiuse nell'asse $x = 0$. In tutti questi casi il punto di equilibrio nell'origine è detto *nodo attrattivo*.

- $a > 0$, $b > 0$. Tutte le orbite (ad eccezione di quella ferma nel punto di equilibrio nell'origine) vanno all'infinito per $t \to +\infty$. Le traiettorie coincidono con quelle del punto precedente, percorse però in senso contrario. In questo caso il punto di equilibrio nell'origine è detto *nodo repulsivo*.

- $a < 0 < b$. Tutte le orbite con $x_0 \neq 0$ tendono all'infinito per $t \to +\infty$. Le traiettorie sono

$$y = y_0 \left(\frac{x_0}{x} \right)^{-b/a}.$$

  Esse sono asintotiche all'asse $y = 0$ per $t \to +\infty$. Se $x_0 = 0$, invece, le orbite (racchiuse nell'asse $x = 0$) tendono all'origine. Un caso analogo a coordinate 'invertite' si ha per $b < 0 < a$. In tutti questi casi il punto di equilibrio nell'origine è detto *punto di sella*.

Esercizio 2.2.9 Determinare le orbite del sistema dinamico $\dot{X} = AX$, con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -6 \end{bmatrix},$$

e scrivere l'equazione cartesiana delle traiettorie, classificando il punto di equilibrio nell'origine secondo lo schema precedente.

2.2.2 Autovalori complessi

Iniziamo generalizzando il concetto di matrice diagonalizzabile al caso complesso.

Definizione 2.2.10 (Matrice semisemplice) *Una matrice $A \in \mathcal{M}(n,n)$ si dice* semisemplice *se è diagonalizzabile in senso complesso, ovvero se esiste una base di $\mathbb{C}^n$ formata da autovettori $\{V_1, \dots, V_n\}$ tali che*

$$AV_k = \lambda_k V_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{C},\ k = 1, \dots, n.$$

I numeri complessi λ_k sono detti autovalori di A.

Quanto dimostrato in precedenza nel caso di matrici diagonalizzabili può essere generalizzato anche al caso semisemplice. Tale procedimento, tuttavia, non è banale, in quento gli autovettori possono avere componenti complesse, ed un cambio di variabili a coefficienti complessi non è facilmente interpretabile. Procediamo, come sempre, esaminando prima i casi più semplici.

Esempio 2.2.11 (Forma matriciale di un numero complesso) Consideriamo un numero complesso $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Definiamo la matrice quadrata 2×2

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a\mathbb{I} + bJ.$$

Si può dimostrare che la corrispondenza tra numeri complessi z e matrici quadrate della stessa forma di A è biunivoca. La matrice A è detta *forma matriciale di z*. L'utilità di tale rappresentazione è che tutte le operazioni tra numeri complessi si interpretano come operazioni tra matrici. In particolare (ed è qui che tale rappresentazione torna utile alla nostra causa), l'esponenziale di A non è altro che l'esponenziale del numero complesso z espresso in forma matriciale, cioè

$$e^A = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(e^z) & -\mathrm{Im}(e^z) \\ \mathrm{Im}(e^z) & \mathrm{Re}(e^z) \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

La dimostrazione della formula (2.13) non è difficile, ma richiede un po' di calcoli con gli esponenziali di matrici. Essa viene lasciata per esercizio. Come suggerimenti per risolvere l'esercizio raccomandiamo l'utilizzo della formula di Eulero

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$$

e del teorema 2.2.7. Inoltre, suggeriamo di calcolare a parte l'esponenziale e^{bJ}.

Consideriamo ora il caso di una qualsiasi A matrice semisemplice (con autovalori complessi) 2×2. Dal teorema fondamentale dell'algebra segue che gli autovalori sono i complessi coniugati $a+ib$ e $a-ib$. Esistono allora due autovettori complessi W e Z tali che

$$AW = (a+ib)W, \quad AZ = (a-ib)Z.$$

Possiamo scegliere Z in modo che $\overline{Z} = W$. Infatti, poichè $\overline{A} = A$, si ha

$$A\overline{W} = \overline{AW} = \overline{(a+ib)W} = (a-ib)\overline{W}.$$

Quindi, detti $Y = \mathrm{Re}(W) = (W+\overline{W})/2$ e $Y = \mathrm{Im}(W) = (W-\overline{W})/2i$, abbiamo

$$(a+ib)(Y+iX) = AW = A(Y+iX) = AY + iAX$$

e uguagliando parte reale e parte immaginaria otteniamo

$$\begin{cases} AX = aX + bY \\ AY = -bX + aY. \end{cases} \tag{2.14}$$

Ponendo

$$Q = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

e detta B la matrice avente per colonne X ed Y, la relazione (2.14) ci dice che

$$AB = BQ,$$

e dato che B è invertibile (i vettori X ed Y sono linearmente indipendenti, la dimostrazione è lasciata per esercizio), si ha

$$A = BQB^{-1}.$$

Dunque, la relazione (2.12) ci dice ancora una volta che

$$e^{At} = Be^{Qt}B^{-1},$$

e, dato che Q è della forma dell'esempio 2.2.11, siamo dunque in grado di calcolare l'esponenziale di una qualunque matrice semisemplice 2×2 e di risolvere il sistema dinamico associato.

Il procedimento appena esposto si può generalizzare al caso di matrici quadrate di dimensione maggiore di due. Abbiamo il seguente teorema.

Teorema 2.2.12 (Teorema del sistema semisemplice) *Se la matrice A è semisemplice, allora tutte le orbite del sistema dinamico $\dot{X} = AX$ si possono esprimere mediante combinazioni lineari di funzioni esponenziali $e^{a_k t}$ (dove gli a_k sono le parti reali degli autovalori di A) moltiplicate per funzioni trigonometriche* $\cos(b_k t)$ *e* $\sin(b_k t)$ *(dove i b_k sono le parti immaginarie degli autovalori di A).*

La dimostrazione del precedente teorema consiste nel ricondursi (mediante calcolo *a blocchi*) ai casi noti di matrici diagonalizzabili e semisemplici in due dimensioni. Essa viene lasciata come esercizio facoltativo.

Vogliamo ora trattare in modo dettagliato il caso 2×2 come nella sezione precedente. Da quanto detto in precedenza, è sufficiente studiare i sistemi del tipo $\dot{X} = AX$ con A della forma

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a\mathbb{I} + bJ,$$

a cui potremo sempre ricondurci mediante un cambiamento di variabile invertibile, che non modifica le proprietà qualitative del sistema. Come puntualizzato nel suddetto esempio, la soluzione del sistema $X(t) = (x(t), y(t))$ con dato iniziale (x_0, y_0) è data da (ricordando sempre la formula di Eulero)

$$\begin{cases} x(t) = e^{at}[\cos(bt)x_0 - \sin(bt)y_0] \\ y(t) = e^{at}[\sin(bt)x_0 + \cos(bt)y_0]. \end{cases} \tag{2.15}$$

L'orbita (2.15) si può interpretare come una rotazione di un angolo bt seguita da una omotetia di fattore e^{at}. Il comportamento qualitativo dipende solo dal segno di a. Distinguiamo tre casi:

- $a < 0$. Tutte le orbite tendono all'origine per $t \to +\infty$. Le traiettorie sono spirali che si avvolgono attorno al punto di equilibrio con 'frequenza' pari a b. Il punto di equilibrio nell'origine si dice *fuoco attattivo*.

- $a < 0$. Tutte le orbite (tranne quell ferma nell'origine) divergono all'infinito per $t \to +\infty$. Le traiettorie sono spirali che si svolgono dal punto di equilibrio con frequenza pari a b. Il punto di equilibrio nell'origine si dice *fuoco repulsivo*.

- $a = 0$. Tutte le orbite (tranne quell ferma nell'origine) sono descritte da circonferenze (che diventano ellissi a seguito dell'operazione di coniugio) di raggio $\|X_0\|$ e centro l'origine. Esse girano attorno al punto di equilibrio, ripassando sempre per gli stessi punti: ogni orbita è quindi un orbita *periodica* (ovvero assume gli stessi valori a distanza di un tempo fissato detto periodo). Il limite per $t \to +\infty$ non esiste. Si noti che il senso della rotazione dipende dal segno di b. Il punto di equilibrio nell'origine si dice *centro*.

2.2.3 Matrici nilpotenti

Definizione 2.2.13 *Una matrice $N \in \mathcal{M}(n, n)$ si dice* nilpotente *se esiste un intero positivo m tale che $N^m = 0$.*

Una conseguenza elementare della definizione precedente è che l'unico autovalore possibile di una matrice nilpotente è quello nullo. Infatti, supponendo che $NV = \lambda V$, si avrebbe

$N^jV = \lambda^jV$ per ogni intero $j > 0$, e per un certo intero k avremo $\lambda^kV = 0$, ovvero $\lambda = 0$ dato che $V \neq 0$.

Il numero k nella definizione precedente (detto anche *ordine del nilpotente*) deve essere necessariamente minore della dimensione n. Per dimostrare tale affermazione, considerare l'immagine I di $\mathbb{R}^n$ tramite l'applicazione lineare associata alla matrice N. Supponendo per assurdo che la dimensione di I sia pari ad n, si avrebbe che l'immagine di ogni iterata $N^k(\mathbb{R}^n)$ è ancora n, contro l'ipotesi di nilpotenza. Dunque si ha $\dim(I) < n$. Da ciò segue che

$$n > \dim(N(\mathbb{R}^n)) > \dim(N^2(\mathbb{R}^n)) > \ldots > \dim(N^k(\mathbb{R}^n)) = 0,$$

che implica che il numero k è strettamente minore di n.

L'esempio tipico di matrice nilpotente è, nel caso 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Infatti, $A^2 = 0$, come si dimostra facilmente per calcolo diretto. Limitandoci come sempre al caso 2×2, mostriamo come anche in questo caso si può sempre ricondurre una matrice nilpotente alla matrice canonica A mediante un cambio di coordinate invertibile. Sia V_1 un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^2$ tale che $NV_1 \neq 0$, la cui esistenza è garantita nell'ipotesi che N non sia la matrice identicamente nulla. Poniamo quindi $V_2 = NV_1$. Dato che l'ordine del nilpotente è strettamente minore di 2 (e non può essere 0), necessariamente si deve avere $NV_2 = 0$. Ricapitolando, si ha

$$\begin{cases} NV_1 = 0V_1 + 1V_2 \\ NV_2 = 0V_1 + 0V_2, \end{cases}$$

ovvero, detta B la matrice avente per colonne V_1 e V_2,

$$NB = BQ, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

B è invertibile in quanto V_1 e V_2 sono linearmente indipendenti (altrimenti N avrebbe un autovalore non nullo). Dunque abbiamo la relazione di coniugio

$$N = BQB^{-1}.$$

Quanto appena detto può essere generalizzato in più di due dimensioni. Enunciamo il seguente risultato senza dimostrazione.

Teorema 2.2.14 (Forma canonica delle matrici nilpotenti) *Per ogni matrice quadrata $n \times n$ nilpotente N, esiste un cambio di coordinate invertibile B tale che BNB^{-1} ha tutti i coefficienti nulli tranne quelli immediatamente sotto la diagonale principale, che valgono 0 o 1.*

L'importanza delle matrici nilpotenti è espressa dal seguente teorema di decomposizione.

Teorema 2.2.15 *Ogni matrice A di tipo $n \times n$ si può scrivere in uno ed un solo modo come somma di una matrice semisemplice S e di una matrice nilpotente N che commutano tra loro, ovvero $A = S + N$, $NS = SN$.*

In particolare, dal precedente teorema si deduce che se una matrice non è semisemplice, essa ammette una componente nilpotente non banale. Anzichè esaminare i casi di un sistema dinamico a matrice nilpotente, siamo interessati al caso di un sistema dinamico la cui matrice A associata non è semisemplice. Come al solito, semplifichiamo la trattazione considerando il caso 2×2.

Consideriamo il sistema dinamico $\dot{X} = AX$ con $X(t) = (x(t), y(t))$, ed $X(0) = (x_0, y_0)$ ed

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix},$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Decomponiamo $A = S + N$ con S semisemplice ed N nilpotente nel modo seguente

$$S = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Non è difficile mostrare che N ed S commutano tra loro, dunque il teorema 2.2.7 ci dice che

$$e^{At} = e^{St} e^{Nt}.$$

Sappiamo già calcolare e^{St}. Il termine e^{Nt} è semplicemente dato dalla somma di due termini

$$e^{Nt} = \mathbb{I} + tN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix},$$

come già visto nell'esempio 2.2.6. Dunque, la soluzione del sistema dinamico è

$$\begin{cases} x(t) = e^{\lambda t} x_0 \\ y(t) = e^{\lambda t}(t x_0 + y_0). \end{cases}$$

Per $\lambda < 0$ le orbite tendono all'origine per $t \to +\infty$. Viceversa, per $\lambda > 0$ le orbite divergono all'infinito (tranne quella all'equilibrio). Le traiettorie in entrambi i casi sono date dalla formula

$$y = \frac{x}{\lambda} \log \frac{x}{x_0} + x \frac{y_0}{x_0},$$

in cui si evince che la tangente nell'origine è verticale. In questi casi il punto di equilibrio nell'origine è detto *nodo improprio*. Nel caso $\lambda = 0$ l'orbita giace sull'asse $x \equiv x_0$.

2.3 Teoria qualitativa

Quando un sistema dinamico $\dot{X} = F(X)$ è non lineare non sempre è possibile determinare esplicitamente il suo flusso integrale. Tuttavia, da alcune proprietà strutturali del sistema è possibile determinare certe *proprietà qualitative* delle orbite. Ad esempio, in condizioni abbastanza generali è possibile stabilire il comportamento limite per tempi grandi, ovvero il limite delle orbite per $t \to +\infty$. Andiamo con ordine, e stabiliamo subito una condizione necessaria affinchè un punto sia uno stato limite.

Teorema 2.3.1 *Se la soluzione $X(t)$ ha limite per $t \to +\infty$, ovvero se*

$$\lim_{t\to+\infty} X(t) = X_l \in W,$$

ove W è l'aperto su cui F è definito, allora X_l è un punto di equilibrio del sistema, ovvero $F(X_l) = 0$.

Dimostrazione.

Sia Φ^t il flusso integrale del sistema. Dal teorema di esistenza ed unicità locale, la soluzione con dato iniziale il punto limite X_l esiste localmente nell'intervallo di tempo $[0, h)$. Abbiamo la seguente relazione

$$\Phi^h(X_l) = \Phi^h\left(\lim_{t\to+\infty} X(t)\right) = \lim_{t\to+\infty} X(t+h) = X_l,$$

ove la penultima uguaglianza è giustificata dalla continuità del flusso integrale rispetto ai dati iniziali, la cui dimostrazione esula dai propositi di questo corso. □

Definizione 2.3.2 (Nozioni concernenti la stabilità) *Sia dato il sistema dinamico*

$$\dot{X} = F(X), \quad \textit{con} \quad F : W \to \mathbb{R}^n.$$

- *Un punto $S \in W$ si dice* attrattivo *se esiste una sfera aperta U, $S \in U \subset W$ tale che per ogni condizione iniziale $X_0 \in U$, la soluzione $X(t)$ ad essa corrispondente ha S come limite. Dal teorema precedente, ogni punto attrattivo deve essere di equilibrio.*

- *Se S è un punto di equilibrio, si dice* bacino di attrazione *di S l'insieme U delle condizioni iniziali tali che le corrispondenti soluzioni hanno S come limite.*

- *Un punto $S \in W$ si dice* stabile *se per ogni sfera aperta U contenente S esiste una sfera aperta V contenente S ($U, V \subset W$) tale che ogni soluzione con dato iniziale in V è tutta contenuta in U per ogni $t \geq 0$.*

- *Un punto stabile ed attrattivo si dice* asintoticamente stabile.

- *Un punto di equilibrio S si dice* instabile *se è contenuto in una sfera aperta U tale che per ogni sfera aperta V contenente S esiste una condizione iniziale $X_0 \in V$ la cui soluzione non sta in U per qualche $t \geq 0$. Ovvero, un punto è instabile se e solo se non è stabile.*

Esercizio 2.3.3 Stabilire una relazione tra le definizioni di punti di equilibrio dati nella sezione precedente (fuochi, nodi, etc) ed i concetti appena definiti. Ad esempio: un nodo attrattivo è asintoticamente stabile (qual'è il suo bacino di attrazione?).

Un punto attrattivo non è necessariamente stabile, ma i controesempi sono sono semplici.

Passiamo ora a stabilire i criteri utili per determinare la stabilità o l'instabilità di un punto di equilibrio di un sistema dinamico non lineare. Analizzeremo due metodi: il metodo di linearizzazione ed il metodo dei funzionali di Lyapounov.

2.3.1 Metodo di linearizzazione

Il metodo di linearizzazione consiste nello studiare il sistema dinamico ottenuto *linearizzando* il campo vettoriale F, ovvero considerando solo la parte lineare. Ricordiamo che, nell'ipotesi di F campo vettoriale di classe C^1, detta A la sua matrice Jacobiana in suo punto X_0, si ha

$$F(X) = A(X - X_0) + R,$$

ove il termine R è un infinitesimo di ordine superiore al primo in X_0, ovvero

$$\lim_{X \to X_0} \frac{R}{\|X - X_0\|} = 0.$$

Nel seguito diremo $A(X - X_0)$ la 'parte lineare di F vicino ad X_0'.

Definizione 2.3.4 *Dato un punto di equilibrio X_l, detta A la matrice Jacobiana di F in X_l, il sistema lineare*

$$\dot{Y} = AY,$$

è detto sistema linearizzato *di $\dot{X} = F(X)$ in X_l. Le parti reali degli autovalori di A sono detti* esponenti di Lyapounov *del sistema. Se tutti gli esponenti di Lyapounov sono negativi il punto di equilibrio X_l si dice un* pozzo. *Se tutti gli esponenti di Lyapounov sono positivi, X_l si dice una* sorgente.

Torniamo brevemente al caso lineare. Da quanto visto nella sezione precedente, ogni matrice $A \in \mathcal{M}(n, n)$ si può decomporre nella somma di una matrice S semisemplice e di una N nilpotente che commutano tra loro. Quindi, l'esponenziale di At è pari al prodotto $e^{St}e^{Nt}$. Il primo dei due fattori (vedi il teorema 2.2.12) è coniugato di una matrice diagonale a blocchi, ciascuno dei quali è l'esponenziale $e^{\lambda t}$, ove λ è un autovalore di A (reale o complesso), espresso in forma matriciale (vedi l'esempio 2.2.11). Il secondo termine è coniugato dell'esponenziale di una matrice nilpotente in forma canonica, e quindi è una matrice contenente monomi in t. Supponendo che le parti reali degli autovalori siano tutte negative, si dimostra facilmente che il punto di equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile. Abbiamo dunque dato un'idea (senza entrare nei dettagli che lasciamo come esercizio facoltativo) della dimostrazione del seguente teorema.

Teorema 2.3.5 (Teorema del pozzo lineare) *Sia dato il sistema dinamico lineare $\dot{X} = AX$ e supponiamo che gli autovalori di A hanno tutti parte reale negativa. Allora il punto di equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile.*

Il teorema precedente riveste un'importanza tale da meritare una dimostrazione più dettagliata. Il motivo per cui ci accontentiamo invece del precedente abbozzo di dimostrazione è che saremo ben presto in grado di dimostrare rigorosamente l'asserto nel caso non lineare. Prima ci occorrono due teoremi preliminari di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 2.3.6 (Teorema della norma adattata) *Sia A una matrice quadrata a coefficienti reali di tipo $n \times n$, e siano α, β due numeri reali tali che, per ogni autovalore λ di A si ha*

$$\alpha < \mathrm{Re}(\lambda) < \beta.$$

Allora esiste una base $V = \{V_1, \ldots, V_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che se

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i V_i, \qquad X = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i$$

sono due vettori espressi mediante le coordinate in questa base, ed il prodotto scalare definito da queste coordinate è

$$(X, Y)_V = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

allora vale la disuguaglianza

$$\alpha (Y, Y)_V \leq (AY, Y)_V \leq \beta (Y, Y)_V. \tag{2.16}$$

Il prodotto scalare associato alla base V definisce una norma $\|Y\|_V^2 = (Y, Y)_V$ 'adattata' alla matrice A, quindi la disuguaglianza (2.16) si può riscrivere come

$$\alpha \|Y\|_V^2 \leq (AY, Y)_V \leq \beta \|Y\|_V^2.$$

Ricordiamo che una *norma* su $\mathbb{R}^n$ è una applicazione $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ tale che

- $\|X\| = 0$ se e solo se $X = 0$,
- $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$ e per ogni scalare α,
- $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$, per ogni coppia di vettori X, Z.

La norma Euclidea e la norma adattata del teorema precedente sono esempi di norma. Con il simbolo $\| \cdot \|$ senza ulteriori notazioni indicheremo di qui in avanti la norma euclidea.

Teorema 2.3.7 (Teorema di equivalenza delle norme) *Su $\mathbb{R}^n$ tutte le norme sono equivalenti, ovvero, date due qualunque norme $\| \cdot \|_A$ e $\| \cdot \|_B$ esistono costanti positive c e C tali che*

$$c \|X\|_B \leq \|X\|_A \leq C \|X\|_B$$

per ogni vettore $X \in \mathbb{R}^n$.

Siamo ora pronti per dimostrare uno dei teoremi più importanti di questa sezione.

Teorema 2.3.8 (Teorema del pozzo nonlineare) *Sia X_l un pozzo per il sistema dinamico $\dot{X} = F(X)$, con F definito e di classe C^1 su $W \subset \mathbb{R}^n$. Sia A la matrice del sistema linearizzato in X_l. Se c è un numero reale positivo tale che ogni autovalore λ di A ha parte reale $\mathrm{Re}(\lambda) < -c$, allora esiste una sfera aperta U contenente X_l tale che:*

(a) il flusso integrale $\Phi^t(X)$ è definito per ogni X in U e per ogni $t \geq 0$,

(b) esiste una costante $B > 0$ tale che, per ogni $X \in U$ e per ogni $t \geq 0$ si ha

$$\|\Phi^t(X) - X_l\| \leq Be^{-ct}\|X - X_l\|.$$

In particolare, X_l è asintoticamente stabile.

Dimostrazione.

Cambiamo coordinate mediante traslazione in modo che $X_l = 0$. Sia $b > 0$ reale tale che $\mathrm{Re}(\lambda) < -b < -c$ per ogni autovalore λ. Per il teorema della norma adattata esiste una base V (con prodotto scalare e norma associati) tale che

$$(AX, X)_V \leq -b\|X\|_V^2.$$

Dalla definizione di differenziabilità in $X_l = 0$ abbiamo

$$\lim_{X\to 0} \frac{\|F(X) - AX\|}{\|X\|} = 0.$$

D'altra parte, applicando il teorema di equivalenza delle norme possiamo trovare una costante $C > 0$ tale che

$$\frac{\|F(X) - AX\|_V}{\|X\|_V} \leq C\frac{\|F(X) - AX\|}{\|X\|} \to 0 \quad \text{per } X \to 0.$$

Usando la (1.2) applicata al prodotto scalare $(\cdot,\cdot)_V$ otteniamo

$$(F(X) - AX, X)_V \leq \|F(X) - AX\|_V\|X\|_V$$

e dalle due relazioni precedenti segue che

$$\lim_{X\to 0} \frac{(F(X) - AX, X)_V}{\|X\|_V^2} = 0.$$

Sia ora $\epsilon > 0$ arbitrariamente piccolo. Dalla definizione di limite segue che esiste una sfera aperta U tale che, per ogni $X \in U$ si ha

$$\frac{(F(X) - AX, X)_V}{\|X\|_V^2} \leq \epsilon,$$

e di conseguenza

$$(F(X), X)_V = (F(X) - AX, X)_V + (AX, X)_V \leq (\epsilon - b)\|X\|_V^2,$$

e dato che $b > c$, si ha, definitivamente per $X \to 0$,

$$(F(X), X)_V \leq -c\|X\|_V^2.$$

Consideriamo una soluzione $X(t)$ con dato iniziale in U. Esisterà un tempo $t_1 > 0$ tale che per $0 \leq t \leq t_1$ la soluzione resterà in U. Dunque, abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|X(t)\|_V^2 &= \frac{d}{dt}(X(t), X(t))_V = 2(X(t), \dot{X}(t))_V \\ &= 2(X(t), F(X(t))_V \leq -2c(X(t), X(t))_V = -2c\|X(t)\|_V^2,\end{aligned}$$

da cui segue

$$\frac{d}{dt}\left(\|X(t)\|_V^2 e^{2ct}\right) \leq 0,$$

che implica

$$\|X(t)\|_V \leq e^{-ct}\|X(0)\|_V.$$

La formula precedente è vera nell'intervallo temporale $[0, t_1]$. Per mostrare che essa è vera per ogni $t \geq 0$, basta ripetere lo stesso procedimento svolto in precedenza ponendo come dato iniziale $X(t_1)$. Si ottiene una formula analoga valida sull'intervallo $[t_1, 2t_1]$. Iterando questo procedimento si raggiunge lo scopo. Infine, usando nuovamente il teorema di equivalenza delle norme si ottiene la tesi (b). La tesi (a) è conseguenza del teorema 1.7.4. □

Un risultato analogo si può dimostrare nel caso di una sorgente. Ovviamente in questo caso il punto di equilibrio è instabile. Omettiamo i dettagli.

2.3.2 Metodo dei funzionali di Lyapounov

Consideriamo un sistema dinamico $\dot{X} = F(X)$, F campo vettoriale definito e di classe C^1 su un aperto $W \subset \mathbb{R}^n$. Sia dato un funzionale $V : W \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Si dice *derivata totale* di V (lungo il campo vettoriale F) la funzione

$$t \mapsto \dot{V}(X(t)) = \frac{d}{dt}V(X(t)) = \nabla V(X) \cdot F(X),$$

ovvero, la derivata totale di V lungo F è la derivata della funzione composta $t \mapsto V \circ \Phi^t$.

Definizione 2.3.9 *Una funzione V definita e di classe C^1 su un aperto $U \subset W$ contenente il punto di equilibrio X_l si dice* funzionale di Lyapounov *per il sistema dinamico rispetto all'equilibrio X_l se valgono le due condizioni*

(a) $\dot{V}(X(t)) \leq 0$ per ogni orbita $X(t)$ avente dato iniziale in U,

(b) $V(X_l) = 0$ *e* $V(X) > 0$ *per ogni* $X \in U$ *diverso da* X_l*.*

Se valgono la proprietà (b) e la seguente

(a') $\dot{V}(X(t)) < 0$ *per ogni orbita* $X(t)$ *avente dato iniziale in* U *diverso dall'equilibrio* X_l*,*

allora V *si dice* funzionale di Lyapounov stretto*.*

Osserviamo che un funzionale di Lyapounov ha un minimo forte nel punto di equilibrio, ed il suo valore non cresce mai lungo le soluzioni. Un funzionale di Lyapounov stretto è strettamente decrescente lungo le soluzioni. Un tipico esempio di funzionale di Lyapounov per un sistema dinamico è la norma adattata $\|X - X_l\|_V$ nel caso di un pozzo, come si evince dal teorema del pozzo nonlineare.

Teorema 2.3.10 (Primo teorema di stabilità di Lyapounov) *Se il punto di equilibrio* X_l *possiede, in un aperto* U *che lo contiene, un funzionale di Lyapounov* $V(X)$*, allora* X_l *è stabile.*

Dimostrazione.

Sia $\delta > 0$ abbastaza piccolo perché si abbia $B(X_l, \delta) \subset U$. L'insieme $\partial B(X_l, \delta)$ è un compatto su cui $V(X) > 0$. Dunque V ha un minimo $m > 0$ su tale insieme per il teorema di Weierstrass. Sia ora

$$Q := \{X \in B(X_l, \delta) \mid V(X) < m\}.$$

Se il dato iniziale è in Q, la soluzione non può uscire da $B(X_l, \delta)$. Infatti, dato che la distanza $d(X, X_l)$ è una funzione continua del vettore X, e dato che la soluzione deve essere anch'essa continua, la composizione $t \mapsto d(X(t), X_l)$ è una funzione continua. Dato che per $t = 0$ essa vale un numero minore o uguale di δ, se l'orbita uscisse fuori da $B(X_l, \delta)$ la funzione $t \to d(X(t), X_l)$ deve assumere necessariamente il valore δ ad un certo istante (per il teorema dei valori intermedi). Questo vuol dire che ad un certo istante t l'orbita $X(t)$ è distante δ da X_l, ovvero $X(t) \in \partial B(X_l, \delta)$, ovvero $V(X(t)) = m$. Ma questo è impossibile, perché significherebbe che V sta crescendo lungo l'orbita, contro le ipotesi. Dato che il procedimento precedente si può ripetere per ogni $\delta' < \delta$, la definizione di stabilità è dimostrata. □

Se la proprietà (a) dei funzionali di Lyapounov è soddisfatta su tutto l'aperto W, è possibile ottenere delle proprietà più forti della stabilità.

Definizione 2.3.11 *Un insieme* $P \subset W$ *si dice* positivamente invariante *se, per ogni* $X_0 \in P$ *la soluzione con dato iniziale* X_0 *esiste per ogni* $t > 0$ *ed è contenuta in* P*.*

Enunciamo il seguente teorema senza darne la dimostrazione.

Teorema 2.3.12 (Secondo teorema di stabilità di Lyapounov) *Sia* X_l *un punto di equilibrio e sia* $V(X)$ *un funzionale di Lyapounov rispetto ad* X_l *definito su tutto* W *e tale che la proprietà (a) della definizione 2.3.9 sia soddisfatta su tutto* W*. Se* P *è un compatto (di misura non nulla), contenente* X_l*, positivamente invariante e tale che la funzione* V *sia strettamente decrescente lungo le orbite contenute in* P *(salvo che in* X_l*), allora* X_l *è asintoticamente stabile e* P *è contenuto nel bacino di attrazione di* X_l*.*

Osservazione 2.3.13 Come specificato in precedenza, la tecniche usate nella dimostrazione del teorema di linearizzazione e nel metodo di Lyapounov si somigliano molto: in entrambi i casi si utilizzano dei funzionali per avere informazioni sul comportamento delle orbite. Un tale approccio sarà efficace anche in contesti diversi, quali lo studio delle equazioni di diffusione o dei modelli di trasporto trattati in questo corso.

2.4 Applicazioni

2.4.1 Sistemi newtoniani

Consideriamo un punto materiale che si muove lungo una retta la cui ascissa indichiamo con x, soggetto ad una forza esterna $f(x)$ dipendende dalla posizione del punto. L'equazione di Newton ci dice che

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x).$$

Supponiamo per semplicità che f sia di classe C^1. Ponendo $\dot{x} = y$ si ottiene il sistema dinamico 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x). \end{cases} \tag{2.17}$$

Si tratta di un sistema dinamico nonlineare detto *sistema dinamico newtoniano*. Lo spazio degli stati va interpretato come lo spazio bi–dimensionale avente per coordinate la posizione x e la velocità y. Prima di studiarlo in dettaglio, diamo la seguente definizione, che vale per ogni sistema dinamico.

Definizione 2.4.1 *Un funzionale $E : W \to \mathbb{R}$ si dice* integrale primo *per il sistema dinamico $\dot{X} = F(X)$, $F : W \to \mathbb{R}^n$, se, per ogni orbita $X(t)$ del sistema, la funzione*

$$t \mapsto E(V(t))$$

è costante.

I sistemi newtoniani del tipo (2.17) hanno sempre un integrale primo. Per convincercene, chiamiamo $E(x, y)$ una funzione definita sullo spazio degli stati ed imponiamo che E sia un integrale primo. Si ha

$$\dot{E} = E_x\dot{x} + E_y\dot{y} = E_x y + E_y f(x).$$

Quindi si ottiene $\dot{E} = 0$ ponendo ad esempio

$$E_x = -f(x), \quad E_y = y.$$

Integrando entrambi le precedenti equazioni rispetto ad x ed y rispettivamente, otteniamo

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

I due addendi di E sono interpretati come *energia cinetica* ed *energia potenziale*. Notare che, coerentemente con quanto appreso nei corsi di Fisica, l'energia potenziale è definita a meno di una costante x_0. La somma E è detta *energia totale*. Appare chiaro che i punti di equilibrio sono quelli in cui sia la velocità $\dot{x} = y$ che la forza $f(x)$ sono nulle. Applichiamo il metodo di Lyapounov nel seguente teorema.

Teorema 2.4.2 *Nel sistema newtoniano $\ddot{x} = f(x)$, se x_0 è un punto in cui $V = -\int^x f(\xi)d\xi$ ha un minimo locale forte, allora $(x, y) = (x_0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile ma non asintoticamente stabile.*

Dimostrazione.

Scegliamo la costante che definisce l'energia potenziale in modo che $V(x_0) = 0$, ovvero

$$V(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

Allora E è un funzionale di Lyapounov per $(x_0, 0)$ (verificare per esercizio). Quindi il punto di equilibrio è stabile. D'altra parte, $(x_0, 0)$ non può essere un punto limite per $t \to +\infty$, altrimenti si avrebbe su quell'orbita $E \to 0$, cosa impossibile per il teorema della permanenza del segno visto che E è costante e positiva lungo le orbite. □

Osservazione 2.4.3 Analizzando il modello nello spazio degli stati, si deduce che le orbite sono racchiuse nelle curve di livello $E \equiv$ costante. In particolare, le orbite sono periodiche, dato che sono definite globalmente nel tempo e non possono uscire da una data curva di livello.

Modifichiamo ora il sistema newtoniano introducendo un termine *dissipativo*, ovvero dovuto ad attrito. L'equazione di Newton in questo caso è data da

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) - \gamma\frac{dx}{dt}, \quad \gamma > 0.$$

Ponendo $\dot{x} = y$ si ottiene il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) - \gamma y. \end{cases} \tag{2.18}$$

Possiamo definire l'energia totale E come nel caso precedente. Supponiamo di nuovo che x_0 sia un punto di minimo per $-\int^x f(\xi)d\xi$ e definiamo

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

In questo caso otteniamo

$$\dot{E} = -f(x)y + yf(x) - \gamma y^2 = -\gamma y^2 \leq 0,$$

ovvero l'energia totale non è più un integrale primo (l'energia viene dissipata per via dell'attrito), ma è ancora un funzionale di Lyapounov. Quindi il punto $(x_0, 0)$ è stabile. Questa volta però è possibile che esso sia anche asintoticamente stabile, perchè l'energia non è più conservata. Inoltre, l'osservazione ci suggerisce che l'attrito induce nel sistema la tendenza a raggiungere l'equilibrio per tempi lunghi. Per rendere tale affermazione rigorosa utilizziamo questa volta il metodo di linearizzazione. Supponendo per semplicità che $x_0 = 0$, il sistema linearizzato è

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f'(0)x - \gamma y, \end{cases} \tag{2.19}$$

per cui l'equazione caratteristica per determinare gli autovalori è

$$\lambda^2 + \gamma\lambda - f'(0) = 0,$$

da cui si evince che, sotto l'ipotesi di $f'(0) < 0$, gli esponenti di Lyapounov hanno parte reale strettamente negativa (per alcuni valori di γ si hanno anche autovalori reali, entrambi negativi). Dunque, il teorema di linearizzazione ci dice che il punto di equilibrio è asintoticamente stabile.

Esercizio 2.4.4 (Oscillatore armonico smorzato) Consideriamo un punto soggetto ad una forza elastica di richiamo $f(x) = -k \sin x$, con $k > 0$, e ad una forza di attrito lineare $-\gamma\dot{x}$. Usando il metodo di linearizzazione, determinare la natura dei punti di equilibrio del sistema dinamico associato e del suo linarizzato.

2.4.2 Il modello preda-predatore di Lotka e Volterra

Vediamo qui un celebre modellino (dovuto a Lotka e Volterra), che riesce a mettere in equazioni differenziali (abbastanza semplici) l'evoluzione temporale del numero di individui di due specie, prede e predatori, in interazione. Questo modello è sorto dalla necessità di giustificare qualitativamente e decrivere quantitativamente i risultati sperimentali rigurdanti l'andamento periodico della quantità di pesce al mercato di Ancona. Consideriamo il sistema composto di due popolazioni ed indichiamo con C il numero delle prede (conigli) e con V il numero dei predatori (volpi). L'evoluzione di queste due grandezze è data dal sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{C} = \alpha C - \beta CV \\ \dot{V} = -\gamma V + \delta CV, \end{cases} \tag{2.20}$$

ove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono numeri reali positivi. Possiamo notare che in assenza di volpi i conigli cescerebbero esponenzialmente (secondo il cosiddetto modello di Malthus), mentre in assenza di conigli le volpi si estinguerebbero esponenzialmente. I termini nonlineari modellano l'interazione fra le due specie. In particolare il termine $-\beta CV$ ci dice che la probabilità che un coniglio muoia è proporzionale al numero di volpi, mentre il termine δCV ci dice che

la probabilità che una volpe si riproduca è proporzionale al numero dei conigli. Vogliamo mostrare che il sistema 2.20 ammette un integrale primo. Dividendo la prima equazione in (2.20) per C e la seconda per V e ponendo $x = \log C$ ed $y = \log V$, si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha - \beta e^y \\ \dot{y} = -\gamma + \delta e^x. \end{cases} \tag{2.21}$$

Imponendo che $H(x, y)$ sia un integrale primo otteniamo

$$\dot{H} = H_x \dot{x} + H_y \dot{y} = 0$$

che è soddisfatta, ad esempio, qualora valgano le relazioni

$$H_x = -\gamma + \delta e^x, \quad H_y = -\alpha + \beta e^y,$$

per cui, a meno di costanti additive,

$$H(x, y) = \delta e^x - \gamma x + \beta e^y - \alpha y$$

è un integrale primo. Nelle variabili originali (con abuso di notazione) abbiamo determinato l'integrale primo

$$H(C, V) = \delta C - \gamma \log C + \beta V - \alpha \log C.$$

Dalle (2.20) si vede bene che vi è un punto di equilibrio quando

$$V = \frac{\alpha}{\beta}, \quad C = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Dal primo teorema di Lyapounov applicato all'integrale primo H attorno a tale punto, si vede che l'equilibrio è stabile, e quindi piccole perturbazioni danno piccoli moti. Inoltre, le orbite sono periodiche. Questo fenomeno oscillatorio è assai interessante e nasce da un ritardo tra l'evoluzione dei conigli e delle volpi. Se ad esempio le volpi crescono, allora i conigli diminuiscono per la caccia che subiscono, ma allora molte volpi muoiono di fame per la difficoltà di reperire il cibo. Di conseguenza i conigli, soggetti a minore pressione dalle volpi, crescono, trascinando una crescita del cibo e quindi delle volpi stesse, e così via.

Capitolo 3

Modelli di diffusione

3.1 L'equazione del calore

L'*equazione del calore* (o equazione di *diffusione lineare*) per una funzione $u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$ variabile spaziale, $t > 0$ variabile temporale, ha la forma

$$\partial_t u = \mu \Delta u + f(x,t), \tag{3.1}$$

ove Δ indica l'*operatore di derivazione di Laplace*

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

μ è una costante positiva e f è una funzione nota. Nel caso in cui $f \equiv 0$, l'equazione di dice *omogenea*.

3.1.1 Un modello di propagazione del calore

La denominazione dell'equazione (3.1) è dovuta al fatto che essa descrive l'evoluzione della temperatura in un mezzo omogeneo ed isotropo, con densità costante ρ, che può ricevere calore da una sorgente. Indichiamo con r il tasso di calore per unità di massa fornito al corpo dall'esterno, e consideriamo un volume V all'interno del corpo. La legge di bilancio dell'energia richiede che il tasso di variazione dell'energia interna in V eguagli il flusso di calore attraverso il bordo ∂V di V, dovuto alla conduzione, più quello dovuto alla sorgente esterna. Sia e l'energia interna per unità di massa (densità di energia interna), la quantità totale di energia interna in V è data da

$$\int_V e\rho dx.$$

Indichiamo con $\overrightarrow{q}$ il vettore flusso di calore, ovvero, data una superficie infinitesima $d\sigma$ del bordo di V centrata in $x \in \partial V$ con versore normale esterno $\overrightarrow{\nu}$, $(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\nu})d\sigma$ esprime la

quantità di energia che fluisce attraverso $d\sigma$. La presenza del prodotto scalare è coerente con l'osservazione che non c'è alcun flusso di energia se il vettore $\overrightarrow{q}$ è parallelo alla superficie del bordo, e quindi normale a $\overrightarrow{\nu}$. Il flusso di calore *entrante* attraverso l'intera superficie ∂V è dato da

$$-\int_{\partial V}(\overrightarrow{q},\overrightarrow{\nu})d\sigma = -\int_V \operatorname{div}\overrightarrow{q}\,dx,$$

ove abbiamo usato il teorema di Gauss (vedi teorema 1.4.3). Infine, il contributo dovuto alla sorgente di calore esterna è dato da

$$\int_V r\rho dx.$$

Il bilancio dell'energia, dunque, richiede la seguente relazione:

$$\frac{d}{dt}\int_V e\rho dx = -\int_V \operatorname{div}\overrightarrow{q}\,dx + \int_V r\rho dx. \tag{3.2}$$

Assumiamo ora due *relazioni costitutive*. La prima è la *legge di Fourier* per la conduzione del calore, secondo cui il flusso di calore è proporzionale al gradiente della temperatura secondo la relazione

$$\overrightarrow{q} = -\kappa\nabla\theta, \tag{3.3}$$

dove θ è la temperatura assoluta e $\kappa > 0$ è una costante legata alle proprietà del materiale detta *conduttività termica*[1]. Il segno meno nella (3.3) è dovuto al fatto che il calore fluisce da zone ad alta temperatura a zone a bassa temperatura. La seconda equazione costitutiva mette in relazione energia interna e temperatura secondo la legge

$$e = c_v\theta,$$

ove c_v è il calore specifico a volume costante del materiale. La relazione precedente, le (3.3) ed il bilancio energetico (3.2) implicano

$$\int_V \left[c_v\rho\theta_t - \kappa\Delta\theta - r\rho\right] dx = 0.$$

Poichè tale relazione è vera per ogni volume V, l'integranda deve essere identicamente nulla (vedi teorema 1.4.1). Otteniamo dunque l'equazione

$$\theta_t = \mu\Delta\theta + f, \tag{3.4}$$

ove $\mu = \kappa/c_v\rho$ e $f = r/c_v$.

[1] In talune applicazioni, la conduttività termica non può essere considerata costante, ma dipendente da θ. Ci occuperemo di tale eventualità nella sezione 3.2

3.1.2 Problemi ben posti

Così come le equazioni differenziali ordinarie, anche le equazioni alle derivate parziali possono essere risolte in domini diversi, con condizioni al bordo di diversa natura. Prendendo ad esempio l'equazione del calore, esporremo in questo paragrafo dei concetti che riguardano più in generale le equazioni alle derivate parziali *di evoluzione* (ovvero in cui compaia anche la variabile tempo). Cominciamo con il caso semplice in cui la variabile spaziale ha dimensione uno, ovvero $n = 1$. Supponiamo che u sia la temperatura di una sbarra di sezione trascurabile. Possiamo pensare alla sbarra come al segmento $[0, L]$ sull'asse reale. La posizione sulla sbarra è detta x. Il tempo t varia in un intervallo $[0, T]$. Se vogliamo studiare l'evoluzione della temperatura è ragionevole precisare la sua distribuzione iniziale. Occorre dunque assegnare un *dato iniziale* $u(x, 0) = u_0(x)$. Questo però non è sufficiente, in quanto occorre anche tenere conto di come la sbarra interagisce con l'ambiente circostante. Ad esempio, potremmo tenere la temperatura ad un livello desiderato agli estremi delle sbarre. Ciò equivale ad assegnare i dati $u(0, t)$ e $u(L, t)$ per $t \geq 0$, che sono detti *dati di Dirichlet*. Anziché la temperatura, si potrebbe controllare il flusso di calore agli estremi, che sappiamo essere proporzionale a u_x per la legge di Fourier. Dunque, possiamo assegnare $u_x(0, t)$ e $u_x(L, t)$, che sono detti *dati di Neumann*. In alcune applicazioni ha senso studiare il problema su tutta la retta reale senza condizioni al bordo. Quando ciò accade, il problema dato dall'equazione più il suo dato iniziale è detto *problema di Cauchy*. Se il dato iniziale è accompagnato da dati di Dirichlet su un intervallo, il problema è detto di *Cauchy–Dirichlet*, mentre se il dato iniziale è accompagnato da dati di Neumann il problema è detto di *Cauchy–Neumann*. Si può dimostrare che tutti questi problem sono *ben posti*, ovvero esiste sempre una soluzione unica e vi è continuità rispetto ai dati iniziali e alle condizioni al bordo. Quest'ultima affermazione rimarrà un po' oscura, in quanto in questo corso non sempre (quasi mai) ci occuperemo di esistenza di soluzioni. Interpretiamola nel senso seguente: se variamo 'di poco' i dati iniziali ed i dati al bordo, allora la soluzione varia 'di poco'.

Le definizioni appena date si generalizzano in modo naturale al caso $n > 1$. Pensiamo ad un corpo conduttore di calore che occupi una regione V limitata del piano o dello spazio tridimensionale. Per ottenere una soluzione è necessario anche qui assegnare condizioni iniziali e condizioni al bordo. Nel caso delle condizioni di Dirichlet assegneremo la temperatura in ogni punto del bordo ∂V. Le condizioni di Neumann corrispondono all'assegnazione del flusso di calore al bordo, ovvero $q = -\kappa \nabla \theta$ secondo la legge di Fourier. Siccome ci interessa il flusso *entrante*, assegneremo al bordo i valori di $-q \cdot \nu = \kappa \partial_\nu \theta$, ovvero la derivata direzionale di θ nella direzione normale uscente dal bordo ν. Si possono assegnare anche condizioni al bordo *miste*, ovvero fissare i valori di θ in alcuni punti di ∂V ed i valori di $\partial_\nu \theta$ negli altri punti. Un'altra possibilità è quella di assegnare in un punto del bordo un valore corrispondente ad una particolare combinazione lineare di θ e $\partial_\nu \theta$, ovvero

$$\partial_\nu \theta + \alpha \theta = \beta$$

con $\alpha > 0$. In tal caso si parla di condizione di *radiazione* (o di *Robin*). Infine, anche in dimensione maggiore di uno ha senso risolvere il problema di Cauchy su tutto lo spazio. In

tutti questi casi i problemi sono ben posti nel senso sopra specificato. Dimostreremo tale asserto solo in parte, provando solo l'unicità delle soluzioni, nel paragrafo 3.1.4.

Per concludere questa sezione, consideriamo una soluzione non negativa $\rho(x,t)$ del problema di Cauchy relativo all'equazione del calore tale che la *massa totale*[2] della soluzione $\int \rho(x,t)dx$ sia finita ad ogni tempo t. Allora, integrando l'equazione del calore su tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$ e derivando rispetto al tempo otteniamo

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x,t)dx = D\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\rho(x,t)dx.$$

Ora, dato che la soluzione ha massa finita, essa è essenzialmente nulla per $|x| \to +\infty$.[3] Supponendo per semplicità che $\rho(\cdot,t)$ sia identicamente uguale a zero al di fuori della sfera $B(0,R)$ con R grande, usando il teorema di Gauss 1.4.3, l'integrale a secondo membro nella relazione precedente si riduce all'integrale superficiale

$$D\int_{\partial B(0,2R)} \frac{\partial\rho}{\partial\nu}d\sigma = 0,$$

che implica che l'integrale $\int \rho(x,t)dx$ si conserva nel tempo. Tale fenomeno è matematicamente detto *conservazione della massa*.

3.1.3 Evoluzione della temperatura in una sbarra omogenea. Tendenza all'equilibrio

Vediamo nel seguito un semplice esempio di problema di Cauchy–Dirichlet risolto mediante il cosiddetto metodo della separazione delle variabili. Lo scopo è quello di constatare che l'evoluzione del modello corrisponde alla previsione suggerita dalla fisica. Una sbarra di lunghezza L è tenuta inizialmente a temperatura θ_0. Successivamente, l'estremo $x = 0$ è mantenuto alla stessa temperatura, mentre l'estremo $x = L$ viene mantenuto ad una temperatura costante $\theta_1 > \theta_0$. Vogliamo sapere come evolve la temperatura.

Prima di fare calcoli, proviamo a congetturare che cosa può succedere. Dato che $\theta_1 > \theta_0$, dall'estremo caldo comincerà a fluire calore causando un aumento della temperatura all'interno e una fuoruscita di calore dall'estremo freddo. All'inizio, il flusso entrante sarà superiore al flusso uscente, ma col tempo, con l'aumento della temperatura all'interno, esso comincerà a diminuire, mentre il flusso uscente aumenterà. Ci si aspetta che prima o poi i due flussi si bilancino e si assestino su una situazione stazionaria. Sarebbe poi interessante avere informazioni sul tempo di assestamento.

Cerchiamo ora di dimostrare che questo è esattamente il comportamento che il nostro modello matematico riproduce. Il problema è:

$$\theta_t - D\theta_{xx} = 0 \quad t > 0,\ 0 < x < L$$

[2]Il termine 'massa' è fisicamente inappropriato, visto che l'incognita rappresenta una temperatura. Tale termine viene usato per analogia con altri modelli, in particolare quelli trattati nel prossimo capitolo.

[3]Si pensi ad esempio al caso in cui ρ ammette limite l per $x \to +\infty$. Se l fosse diverso da zero, l'integrale di ρ su tutto $\mathbb{R}$ dovrebbe essere necessariamente infinito.

con le condizioni

$$\begin{array}{lll} \theta(x,0)=\theta_0 & & 0\le x\le L \\ \theta(0,t)=\theta_0 & \theta(L,t)=\theta_1 & t>0. \end{array}$$

Non lasciamoci impressionare dal fatto che il dato iniziale non si raccordi con continuità con quello laterale all'estremo $x = L$; vedremo dopo che cosa ciò comporti. Conviene riformulare il problema passando a variabili *adimensionali*, riducendo i dati a 0 e a 1. Per passare a variabili adimensionali occorre riscalare tutte le variabili rispetto a grandezze caratteristiche del sistema. Ad esempio, la lunghezza della sbarra è una caratteristica che possiamo usare per riscalare la variabile spaziale. Poniamo dunque

$$y = \frac{x}{L}$$

che è ovviamente una grandezza adimensionale essendo rapporto tra lunghezze. Notiamo poi che $0 \le y \le 1$. Osserviamo poi che la costante D ha come dimensione

$$[\text{lunghezza}]^2 \times [\text{tempo}]^{-1}.$$

La costante $\tau = \frac{L^2}{D}$ ha dunque le dimensioni di un tempo, ed è legata alle caratteristiche del problema. Poniamo dunque

$$s = \frac{t}{\tau}$$

che è anche essa una quandità adimensionale. Poniamo infine

$$u(y,s) = \frac{\theta(Ly,\tau s)-\theta_0}{\theta_1-\theta_0}.$$

Risulta

$$\begin{array}{lll} u(y,0)=0 & & 0\le y\le 1 \\ u(0,s)=0 & u(1,s)=1 & s>0. \end{array}$$

Inoltre, semplici calcoli permettono di ricavare l'equazione derivate parziali soddisfatta da u, ovvero

$$u_s - u_{yy} = 0.$$

Abbiamo così riformulato il nostro problema di Cauchy–Dirichlet in variabili adimensionali.

Cominciamo con il determinare la *soluzione stazionaria* u^S del problema, ovvero quella soluzione che si ottiene dimenticandoci della condizione iniziale, tenendo conto delle condizioni al bordo e richiedendo che la soluzione non dipenda dal tempo. Stiamo cercando quindi una funzione $u = u(y)$, $0 \le y \le 1$, tale che $u_{yy} = 0$, $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$. Si trova facilmente la funzione lineare $u^S(y) = y$, che nelle variabili originali è data da

$$\theta^S(x) = \theta_0 + (\theta_1-\theta_0)\frac{x}{L},$$

che corrisponde ad un flusso di calore

$$\frac{\partial \theta^S}{\partial x} \equiv -\kappa \frac{\theta_1 - \theta_0}{L}$$

uniforme lungo la sbarra.

Dalle considerazioni precedenti, la soluzione stazionaria è per noi un punto di riferimento, dato che ci aspettiamo che l'evoluzione di u sia molto vicina ad essa per tempi s molto grandi. Conviene dunque considerare l'incognita

$$U(y,s) = u^S(y) - u(y,s) = y - u(y,s),$$

detta *regime transitorio*. Ci aspettiamo dunque che U tenda a zero per $s \to +\infty$. Osserviamo che U soddisfa $U_s - U_{yy} = 0$ con dato iniziale $U(y,0) = y$ e dati al bordo $U(0,s) = U(1,s) = 0$. L'introduzione del regime transitorio ha apportato un vantaggio: i dati al bordo di Dirichlet sono diventati *omogenei*, ovvero nulli.

Cerchiamo ora una formula esplicita per la soluzione U usando il metodo della *separazione delle variabili*. Poniamo

$$U(y,s) = w(s)v(y),$$

per cui l'equazione differenziale per U diventa

$$0 = w'(s)v(y) - w(s)v''(y),$$

da cui, separando le variabili,

$$\frac{w'(s)}{w(s)} = \frac{v''(y)}{v(y)}.$$

Come sempre avviene usando tale metodo, il primo membro dipende solo da s, il secondo dipende solo da y, per cui l'unica possibilità è che siano entrambi uguali ad una costante λ, il che conduce alle due equazioni

$$v''(y) = \lambda v(y) \tag{3.5}$$
$$w'(s) = \lambda w(s). \tag{3.6}$$

Usiamo l'equazione (3.5) con le condizioni al bordo $v(0) = v(1) = 0$ per determinare λ. Vi sono tre casi.

- Se $\lambda = 0$ si ha $v(y) = A + By$, il che porta a $v(y) \equiv 0$ in virtù delle condizioni al bordo.

- Se $\lambda = \mu^2 > 0$, allora $v(y) = Ae^{-\mu y} + Be^{\mu y}$, ed ancora una volta le condizioni al bordo implicano $v(y) \equiv 0$.

- Se infine $\lambda = -\mu^2 < 0$, allora si ha $v(y) = A\sin\mu y + B\cos\mu y$. Imponendo le condizioni al bordo si trova

$$\begin{aligned} v(0) &= B = 0 \\ v(1) &= A\sin\mu + B\cos\mu = 0 \end{aligned}$$

da cui A è una costante arbitraria, $B = 0$ e $\mu = m\pi$, con $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Dunque solo il terzo caso produce delle soluzioni non nulle, cioè

$$v_m(y) = A\sin m\pi y, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Sostituendo i valori $\lambda = -m^2\pi^2$ alla (3.6) otteniamo le soluzioni

$$w_m(s) = Ce^{-m^2\pi^2 s},$$

che portano alla seguente famiglia di soluzioni per U

$$U_m(y,s) = A_m e^{-m^2\pi^2 s}\sin m\pi y, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ricordiamo che per le equazioni alle derivate parziali lineari omogenee vale il *principio di sovrapposizione*[4], per cui la somma di soluzioni è ancora una soluzione. Formalmente, dunque, la somma infinita

$$U(y,s) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-m^2\pi^2 s}\sin m\pi y$$

costituisce la forma più generale della soluzione del problema con i dati al bordo. La condizione iniziale determinerà i coefficienti A_m, dandoci una soluzione unica. Per determinare tali coefficienti usiamo lo sviluppo in serie di Fourier del dato iniziale (il cui calcolo è lasciato per esercizio)

$$y = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{2}{m\pi}\sin m\pi y.$$

Imponendo $U(y,0) = y$ otteniamo dunque la soluzione

$$U(y,s) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{2}{m\pi}e^{-m^2\pi^2 s}\sin m\pi y.$$

Osservando l'espressione di U si osserva immediatamente che per s molto grande l'ampiezza delle oscillazioni delle componenti sinuisoidali diminuisce esponenzialmente. Si può dire di più: la soluzione $U(y,s)$ tende a zero uniformemente per $s \to +\infty$, ovvero

$$\sup_{y\in[0,1]} |U(y,s)| \to 0, \quad \text{per} \quad s \to +\infty.$$

[4]Vedi il teorema 1.8.1

Dimostriamo tale affermazione. Dalla disuguaglianzza triangolare e dalla formula esplicita per la serie geometrica[5] abbiamo

$$\sup_{y\in[0,1]} |U(y,s)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m\pi} e^{-m^2\pi^2 s} \leq \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\pi^2 s}$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1-e^{-\pi^2 s}} - 1\right] = \frac{2}{\pi}\frac{e^{-\pi^2 s}}{1-e^{-\pi^2 s}}.$$

Scegliendo ad esempio $s > 1$ (siamo interessati al limite per $s \to +\infty$) abbiamo

$$\sup_{y\in[0,1]} |U(y,s)| \leq \frac{2}{\pi(1-e^{-\pi^2})} e^{-\pi^2 s},$$

il che dimostra la tesi e ci dice che il decadimento a zero avviene in modo esponenziale. Ciò prova dunque in modo rigoroso che il regime transitorio tende a zero, e che la temperatura della sbarra tende a distrubuirsi in modo stazionario per tempi grandi.

Esercizio 3.1.1 Riportare tutti i risultati e le formule precedenti nelle variabili originarie $\theta(x,t)$.

3.1.4 Il metodo dell'energia. Unicità

Consideriamo due soluzioni u e v dell'equazione del calore $u_t = D\Delta u$ su un dominio $V \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$. Supponiamo che u e v assumano lo stesso dato iniziale $u(x,0) = v(x,0) = g(x)$ per ogni $x \in V$. Supponiamo inoltre che per u e v valgano le stesse condizioni al bordo, siano esse di Dirichlet, di Neumann, miste, di Robin. Consideriamo ora la differenza tra le due soluzioni $w = u - v$. Ovviamente si ha $w_t = D\Delta w$ per il principio di sovrapposizione. Inoltre $w(x,0) \equiv 0$. A seconda dei diversi tipi di dati al bordo, w soddisfa una delle seguenti condizioni: $w = 0$ nel caso di condizioni di Dirichlet, $\partial_\nu w = 0$ nel caso di condizioni di Neumann, $\partial_\nu w + \alpha w = 0$ con $\alpha > 0$ nel caso di condizioni di Robin, $w = 0$ su $A \subset \partial V$ e $\partial_\nu w = 0$ su $\partial V \setminus A$ nel caso di problema misto.

Moltiplichiamo l'equazione di diffusione per w ed integriamo sul dominio V. Otteniamo

$$\int_V w w_t dx = D \int_V w \Delta w dx. \tag{3.7}$$

Ora, passando la derivata temporale sotto il segno di integrale (possiamo farlo perchè l'integrale è rispetto ad x), otteniamo

$$\int_V w w_t dx = D \int_V \left(\frac{w^2}{2}\right)_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_V w^2 dx.$$

[5] Dato un numero reale a tale che $0 < a < 1$, si ha $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Inoltre, dal teorema di Gauss 1.4.3 e dalla regola di derivazione del prodotto abbiamo

$$\int_V w\Delta w dx = \int_V \mathrm{div}(w\nabla w)dx - \int_V |\nabla w|^2 dx = \int_{\partial V} w\partial_\nu w d\sigma - \int_V |\nabla w|^2 dx.$$

Sostituendo le ultime due identità nella (3.7), ponendo

$$E(t) := \int_V w^2 dx,$$

otteniamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t) = D\int_{\partial V} w\partial_\nu w d\sigma - D\int_V |\nabla w|^2 dx \leq D\int_{\partial V} w\partial_\nu w d\sigma.$$

Se vale la condizione di Robin

$$\int_{\partial V} w\partial_\nu w d\sigma = -\alpha\int_{\partial V} w^2 dx \leq 0.$$

In tutti gli altri casi

$$\int_{\partial V} w\partial_\nu w dx = 0.$$

Di conseguenza si ha

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0.$$

Il funzionale non negativo $t \to E(t)$ è detto *energia*. Esso decresce nel tempo, per cui si ha

$$E(t) \leq E(0) = \int_V w(x,0)^2 dx = 0,$$

da cui segue che $E(t) \equiv 0$ per ogni $t \geq 0$. Dato che l'integranda in $E(t)$ è non negativa, ciò implica che essa deve essere identicamente nulla, ovvero $w(x,t) \equiv 0$ per ogni $x \in V$, $t \geq 0$, ovvero $u \equiv v$. I calcoli che abbiamo appena concluso presuppongono che le soluzioni siano sufficientemente regolari in modo tale da poter effettuare su di loro le necessarie operazioni di derivazione. Diamo qui per scontato che questo accade. Quanto appena mostrato si può dunque sintetizzare nel seguente

Teorema 3.1.2 *I problemi di Cauchy–Dirichlet, Cauchy–Neumann, Cauchy–Robin e misto hanno al più una soluzione.*

3.1.5 La soluzione fondamentale

Abbiamo già osservato che, grazie al principio di sovrapposizione, è possibile costruire soluzioni dell'equazione del calore a partire da altre soluzioni. Ciò è possibile anche usando la proprietà di *invarianza di scala* che ci accingiamo a mostrare. Data una soluzione

$u(x,t)$ dell'equazione del calore su $\mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$ tale che il suo integrale su tutto $\mathbb{R}^n$ è finito, vogliamo costruire un'altra soluzione v definita come

$$v(x,t) = cu(ax,bt),$$

con costanti positive a,b,c da determinare, tale che

$$\int u(x,t)dx = \int v(x,t)dx.$$

Stiamo dunque cercando una soluzione v costruita a partire dalla soluzione mediante omotetie sulle variabili dipendenti ed indipendenti (tale operazione è detta *scaling*, o riscalamento delle variabili) in modo tale che la *massa totale* $\int udx$ sia conservata. Sostituendo l'espressione per v nell'equazione del calore soddisfatta da u, ponendo $\tau = bt$ e $y = ax$, otteniamo

$$0 = u_\tau - D\Delta_y u = \frac{1}{cb} v_\tau - \frac{1}{ca^2} D\Delta_x v.$$

Dunque v soddisfa ancora l'equazione del calore se $b = a^2$. Per la conservazione della massa occorre inoltre che $c = a^n$, come appare evidente dal calcolo

$$\int v(x,t)dx = \int cu(ax,bt)dx = ca^{-n} \int u(y,\tau)dy.$$

In conclusione, in corrispondenza di una soluzione u e di un parametro arbitrario positivo a abbiamo costruito una nuova soluzione $u_a(x,t) = a^n u(ax,a^2t)$. Appare naturale, a questo punto, cercare delle soluzioni che rimangano *invariate* a seguito dello scaling precedente, cioè tali che $u = u_a$ per ogni a. Una condizione necessara affinché ciò avvenga è che $u = u_{a^*}$ con $a^* = t^{-1/2}$, il che implica

$$u(x,t) = t^{-n/2} u(x/t^{1/2}, 1).$$

L'espressione appena scritta ci dice che la soluzione invariante $G(x,t)$ che stiamo cercando si può scrivere come $t^{-n/2}U(\xi)$, per una certa funzione U della variabile n–dimensionale $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$, dunque

$$G(x,t) = t^{-n/2}U(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

Imponendo che G soddisfi l'equazione del calore, otteniamo

$$0 = U_u - D\Delta_x U = t^{-\frac{n}{2}-1} \left[-\frac{n}{2}U - \frac{1}{2}\xi \cdot \nabla_\xi U \right] - t^{-\frac{n}{2}-1} D\Delta_\xi U,$$

che possiamo riscrivere come

$$\operatorname{div}\left(D\nabla U + \frac{1}{2}\xi U \right) = 0.$$

Ricordiamo che la nostra funzione $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dovrà essere integrabile su tutto $\mathbb{R}^n$. Per semplificare la situazione, imponiamo anche che essa sia sempre diversa da zero. Possiamo quindi dividere e moltiplicare per U all'interno dell'operatore di divergenza ottenendo

$$0 = \operatorname{div}\left[U\left(D\frac{\nabla U}{U} + \frac{\xi}{2}\right)\right] = \operatorname{div}\left[U\nabla\left(D\log U + \frac{|\xi|^2}{4}\right)\right].$$

L'equazione precedente è soddisfatta ad esempio se

$$D\log U + \frac{|\xi|^2}{4} = \text{costante}.$$

In realtà, dal fatto che U deve essere integrabile segue che non vi possono essere soluzioni diverse. Abbiamo quindi ottenuto l'espressione

$$U(\xi) = Ce^{-\frac{|\xi|^2}{4D}},$$

ovvero

$$G(x,t) = Ct^{-n/2}e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}.$$

La funzione G è detta *soluzione fondamentale* (o soluzione Gaussiana) dell'equazione del calore in $\mathbb{R}^n$. La costante C è scelta in base alla massa totale. Osserviamo che la soluzione trovata è compatibile con l'assunzione fatta in precedenza che essa debba essere sempre diversa da zero a condizione che $t > 0$. Dunque, la soluzione fondamentale è una soluzione solo per tempi strettamente positivi. Essa, in effetti, non ammette un dato iniziale ben definito, in quanto il suo valore in $x = 0$ esplode quando $t \to 0$. Cerchiamo di chiarire meglio questo aspetto. Osserviamo anzitutto che, per ogni $x \neq 0$, si ha

$$\lim_{t\searrow 0} G(x,t) = 0.$$

Come osservato in precedenza, in $x = 0$ si ha invece

$$\lim_{t\searrow 0} G(x,t) = +\infty.$$

Questo suggerisce che, a meno di un insieme di misura nulla (ovvero l'unico punto $x = 0$), il dato iniziale della soluzione fondamentale sia identicamente zero. Tale affermazione è in un certo senso vera. D'altra parte, però, abbiamo

$$\lim_{t\searrow 0}\int_{\mathbb{R}^n} G(x,t)dx = \text{costante} > 0,$$

dato che la massa totale di $G(\cdot,t)$ è la stessa per ogni $t > 0$. Intuitivamente, questo ci dice che la massa di G tende a concerntrarsi tutta nell'origine quando t tende a zero. Il dato iniziale, dunque, dovrebbe essere uguale a zero quasi ovunque ed avere una massa totale non nulla. Questo è incompatibile con il concetto classico di funzione, visto che una funzione nulla quasi ovunque deve avere necessariamente integrale nullo (esercizio).

In questo caso, il concetto di funzione lascia spazio a quello più generale di *distribuzione*. Non è interesse di questo corso definire rigorosamente il concetto di distribuzione. Qui ci limitiamo a dire che il dato iniziale della soluzione fondamentale è una distribuzione detta *delta di Dirac*, indicata con δ, che soddisfa

$$\delta(0) = \infty, \quad \delta(x) = 0, \text{ per ogni } x \neq 0 \quad \int \delta(x)dx = 1.$$

3.1.6 Il problema di Cauchy

Passiamo ora alla soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t = D\Delta u & D > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

ove $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è il dato iniziale. Applichiamo la trasformata di Fourier rispetto alla variabile x all'equazione del calore ed otteniamo

$$\hat{u}_t = -D|\xi|^2\hat{u},$$

dove

$$\mathcal{F}u(\xi,t) = \hat{u}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi\xi\cdot x}u(x,t)dx$$

è la trasformata di Fourier di $u(\cdot,t)$ e dove abbiamo usato la proprietà $\widehat{\partial_{x_k}u} = -i\xi_k\hat{u}$. Detta $\hat{f}$ la trasformata di f, possiamo risolvere l'equazione (ordinaria) per $\hat{u}$ come segue

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)e^{-D|\xi|^2t}.$$

Da un'altra nota proprietà della trasformata di Fourier, abbiamo

$$\mathcal{F}^{-1}e^{-D|\xi|^2t} = \frac{1}{(2D\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}$$

e

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\hat{g}) = f * g.$$

Le due formule precedenti ci danno

$$u(x,t) = \frac{1}{(2D\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|\cdot|^2}{4Dt}} * f.$$

Dunque la soluzione del problema di Cauchy è data dalla convoluzione della soluzione fondamentale G (moltiplicata per una costante tale da avere massa unitaria) con il dato iniziale f.

Concludiamo questa sezione con un'osservazione importante. La formula precedente si può scrivere come

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)f(y)dy.$$

Supponiamo ora che il dato iniziale f sia non negativo ed a supporto[6] compatto. Scegliamo un qualsiasi punto $x \in \mathbb{R}^n$ ed un qualsiasi istante $t > 0$ ed osserviamo che $u(x,t)$ è *strettamente* positivo, in quanto dato dall'integrale della funzione $y \to G(x-y,t)f(y)$ non negativa e diversa da zero su un insieme di misura non nulla (il supporto di f, per l'esattezza). In consequenza di ciò, il supporto della funzione $u(\cdot,t)$ ad un tempo $t > 0$ è dato da tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$. Da compatto (e quindi limitato) che era per $t = 0$, esso è diventato un insieme *illimitato* per $t > 0$. Quando ciò accade si dice che si ha una *velocità infinita di propagazione*.

3.2 Diffusione non lineare

In questa sezione riconsideriamo il modello di propagazione del calore trattato nella sezione 3.1.1. Richiamiamo l'equazione ivi ottenuta (3.4), ovvero

$$\theta_t = \mu\Delta\theta + f,$$

con $\mu = \kappa/c_v\rho$ e $f = r/c_v$. Ricordiamo che $\kappa > 0$ rappresenta la conduttività termica del mezzo. L'equazione precedente è stata ottenuta supponendo che κ sia costante. Tale ipotesi è sensata qualora le variazioni di temperatura siano relativamente contenute. Tuttavia, quando le variazioni di temperatura sono molto alte (dell'ordine, ad esempio, di 10^5 gradi) la conduttività non è più indipendente dalla temperatura. Conviene dunque introdurre una funzione $\theta \to \phi(\theta)$ tale che

$$\kappa = \phi(\theta).$$

Nel caso omogeneo (ovvero con $r = 0$) otteniamo dunque la seguente equazione per θ

$$\theta_t = \operatorname{div}\left(\frac{1}{c_v\rho}\phi(\theta)\nabla\theta\right).$$

Ponendo

$$\Phi(\theta) := \frac{1}{c_v\rho}\int_0^\theta \phi(s)ds,$$

otteniamo la seguente equazione

$$\theta_t = \Delta\Phi(\theta) \tag{3.8}$$

detta *equazione di diffusione nonlineare*. Nelle applicazioni spesso si osserva che κ è crescente rispetto alla temperatura. Tale ipotesi si semplifica richiedendo che

$$\kappa = \phi(\theta) = C\theta^n,$$

con $n > 1$ e $C > 0$ costante. Vedremo nel capitolo ?? come tale modello si applichi anche ad un gas di fotoni ad altissime temperature. In questo caso avremo $n = 5$. Nel caso in

[6] Il supporto di una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è la chiusura dell'insieme $A = \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$, ovvero il più piccolo insieme chiuso che contiene A, ovvero $A \cup \partial A$.

cui Φ sia una potenza di θ, l'equazione (3.8) diventa

$$\theta_t = \frac{C}{mc_v\rho}\Delta\theta^m, \qquad m = n+1.$$

Adimensionalizzando le variabili come nel paragrafo 3.1.3, possiamo semplificare l'equazione precedente eliminando le costanti. In virtù di ciò, concentriamo la nostra attenzione sulla seguente equazione

$$u_t = \Delta u^m, \qquad m > 2, \tag{3.9}$$

detta anche *equazione dei mezzi porosi*. La motivazione di tale nome è dovuta al fatto che la (3.9) è maggiormente nota in letteratura come derivante da un modello di filtrazione in mezzi porosi. Limitando il nostro studio al solo problema di Cauchy su tutto lo spazio, costruiremo ora un analogo della soluzione fondamentale dell'equazione del calore. Per farlo, cerchiamo prima la giusta trasformazione che lascia invariate le soluzioni del problema di Cauchy. Data una soluzione $u(x,t)$, ne cerchiamo un'altra data da

$$v(x,t) = au(bx,ct).$$

Posto $y = bx$ e $s = ct$, abbiamo

$$v_t = acu_s \quad \Delta_x v^m = a^m b^2 \Delta_y u.$$

Dunque v soddisfa la stessa equazione se e solo se

$$c = a^{m-1}b^2.$$

Imponiamo, come nel caso dell'equazione del calore (sezione 3.1.5), che la massa totale sia conservata. Questo implica la condizione

$$a = b^n.$$

Dunque abbiamo

$$v(x,t) = b^n u(bx, b^{n(m-1)+2}t).$$

Ragionamenti analoghi a quelli nella sezione 3.1.5 ci inducono a cercare soluzioni della forma

$$u(x,t) = t^{-n\lambda}U(\xi), \quad \xi = xt^{-\lambda}, \quad \lambda = \frac{1}{n(m-1)+2}.$$

Usando la formula di derivazione di una funzione composta abbiamo

$$\begin{aligned} u_t &= -\lambda t^{-n\lambda-1}\left[nU + \xi\cdot\nabla U\right] = -\lambda t^{-n\lambda-1}\mathrm{div}(\xi U) \\ \Delta_x u^m &= t^{-mn\lambda-2\lambda}\Delta_\xi U^m. \end{aligned}$$

Dalla definizione di λ segue che i due termini $t^{-n\lambda-1}$ e $t^{-mn\lambda-2\lambda}$ sono uguali. Dunque, u soddisfa l'equazione dei mezzi porosi se e solo se U soddisfa la seguente equazione

$$0 = \Delta U^m + \lambda\mathrm{div}(\xi U) = \mathrm{div}\left(\nabla U^m + \lambda\xi U\right).$$

Come nella sezione 3.1.5, richiediamo per il momento che $U \neq 0$. Questo ci permette di adottare un trucco analogo al caso dell'equazione del calore, ovvero

$$0 = \operatorname{div}\left[U\left(\frac{\nabla U^m}{U} + \lambda\xi\right)\right] = \left[U\left(mU^{m-2}\nabla U + \lambda\xi\right)\right] = \left[U\nabla\left(\frac{m}{m-1}U^{m-1} + \lambda\frac{|\xi|^2}{2}\right)\right].$$

Dal fatto che U sia integrabile su tutto $\mathbb{R}^n$ segue che l'equazione precedente ha come uniche soluzioni quelle che soddisfano

$$\frac{m}{m-1}U^{m-1} + \lambda\frac{|\xi|^2}{2} = \text{costante}.$$

Questo porta alla seguente formula per U

$$U(\xi) = \left[C - \frac{\lambda(m-1)}{2m}|\xi|^2\right]_+^{\frac{1}{m-1}},$$

ove il pedice $_+$ indica la parte positiva[7] e dove la costante $C < 0$ dipende dalla massa totale. Nelle coordinate originarie otteniamo la soluzione

$$u(x,t) = t^{-n\lambda}\left[C - \frac{\lambda(m-1)}{2m}\frac{|x|^2}{t^{2\lambda}}\right]_+^{\frac{1}{m-1}}.$$

La necessità di prendere la parte positiva nella formula precedente è dovuta al fatto che il termine tra parentesi quadre non è positivo ovunque su $\mathbb{R}^n$, ma solo nella sfera $B\left(0, \frac{mC}{\lambda(m-1)}t^\lambda\right)$. Al di fuori di tale sfera fissiamo U uguale a zero, il che è compatibile con l'equazione (3.9), dato che la funzione identicamente nulla è ovviamente soluzione. Tale soluzione è detta *soluzione di Barenblatt* (o soluzione auto–similare, o soluzione di tipo sorgente). Il supporto di $U(\cdot,t)$ è dunque compatto per ogni $t > 0$. L'insieme $\partial B\left(0, \frac{mC}{\lambda(m-1)}t^\lambda\right)$, ovvero la frontiera del supporto di $U(\cdot,t)$, è detto *frontiera libera*. Esso si espande al crescere di t con velocità t^λ. Osserviamo che la velocità di espansione del supporto diminuisce con l'aumentare dell'esponente m. Da quanto appena detto si evince che la velocità di propagazione del supporto è in questo caso *finita*. L'introduzione della non linearità nell'equazione di diffusione ha dunque prodotto come conseguenza l'esistenza di una soluzione con supporto compatto ad ogni istante $t > 0$, cosa che non avviene nel caso di diffusione lineare. La soluzione di Barenblatt è l'equivalente non lineare della soluzione fondamentale del caso lineare (anche per quanto riguarda il dato iniziale, che è dato dalla delta di Dirac). Tuttavia, la non linearità non permette in questo caso di scrivere una formula di convoluzione come nel caso lineare. Si può comunque dimostrare (non lo faremo) che la velocità finita di propagazione caratterizza *ogni* soluzione della (3.9) con dato iniziale a supporto compatto. Come conseguenza delle osservazioni appena esposte, la diffusione linea- re è anche detta *diffusione veloce*, mentre la diffusione nonlineare presente nell'equazione dei mezzi porosi è anche detta *diffusione lenta*.

[7] $x_+ = \max\{x, 0\}$

Capitolo 4

Modelli di trasporto e di convezione–diffusione

In questo capitolo tratteremo i modelli classici di trasporto lineare e non lineare. L'applicazione più diretta delle equazioni che ricaveremo riguarda modelli di traffico stradale. Alcuni modelli (come l'equazione di Burgers) costituiscono la base per una descrizione semplificata della dinamica di un gas perfetto, che tratteremo più dettagliatamente nel seguito del corso.

4.1 Un modello di traffico

Iniziamo con un esempio tratto dalla vita reale: il traffico dei veicoli su un'autostrada. Possiamo pensare alla posizione di un determinato punto dell'autostrada come ad una coordinata unidimensionale reale (supponiamo fissato un determinato punto dell'autostrada come l'origine) e chiamiamo tale coordinata $x \in \mathbb{R}$. Pensiamo al percorso compreso tra due caselli $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e supponiamo ovviamente che i veicoli possono solo entrare in a e possono solo uscire in b. Nei punti dell'intervallo aperto (a, b) i veicoli non possono entrare nè uscire. Inoltre (conformemente a quanto accade nella carreggiata di un'autostrada), essi viaggiano tutti nella stessa direzione, che supponiamo essere la direzione positiva del nostro asse di riferimento. Vogliamo ora descrivere la quantità di veicoli nel tratto $[a, b]$. Ovviamente, la prima informazione che ci interessa sapere è il numero totale di veicoli in $[a, b]$ ad un determinato istante t. Chiamiamo tale numero $M(t) \geq 0$. Escludendo gli effetti causati dall'ingresso o dall'uscita dei veicoli in a e in b rispettivamente, ci aspettiamo che $M(t)$ sia costante nel tempo, dato che il numero totale di veicoli si conserva. Vedremo in seguito come tale proprietà risulterà conseguenza del modello che avremo ricavato. Oltre al numero totale di veicoli, ci interessa avere anche un'informazione localizzata del traffico, ovvero, vogliamo sapere quanti veicoli ci sono in un determinato punto $x \in [a, b]$ ad un determinato istante t. Chiamiamo tale numero $g(x, t) \geq 0$. Le due quantità $M(t)$ e $g(x, t)$ sono ovviamente in relazione tra loro. Intuitivamente, $M(t)$ deve essere ottenuto 'sommando' tutti valori di $g(x, t)$ al variare di x. Dato che x varia 'nel continuo' (ovvero

è descritto da una variabile reale), la relazione tra M e g sarà di tipo integrale, ovvero

$$M(t) = \int_a^b g(x,t)dx. \tag{4.1}$$

La quantità g è dunque la *densità* di veicoli al tempo t nel punto x. Essa esprime la quantità di veicoli nell'unità di lunghezza. Supporremo che la densità g sia continua rispetto a x, per cui possiamo intendere l'integrale (4.1) nel senso di Riemann. Tale ipotesi di continuità, ovviamente, non è realistica, dato che il numero di veicoli in un dato punto può assumere solo valori interi. Tale inconveniente, tuttavia, non crea grossi problemi di interpretazione.

Passiamo ora a descrivere l'evoluzione della densità g. Per semplificare momentaneamente la trattazione, immaginiamo che il casello a venga chiuso all'istante $t = 0$. In tale modo, l'evoluzione è determinata da due fattori:

- la distribuzione iniziale di veicoli $g(x, 0)$,
- la velocità dei veicoli.

Dato che il nostro modello non 'segue' il percorso dei singoli veicoli uno per uno, ma descrive la loro quantità in un determinato punto dell'autostrada, la velocità dei veicoli non dipenderà dalla volontà del singolo guidatore, ma da altri fattori quali ad esempio la posizione del veicolo o la densità di veicoli in quella stessa posizione (vedi anche la differenza tra descrizione euleriana e lagrangiana nel capitolo dedicato alla gas–dinamica). A tale proposito, è conveniente introdurre il concetto di *flusso* di veicoli nell'unità di tempo, nel punto x e all'istante t, che chiameremo $f(x,t)$. Tale quantità descrive il numero di veicoli nell'unità di tempo che transitano in x al tempo t (ovvero che attraversano il punto x nell'unica direzione possibile). Intuitivamente, il numero di macchine passanti nell'intervallo infinitesimo dx nell'intervallo infinitesimo di tempo dt è dato da $g(x,t)dx$. Dunque, la quantità $f(x,t)$ è data da $f(x,t) = \frac{g(x,t)dx}{dt}$. Dato che il rapporto tra infinitesimi $\frac{dx}{dt}$ non è altro che la velocità istantanea, possiamo stabilire la seguente relazione costitutiva per il flusso f

$$f(x,t) = V(x,t)g(x,t), \tag{4.2}$$

ove $V(x,t)$ è la velocità di un veicolo presente in x al tempo t. Consideriamo ora un qualunque sottointervallo $[c,d] \subset [a,b]$, e fissiamo un tempo $t > 0$ ed un numero $\epsilon > 0$. Ci chiediamo di quanto varia la quantità di veicoli nel tratto $[c,d]$ nell'intervallo di tempo $[t, t+\epsilon]$. Tale variazione è evidentemente espressa dalla quantità

$$Q(\epsilon) = \int_c^d g(t+\epsilon, x)dx - \int_c^d g(t,x)dx = \int_c^d \left[g(t+\epsilon,x)dx - g(t,x)\right] dx. \tag{4.3}$$

Il limite

$$l = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{Q(\epsilon)}{\epsilon} \tag{4.4}$$

ci fornisce la variazione istantanea del numero di veicoli nell'unità di tempo nel tratto $[c,d]$ all'istante t. Dalla definizione di flusso data in precedenza segue anche che l equivale

alla differenza tra il flusso di veicoli passanti per c (veicoli in più) ed il flusso di veicoli passanti per d (veicoli in meno), entrambi al tempo t. Quanto appena detto è riassunto nella relazione

$$l = f(c,t) - f(d,t),$$

che, insieme a (4.3) e (4.4), implica

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_c^d [g(t+\epsilon, x)dx - g(t,x)]\, dx = f(c,t) - f(d,t).$$

Passando il limite sotto il segno di integrale (vedi il teorema 1.5.3) otteniamo

$$\int_c^d \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)dx = f(c,t) - f(d,t). \tag{4.5}$$

Usando note proprietà degli integrali (tra cui il teorema fondamentale del calcolo) otteniamo la formula

$$\int_c^d \left[\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right] dx = 0. \tag{4.6}$$

Dato che (4.6) è vera per ogni sottointervallo $[c,d] \subset [a,b]$, l'integranda deve essere identicamente nulla (vedi teorema 1.4.1). Abbiamo così ottenuto l'*equazione di continuità*

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 0, \tag{4.7}$$

che, in virtù della (4.2), diventa

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(V(x,t)g(x,t)\right) = 0. \tag{4.8}$$

L'equazione di continuità (4.7) ottenuta in precedenza è un oggetto ben noto in fisica matematica. Essa modella l'evoluzione di quelle quantità che possono essere descritte localmente da una densità secondo una relazione analoga alla (4.1), e tali che la quantità totale all'interno di un determinato dominio (un volume o un intervallo) varia solo in virtù del flusso attraverso il bordo del dominio stesso, ovvero non vi è un guadagno (o una perdita) di quantità dovuto a fattori esterni. Qualora volessimo tenere in considerazione fattori addizionali, quali ad esempio l'ingresso di veicoli dal casello a secondo una legge prescritta che dipenda dal tempo, si può aggiungere un termine *forzante* nell'equazione di continuità (4.7), ottenendo la sua versione non omogenea

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = F(x,t).$$

L'equazione (4.8) si accoppia in genere con la condizione iniziale

$$g(x,0) = g_0(x). \tag{4.9}$$

Inoltre, dato che non siamo interessati agli effetti di bordo (ovveri al flusso di veicoli ai caselli), possiamo immaginare che il moto avvenga su una retta infinita anziché su un intervallo. Nelle prossime sezioni analizzeremo il comportamento della soluzione del problema di Cauchy (4.8)–(4.9) a seconda della forma che assume la legge costitutiva per la velocità V. Nel caso in cui V dipende solo da x e t diremo che g è descritta da una equazione di trasporto lineare. Qualora V dipenda anche da g stessa, il trasporto è non lineare.

4.2 Equazione del trasporto lineare

L'equazione (4.8) si può riformulare come

$$\frac{\partial g}{\partial t} + V(x,t)\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}(x,t)g$$

sotto l'ipotesi che la soluzione g sia di classe C^1 rispetto ad x. Ammettendo anche la presenza di termini forzanti (sempre nell'ipotesi che il trasporto sia lineare), studieremo nel dettaglio il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} + V(x,t)\dfrac{\partial g}{\partial x} = d(x,t)g + F(x,t) \\ g(x,0) = g_0(x). \end{cases} \tag{4.10}$$

Iniziamo dal caso più semplice, ovvero quello in cui $V \equiv c$, c costante, e $d = F = 0$. In questo caso, l'equazione

$$\frac{\partial g}{\partial t} + c\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \tag{4.11}$$

ci dice che la soluzione g è costante lungo le rette del piano (x,t) di equazione $(x(s),t(s)) = (x_0 + cs, s)$, con $x_0 \in \mathbb{R}$. Per verificare tale affermazione calcoliamo

$$\frac{d}{ds}g(x(s),t(s)) = c\frac{\partial g}{\partial x}(x(s),t(s)) + \frac{\partial g}{\partial t}(x(s),t(s)) = 0.$$

In particolare, poiché deve essere soddisfatta la condizione iniziale, deve valere

$$g(x,t) = g(x-ct,0) = g_0(x-ct).$$

D'altra parte, si verifica direttamente che la funzione $g_0(x-ct)$ risolve il problema in esame. Dunque essa è l'unica soluzione.

Il metodo appena utilizzato è un caso particolare del cosiddetto *metodo delle caratteristiche* descritto nella sezione 1.8.1. Tale metodo ci permette di calcolare esplicitamente la soluzione anche nel caso generale (4.10) con $F = 0$. Le curve caratteristiche $(x(s), t(s), g(s))$ sono in questo caso definite dal sistema di equazioni ordinarie

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= V(x,t) & x(0) &= x_0 \\ \dot{\overline{g}}(t) &= d(x,t)\overline{g} & \overline{g}(0) &= g_0(x_0). \end{aligned}$$

La soluzione $g(x,t)$ si ottiene nel modo seguente: si considerano la soluzioni (locali) del sistema di caratteristiche $x = x(x_0,t)$, $\overline{g} = \overline{g}(x_0,t)$. Si determina poi la corrispondenza $x_0 = x_0(x,t)$ invertendo le relazioni precedenti, cosa che è possibile in generale solo in un sottinsieme del piano $\mathbb{R}^2$ contenente l'asse $t = 0$. A questo punto la soluzione si ottiene come

$$g(x,t) = \overline{g}(x_0(x,t),t). \tag{4.12}$$

Un'ulteriore osservazione riguarda la regione su cui avviene il moto. Assumendo che il dato iniziale g_0 abbia supporto compatto, il metodo delle caratteristiche ci dice indubitabilmente che il supporto della soluzione $g(\cdot,t)$ rimarrà compatto ad un qualunque istante $t > 0$. Quando ciò accade in generale si dice che vi è una *velocità di propagazione* finita del supporto, un fenomeno che non accade, ad esempio, nei modelli di diffusione lineare, come abbiamo visto nel capitolo precedente. Dato che il supporto di $g(\cdot,t)$ è sempre compatto, possiamo ricavare la conservazione del numero totale di veicoli nell'equazione di continuità (4.8) calcolando

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} g(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)dx = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g(x,t)V(x,t)}{\partial x}dx = 0$$

ove l'ultimo passaggio è giustificato dal teorema fondamentale del calcolo integrale. La proprietà appena dimostrata viene spesso chiamata *conservazione della massa totale*, ed è soddisfatta tutte le volte che l'evoluzione del modello è descritta da un'equazione di continuità.

Nel caso in cui il termine forzante F in (4.10) non sia identicamente nullo (caso non omogeneo) si ricorre al seguente *metodo di Duhamel*. Per semplicità consideriamo il caso lineare

$$\frac{\partial g}{\partial t} + c\frac{\partial g}{\partial x} = F(x,t). \tag{4.13}$$

Fissato un punto $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty)$, consideriamo la caratteristica passante per tale punto, ovvero la retta $s \mapsto (x+sc, t+s)$. La soluzione g calcolata lungo tale retta è data dalla funzione $z(s) = g(x+sc, t+s)$, $s \in \mathbb{R}$. Calcoliamo

$$\dot{z}(s) = g_x c + g_t = f(x+sc, t+s).$$

Integrando tale relazione in ds tra $-t$ e 0 si ha

$$\begin{aligned} g(x,t) - g(x-ct,0) = z(0) - z(-t) = \int_{-t}^{0} \dot{z}(s)ds \\ = \int_{-t}^{0} f(x+sc, t+s)ds = \int_0^t f(x+(\sigma-t)c, \sigma)d\sigma, \end{aligned}$$

dove abbiamo effettuato il cambio di variabile $s = \sigma - t$ all'interno dell'integrale. Dunque, in definitiva la soluzione è data da

$$g(x,t) = g_0(x-ct) + \int_0^t f(x+(s-t)c, s)ds. \tag{4.14}$$

4.3 Due modelli di trasporto non lineare

Nella sezione precedente, un modello di traffico in cui la velocità dei veicoli era supposta indipendente dalla loro densità è servito come pretesto per introdurre un modello estremamente semplificato di trasporto. In questa sezione ricaviamo una legge costitutiva per la velocità basata su valutazioni decisamente più realistiche. Supponendo per semplicità che la velocità non dipenda dall'ascissa x né dal tempo t, è ragionevole aspettarsi che la velocità del veicolo sia massima laddove non ci sono altri veicoli, mentre ci aspettiamo che gli stessi veicoli riducano sempre di più la velocità qualora la densità dei veicoli circostanti sia sempre maggiore. Detta v_{max} la velocità massima possibile (velocità in assenza di veicoli) e detta g_{max} la densità massima dei veicoli (ovvero la densità dei veicoli in coda), poniamo

$$V(g) = v_{max}\left(1 - \frac{g}{g_{max}}\right).$$

In questo modo, $V(g_{max}) = 0$ e $V(g) \leq v_{max}$ per ogni $g \in [0, g_{max}]$. In alcuni casi l'osservazione dei dati relativi a flussi di traffico reali ha suggerito l'utilizzo di altre formule per la velocità, quali ad esempio $V(g) = a \log \frac{g}{g_{max}}$. In generale, posto $f(g) = gV(g)$, si considerano funzioni $f(g)$ soddisfacenti alle seguenti proprietà

- $f(0) = f(g_{max}) = 0$,
- f nonnegativa e concava sull'intervallo $[0, g_{max}]$,
- f avente un unico valore massimo $f_m = f(g_m)$.

In particolare, esiste una densità intermedia g_m per cui di realizza il flusso massimo di veicoli (ricordiamo che il flusso è dato dal prodotto di g per V). Qualora valgano le ipotesi sul flusso $f(g)$ sopra elencate, la corrispondente equazione di trasporto per il flusso di traffico

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial f(g)}{\partial x} = 0 \tag{4.15}$$

è detta equazione di Whitham–Lighthill.

Nella prossima sezione analizzeremo da un punto di vista puramente matematico le proprietà di una equazione di trasporto nonlineare generale del tipo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial x} = 0 \tag{4.16}$$

con f una generica funzione nonlineare di classe C^1. La (4.16) è detta *legge di conservazione nonlineare scalare*. Prima di ciò, descriviamo un altro modello in cui una tale equazione ammette una applicazione significativa. Si tratta di un modello (semplificato) che descrive un processo di scambio chimico che ha applicazioni in cromatografia. Si considera un fluido che trasporta una certa sostanza dissolta (o delle particelle o degli ioni) attraverso un fondo costituito da un materiale solido. La sostanza trasportata dal fluido è parzialmente assorbita dal materiale, il quale a sua volta può restituirne una parte al

fluido. Supponiamo che la dinamica si svolga essenzialmente in una direzione. Introduciamo quindi di nuovo una variabile spaziale x ed un tempo t. La sostanza avrà una massa totale M ed una corrispondente densità $\rho(x,t)$ tale che $M = \int \rho(x,t)dx$, come nel modello di traffico precedente. In ogni punto x avremo una certa quantità di sostanza dissolta nel fluido, la cui densità indicheremo con ρ_f, ed una certa quantità di sostanza depositata sul solido, la cui densità verrà indicata con $\rho_s = \rho - \rho_f$. Supponendo che la velocità delle particelle dissolte nella sostanza sia costante e pari a V, usando un procedimento analogo a quello della sezione 4.1 (introducendo nel bilancio (4.5) anche la perdita di sostanza accumulatasi sul materiale), otteniamo la seguente equazione di continuità non omogenea

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_f + \frac{\partial}{\partial x}(V\rho_f) = -\frac{\partial}{\partial t}\rho_s. \tag{4.17}$$

Una seconda relazione riguarda il tasso di deposito della sostanza sul fondo solido. Dato che le particelle sul fondo sono ferme, nello scrivere il bilancio dobbiamo tenere in considerazione solo i termini non omogenei dovuti allo scambio solido–fluido. È ragionevole supporre che il tasso di deposito di sostanza sul fondo materiale sia direttamente proporzionale a ρ_f, limitato d'altra parte dalla eventuale quantità di sostanza già presente sul solido stesso, fino ad una capacità di soglia A. Un processo analogo avviene per la sostanza passante dal materiale al fluido, secondo una capacità massima B. Detti k_1 e k_2 i *tassi di reazione* (tutte le costanti in gioco sono naturalmente positive), otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_s = k_1(A - \rho_s)\rho_f - k_2\rho_s(B - \rho_f). \tag{4.18}$$

In condizioni di equilibrio, ovvero in assenza di scambio, il secondo membro della (4.18) sarebbe nullo, e questo implicherebbe una relazione algebrica tra ρ_f e ρ_s, cioè

$$\rho_s = A\frac{k_1\rho_f}{k_2B + (k_1 - k_2)\rho_f} =: R(\rho_f). \tag{4.19}$$

In un regime *quasi statico*, cioè nel caso in cui lo scambio di sostanza sia relativamente lento, possiamo accettare in buona approssimazione la relazione (4.19), che sostituita nella (4.17) implica la seguente equazione per ρ_f

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_f + \frac{V}{1 + R'(\rho_f)}\frac{\partial}{\partial x}\rho_f = 0. \tag{4.20}$$

Si può verificare che $R'(\rho_f) > 0$. Dunque l'equazione appena ricavata rientra nel modello generale (4.16) con $f(\rho) = \int_0^\rho \frac{V}{1+R'(\xi)}d\xi$. Osserviamo che, contrariamente al caso del modello di traffico di Whitham–Lighthill, qui f è una funzione monotona.

4.4 L'equazione di Burgers

Per semplificare la trattazione, studieremo il problema di Cauchy per l'*equazione di Burgers*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial f}\left(\dfrac{\rho^2}{2}\right) = 0, \\ \rho(x,0) = \rho_0(x), \end{cases} \tag{4.21}$$

come alternativa alla legge di conservazione (4.16). La motivazione di tale scelta è che le proprietà matematiche racchiuse dalla (4.16) sono ben rappresentate dal caso particolare $f(\rho) = \rho^2/2$. L'equazione (4.21) può essere riscritta nella *forma non conservativa*

$$\rho_t + \rho\rho_x = 0. \tag{4.22}$$

Scrivendo l'equazione in questo modo appare chiaro come essa rappresenti un trasporto nonlineare. Appare comunque conveniente, data l'analogia con le equazioni di trasporto lineari, tentare di risolvere la (4.22) usando il metodo delle caratteristiche. Come nel caso delle equazioni di trasporto lineari, anche qui supponiamo a priori di avere una soluzione $\rho(x,t)$, e tentiamone una rappresentazione. Fissato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, la caratteristica $t \mapsto x(x_0,t)$ risolve l'equazione ordinaria

$$\dot{x}(t) = \rho(x(x_0,t),t)$$

con condizione iniziale $x(x_0,0) = x_0$. D'altra parte, la soluzione ρ è costante lungo una caratteristica. Infatti

$$\frac{d}{dt}\rho(x(x_0,t),t) = (\rho_x\dot{x} + \rho_t)\,|_{x=x(x_0,t)} = (\rho_x\rho + \rho_t)\,|_{x=x(x_0,t)} = 0.$$

Dunque,

$$\rho(x(x_0,t),t) = \rho(x(x_0,0),0) = \rho(x_0,0) = \rho_0(x_0),$$

e l'equazione differenziale per la caratteristica si può riscrivere come $\dot{x}(t) = \rho_0(x_0)$, che dà come soluzione

$$x(x_0,t) = \rho_0(x_0)t + x_0, \tag{4.23}$$

ovvero, le caratteristiche sono delle linee rette. Fino a questo punto sembra che la nonlinearità non abbia apportato difficoltà significative alla soluzione del problema. Se da un lato infatti la soluzione dell'equazione caratteristica può essere risolta solo conoscendo a priori la soluzione, d'altra parte siamo stati capaci ugualmente di ottenere una espressione esplicita (e semplice, visto che si tratta di rette) delle caratteristiche stesse, ed anche in questo caso (come nel caso lineare) sappiamo che la soluzione è costante lungo le caratteristiche. Nel caso lineare poi, il problema era quello di esplicitare l'equazione della caratteristica rispetto ad x_0, ovvero passare dalla funzione $x = x(x_0,t)$ alla funzione $x_0 = x_0(x,t)$. Qui ci imbattiamo in un fenomeno che non avveniva nel caso non lineare: due rette caratteristiche aventi come dati inziali due punti diversi dell'asse $t = 0$ possono intersecarsi in un tempo finito. Quando ciò accade, non è più possibile stabilire una relazione $x_0 = x_0(x,t)$ senza incorrere in ambiguità. Per capire meglio la situazione, tentiamo di visulizzare il problema da un punto di vista geometrico. Consideriamo due rette caratteristiche uscenti dall'asse iniziale nei punti x_0 ed x_1, con $x_0 < x_1$. Supponiamo inoltre che $\rho_0(x_0) > \rho_0(x_1)$. Da quest'ultima condizione e dall'equazione (4.23) si evince che la caratteristica uscente da x_0 ha una pendenza tale da intersecare la caratteristica uscente da x_1 in un certo punto (x^*,t^*). Dato che la soluzione è costante lungo le caratteristiche, i due valori $\rho_0(x_0)$ e $\rho_0(x_1)$ vengono *trasportati* lungo le rispettive rette catatteristiche, fino al punto di intersezione (x^*,t^*).

Visualizzando l'evoluzione nel tempo del profilo della soluzione $\rho(\cdot, t)$, appare chiaro che al tempo t^* viene a formarsi una discontinuità di salto tra i valori $\rho_0(x_0)$ e $\rho_0(x_1)$ nel punto x^*. Nel linguaggio delle leggi di conservazione, tale fenomeno è noto come *formazione di shock* in un tempo finito.

Tentiamo ora di risolvere rigorosamente il problema partendo da un dato iniziale ρ_0 qualsiasi. Come nel caso lineare, lo scopo è quello di esplicitare la variabile x_0 dalla relazione (4.23). Si tratta di uno di quei problemi in cui conviene ricorrere al teorema della funzione implicita (vedi il teorema 1.3.2). Posto $F(x, x_0, t) = \rho_0(x_0)t + x_0 - x$, cerchiamo una funzione $x_0 = x_0(x, t)$ tale che $F(x, x_0(x, t), t) = 0$. Dal teorema 1.3.2, ciò è possibile se la derivata di F rispetto a x_0 è diversa da zero, ovvero se

$$\rho_0'(x_0)t + 1 \neq 0. \tag{4.24}$$

La condizione (4.24) è ovviamente soddisfatta per $t = 0$. Quando ci stacchiamo dall'asse $t = 0$, il termine $\rho_0'(x_0)t + 1$ potrebbe degenerare (azzerarsi). Certamente ciò non accade se il dato iniziale ρ_0 è monotono crescente. In tal caso infatti $\rho_0'(x_0)t > 0$ e la condizione (4.24) è sempre soddisfatta, e la soluzione $\rho(x, t)$ al problema (4.21) è definita su tutto il semipiano $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$. In caso contrario, supponendo che esista un valore x_0 per cui $\rho'(x_0) < 0$, la condizione (4.24) cessa di essere verificata al tempo $t = -\frac{1}{\rho'(x_0)} > 0$. Volendo determinare un intervallo di tempo in cui la soluzione resta definita indipendemente dal comportamento delle singole caratteristiche, possiamo affermare che $\rho(x, t)$ è definita sulla striscia $\mathbb{R} \times [0, t^*)$, ove

$$t^* = -\frac{1}{\inf \rho'(x_0)}.$$

Il nostro scopo a questo punto è di dare un senso alla soluzione $\rho(x, t)$ *dopo* l'istante t^* in cui essa è divenuta discontinua.

Esercizio 4.4.1 Dimostrare che l'equazione (4.22) gode della seguente *proprietà di semigruppo*. Sia $\rho(\cdot, \cdot)$ è la soluzione di (4.22) con dato iniziale ρ_0. Fissati $t, s > 0$, definiamo $\overline{\rho}(x, t) = \rho(x, s + t)$. Allora $\overline{\rho}(x, t)$ risolve la stessa (4.22) con dato iniziale $\rho(x, s)$.

Grazie alla proprietà precedente, il problema di prolungare una soluzione dopo la formazione di uno shock si riduce al problema di definire (in qualche senso) una soluzione avente un dato iniziale ρ_0 discontinuo. Il primo problema che ci poniamo è se sia possibile ammettere che la discontinuità del dato iniziale in un punto x_0 si propaghi nel tempo. Supponiamo dunque che la soluzione $\rho(x, t)$ sia discontinua sulla curva $x = s(t)$. Ad un tempo fissato t scegliamo due valori x_1 ed x_1 tali che $x_1 < s(t) < x_2$. Supponiamo inoltre che la soluzione sia continua con derivate continue negli intervalli $[x_1, s(t))$ e $(s(t), x_2]$. Data la discontinuità della soluzione, la formulazione (4.21) non è accettabile, poiché essa coinvolge le derivate di ρ che ovviamente non sono definite nei punti di discontinuità. In generale, un modo ragiovevole per generalizzare il concetto di soluzione senza perdere di vista il modello originale è ricavare una relazione integrale analoga alla (4.5). Ricordiamo infatti che abbiamo ricavato le equazioni di continuità del tipo (4.7) da un bilancio tra quantità integrali,

in cui la discontinuità delle grandezze integrate è ammissibile. Nel caso dell'equazione di Burgers, la corrispondente equazione di bilancio integrale (relativa all'intervallo $[x_1, x_2]$ al tempo t) è la seguente

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)dx + \frac{\rho^2}{2}(x_1,t) - \frac{\rho^2}{2}(x_2,t) = 0. \tag{4.25}$$

Da proprietà elementari dell'integrale segue

$$\frac{\rho^2}{2}(x_2,t) - \frac{\rho^2}{2}(x_1,t) = \frac{d}{dt}\int_{x_1}^{s(t)} \rho(x,t)dx + \frac{d}{dt}\int_{s(t)}^{x_2} \rho(x,t)dx.$$

Usando la regola della derivazione di una funzione composta, otteniamo

$$\frac{\rho^2}{2}(x_2,t) - \frac{\rho^2}{2}(x_1,t) = \rho(s^-,t)\dot{s} - \rho(s^+,t)\dot{s} + \int_{x_1}^{s(t)} \rho_t(x,t)dx + \int_{s(t)}^{x_2} \rho_t(x,t)dx, \tag{4.26}$$

dove $\rho(s^-,t)$ e $\rho(s^+,t)$ indicano rispettivamente i limiti sinistro e destro di $\rho(x,t)$ per x che tende ad $s(t)$. Vogliamo ora mandare al limite $x_1 \to s(t)$ da sinistra e $x_2 \to s(t)$ da destra nella relazione (4.26). Dato che ρ_t è limitata negli intervalli di integrazione, i due integrali a secondo membro si annullano al limite. Otteniamo quindi

$$\frac{\rho^2}{2}(s^-,t) - \frac{\rho^2}{2}(s^+,t) = [\rho(s^-,t)\dot{s} - \rho(s^+,t)\dot{s}]\dot{s}(t), \tag{4.27}$$

ovvero, posto $\rho_l = \rho(s^-,t)$ e $\rho_r = \rho(s^+,t)$,

$$\dot{s}(t) = \frac{1}{2}[\rho_l + \rho_r]. \tag{4.28}$$

Abbiamo dunque ottenuto una *condizione di salto* che coinvolge la velocità della curva di propagazione della discontinuità $\dot{s}(t)$ e i limiti destro e sinistro della soluzione lungo tale curva. In particolare, la velocità della curva è data dalla media aritmetica dei due limiti. La condizione (4.27) si può facilmente generalizzare nel caso di una legge di conservazione scalare generale del tipo

$$\rho_t + f(\rho)_x = 0.$$

In tal caso si ottiene la seguente *condizione di Rankine–Hugoniot*

$$[\rho_r - \rho_l]\dot{s}(t) = [f(\rho_r) - f(\rho_l)]. \tag{4.29}$$

Esercizio 4.4.2 *Mediante lo stesso procedinemto usato per l'equazione di Burgers, dimostrare la formula (4.29) partendo dalla relazione di bilancio integrale*

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)dx + f(\rho(x_1,t)) - f(\rho(x_2,t)) = 0.$$

Una funzione $\rho(x,t)$ con derivate parziali continue su

$$L = \mathbb{R} \times [0, +\infty) \setminus \Gamma, \quad \Gamma = \{x = s(t)\},$$

tale che ρ risolve l'equazione (4.21) su L e tale che ρ soddisfa alla condizione di salto (4.28) lungo Γ, è detta una *soluzione debole* dell'equazione (4.21).

La relazione (4.28) è una condizione necessaria per la propagazione di una discontinuità. Al momento non abbiamo ancora gli elementi per capire se una data discontinuità iniziale si propaghi o meno. Semplifichiamo il problema con degli esempi.

Esempio 4.4.3 (Onda di Shock) Consideriamo il dato iniziale

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases} \tag{4.30}$$

Il dato iniziale è evidentemente discontinuo. Scriviamo le equazioni delle rette caratteristiche. Si verifica facilmente che esse sono date dalle rette $x(t) \equiv x_0$ se il punto iniziale x_0 è positivo, mentre si ha $x(t) = x_0 + t$ nel caso il punto iniziale x_0 sia negativo. Dunque vi è un dominio del semipiano $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ in cui le caratteristiche si intersecano, ovvero la fascia $F = \{(x,t) \mid 0 \leq x \leq t\}$. Cerchiamo una soluzione discontinua mediante la condizione di salto (4.28). In questo caso, $\rho_l = 1$ e $\rho_r = 0$. Dunque si ha $\dot{s(t)} = 1/2$, con condizione iniziale $s(0) = 0$. Otteniamo quindi la seguente retta di propagazione dello shock

$$x = s(t) = t/2.$$

La soluzione vale 1 a sinistra di $s(t)$, e vale 0 a destra di $s(t)$. Una soluzione siffatta è detta *onda di shock*.

Esempio 4.4.4 (Onda di rarefazione) Consideriamo il dato iniziale

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases} \tag{4.31}$$

Anche qui il dato iniziale è evidentemente discontinuo in $x = 0$. Scriviamo le equazioni delle rette caratteristiche. Si verifica facilmente che esse sono date dalle rette $x(t) = x_0 + t$ se il punto iniziale x_0 è positivo, mentre si ha $x(t) \equiv x_0$ nel caso il punto iniziale x_0 sia negativo. Si ha dunque un dominio del semipiano $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ che non è raggiunto dalle caratteristiche, segnatamente la fascia $F = \{(x,t) \mid 0 \leq x \leq t\}$. Una possibilità è quella che la discontinuità presente inizialmente nel punto $x = 0$ 'viaggi' secondo la condizione di salto (4.28) lungo una curva $x = s(t)$. Dato che in questo caso $\rho_l = 0$ e $\rho_r = 1$, si avrebbe $\dot{s(t)} = 1/2$ con $s(0) = 0$. Dunque, la curva di discontinuità sarebbe data da $x = s(t) = t/2$, e la soluzione ρ assumerebbe il valore 0 a sinistra di $s(t)$ ed il valore 1 a destra di $s(t)$. Un'altra possibilità è quella di 'riempire' la fascia F mediante l'uso di una

soluzione *autosimilare*, ovvero una soluzione ρ che sia funzione della variabile x/t. Poniamo dunque $\rho(x,t) = R(\xi)$, $\xi = x/t$, e sostituiamo tale posizione nella (4.22). Otteniamo

$$-\frac{x}{t^2}R' + \frac{1}{t}RR' = 0,$$

ovvero

$$R'(R(\xi) - \xi) = 0.$$

Supponendo che R non sia costante, otteniamo $R(\xi) = \xi$, ovvero $\rho(x,t) = x/t$ sul dominio F. Estendendo tale soluzione al resto del semipiano secondo l'evoluzione delle caratteristiche (questa volta non abbiamo problemi di ambiguità), abbiamo ottenuto la seguente soluzione

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x/t & \text{se } 0 \leq x \leq t \\ 1 & \text{se } x \geq t. \end{cases}$$

Osservando l'evoluzione del profilo $\rho(\cdot, t)$, si deduce che la soluzione è continua in ogni istante $t > 0$. I due stati $\rho_l = 0$ e $\rho_r = 1$ sono uniti da un segmento la cui pendenza diminuisce nel tempo. Una soluzione di questo tipo è detta *onda di rarefazione*.

Dal punto di vista matematico, un'onda di rarefazione è una soluzione ammissibile in quanto risolve l'equazione (4.22) in ogni punto del semipiano tranne le rette $x = 0$ e $x = t$, ed in tali rette la funzione è continua, e dunque soddisfa banalmente la condizione (4.29). D'altra parte, anche la soluzione discontinua precedentemente ricavata è una soluzione matematicamente ammissibile. Dunque, si pone un problema di *unicità* della soluzione debole per l'equazione di Burgers. Tale problema non riguarda solo l'esempio trattato, ma si porrebbe anche trattando esempi più generali. Esso può essere posto in termini di *ammissibilità dell'onda di shock*. Il criterio per cui una onda di shock è ammissibile o meno ha una giustificazione di tipo fisico, che chiariremo nella sezione 4.8. Per completezza, provvediamo comunque ad enunciarlo in questa sezione.

Definizione 4.4.5 *Uno shock tra due stati ρ_l e ρ_r per l'equazione (4.21) è ammissibile se $\rho_l > \rho_r$.*

Concludiamo questa sezione con un ultimo esempio, in cui mettiamo in pratica la scelta dell'ammissibilità degli shock secondo la precedente definizione.

Esempio 4.4.6 (N–wave) Consideriamo il dato iniziale

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x \geq 1. \end{cases} \tag{4.32}$$

Abbiamo, in questo caso, due punti di discontinuità, in $x = 0$ ed in $x = 1$. Seguendo il criterio precedente, abbiamo uno shock solo nel punto $x = 1$. Esso si propaga lungo la

curva $x = 1 + t/2$. In $x = 0$ la discontinuità scompare, e si origina una onda di rarefazione $\rho(x,t) = x/t$ nel dominio $F = \{0 \le x \le t\}$. Osserviamo però che all'istante $t = 2$ la retta di propagazione dello shock irrompe nella fascia di rarefazione F nel punto $(2,2)$. Quando ciò accade, vi è di nuovo una discontinuità tra gli stati $\rho_l = x/t$ e $\rho_r = 0$. Dunque si ha ancora uno shock, poiché $\rho_l > \rho_r$. La condizione di salto è data in questo caso da

$$\dot{x}(t) = \frac{x}{2t}, \tag{4.33}$$

con $x(2) = 2$. Integrando l'equazione ordinaria (4.33) mediante separazione delle variabili otteniamo

$$\int_2^{x(t)} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int_2^t \frac{ds}{s},$$

ovvero

$$x(t) = \sqrt{2t}.$$

La discontinuità tra i due stati x/t e 0 viaggia dunque lungo una parabola con asse parallelo all'asse $t = 0$. In particolare, il valore ρ_l è pari a $\sqrt{2/t}$. Tale valore è evidentemente il massimo valore assunto dal profilo $\rho(\cdot,t)$, che dunque assume la forma di un segmento di pendenza sempre minore, fissato a sinistra sul punto $x = 0$, con l'estremo detro che assume un valore che diminuisce nel tempo. In particolare, si ha che

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |\rho(x,t)| \right) = 0,$$

ovvero la soluzione *decade uniformemente* a zero per tempi lunghi.

Il decadimento per tempi lunghi della solutione dell'esempio precedente svela una differenza sostanziale tra il trasporto lineare ed il trasporto non lineare. Nel modello lineare (4.11), la soluzione assume tutti e soli i valori assunti dal dato iniziale. Dunque l'estremo superiore del profilo $g(\cdot,t)$ rimane invariato nel tempo, contrariamente al caso dell'equazione di Burgers, dove abbiamo visto che è possibile che l'estremo superiore della soluzione decada a zero nel tempo. Ciò si esprime spesso dicendo che il trasporto nonlineare genera una *dissipazione di energia*, ad intendere che il funzionale quadratico

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x,t)^2 dx$$

decade nel tempo. La dimostrazione di tale affermazione è lasciata per esercizio.

Esercizio 4.4.7 Dimostrare che, nel caso dell'esempio 4.4.6 si ha

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \rho(x,t)^2 dx \to 0.$$

Suggerimenti: dimostrare prima la disuguaglianza

$$\int \rho^2(x,t)dx \le \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |\rho(x,t)| \right) \int \rho(x,t)dx,$$

usando il fatto che la soluzione è nonnegativa. Infine calcolare la massa totale del dato iniziale ed usare la conservazione della massa totale.

4.5 Onde smorzate

In alcuni casi, la presenza di un termine 'non omogeneo' al secondo membro di una legge di conservazione può modificare profondamente la struttura del modello. Consideriamo il caso dell'equazione di Burgers con un termine di *assorbimento* del tipo

$$u_t + uu_x = -au, \quad u(x,0) = u_0(x), \qquad a > 0. \tag{4.34}$$

La presenza del termine di assorbimento $-au$ può essere originata da una dissipazione di una sostanza o di un materiale, o da fenomeni di attrito o di frizione. Un tipico esempio riguarda il moto di un fluido in presenza di un mezzo poroso, di cui ci occuperemo più avanti. Tentiamo di risolvere (4.34) mediante caratteristiche. L'equazione delle curve caratteristiche è sempre la stessa,

$$\dot{x}(x_0,t) = u(x(x_0,t),t), \quad x(x_0,0) = x_0.$$

La soluzione lungo le curve caratteristiche soddisfa

$$\frac{d}{dt}u(x(x_0,t),t) = -au(x(x_0,t),t), \quad u(x(x_0,0),0) = u_0(x_0),$$

per cui si ha

$$u(x(x_0,t),t) = e^{-at}u_0(x_0).$$

Dunque, le curve caratteristiche sono date esplicitamente dalle equazioni

$$x(x_0,t) = x_0 + \frac{1-e^{-at}}{a}u_0(x_0). \tag{4.35}$$

Da (4.23) appare chiaro che le caratteristiche tendono a 'raddrizzarsi' per tempi lunghi, ovvero, la caratteristica $x = x(x_0,t)$ ammette come asintoto per $t \to +\infty$ la retta $x \equiv x_0 + \frac{u_0(x_0)}{a}$. Come nel caso omogeneo, la risolubilità in senso classico dell'equazione risiede nella possibilità di esplicitare x_0 nella relazione (4.23). Dal teorema 1.3.2 segue che ciò è possibile se vale la condizione

$$0 \neq 1 + \frac{1-e^{-at}}{a}u_0'(x_0). \tag{4.36}$$

Ancora una volta, (4.36) è soddisfatta per $t = 0$. Una condizione sufficiente per cui (4.36) sia soddisfatta per tutti i tempi $t > 0$ è

$$u_0'(x_0) > -a. \tag{4.37}$$

Ricordando che nel caso omogeneo l'invertibilità delle caratteristiche per ogni tempo (insieme con la conseguente esistenza globale della soluzione) era garantita per $u_0' > 0$, osserviamo che in presenza del termine di assorbimento l'esistenza globale sussiste anche nel caso di dati iniziali decrescenti, purchè la loro derivata prima non violi la condizione di soglia (4.37). Tale fenomeno è un esempio di come la presenza di termini di attrito possa (non sempre) prevenire la formazione di shock.

4.6 Modello di inquinante in un fiume (drift-diffusion)

In questa sezione e nella prossima ci occuperemo dell'interazione tra i fenomeni tipici del trasporto (lineare e non lineare) con gli effetti della diffusione. Iniziamo esaminando un semplice modello di trasporto e diffusione di una sostanza inquinante lungo un corso d'acqua con corrente che si muova con velocità v lungo la direzione positiva dell'asse x. Implicitamente stiamo trascurando la profondità (pensando che l'inquinante galleggi) e la dimensione trasversale del corso d'acqua (pensando ad un canale molto stretto). Indichiamo con $c = c(x,t)$ la concentrazione della sostanza, nel senso che la quantità $c(x,t)dx$ rappresenta la massa presente al tempo t nell'intervallo $[x, x+dx]$ (di lunghezza infinitesima). Coerentemente,

$$\int_x^{x+\Delta x} c(y,t)dy$$

rappresenta la massa di inquinante presente al tempo t nell'intervallo $[x, x+\Delta x]$. In modo analogo al modello di traffico studiato in precedenza, possiamo definire il flusso di concentrazione nell'unità di tempo $q(x,t)$ e scrivere la legge di bilancio per c ricavanco l'equazione di continuità

$$c_t + q_x = 0.$$

Dato che la velocità dell'inquinante è costante e pari a v, da considerazioni analoghe al caso del traffico e trascurando qualsiasi altro effetto abbiamo

$$q(x,t) = vc(x,t),$$

che porta alla seguente equazione di trasporto lineare per c,

$$c_t + vc_x = 0.$$

Introduciamo a questo punto un cosiddetto 'effetto di ordine superiore', ovvero teniamo in considerazione fenomeni diffusivi. Più precisamente, l'osservazione ci suggerisce che la spostanza inquinante si espanda in zone da alta a bassa concentrazione, il che può essere formalizzato (in forma semplice) nella seguente *legge di Fick*

$$q(x,t) = -Dc_x(x,t),$$

dove $D > 0$ dipende dalla sostanza (ovviamente la formula precedente è vera quando $v = 0$). Un tale fenomeno è *diffusivo* in quanto la legge di Fick è identica alla legge di Fourier per la propagazione del calore. Se, dunque, teniamo in considerazione sia il trasporto lineare che la diffusione, avremo la seguente formula per il flusso

$$q(x,t) = vc(x,t) - Dc_x(x,t),$$

che implica che c soddisfa la seguente equazione di *deriva–diffusione* (drift–diffusion)

$$c_t = Dc_{xx} - vc_x. \tag{4.38}$$

Per risolvere tale equazione sotto la condizione iniziale $c(x,0) = C(x)$, ricorriamo al seguente trucco per eliminare il termine di trasporto. Poniamo

$$w(x,t) = c(x,t)e^{hx+kt}$$

con h e k da determinarsi in modo opportuno. Si ha (svolgendo tutti i calcoli)

$$\begin{aligned} w_t - Dw_{xx} &= e^{hx+kt}[c_t - Dc_{xx} - 2Dhc_x + (k - Dh^2)c] \\ &= e^{hx+kt}[(-v - 2Dh)c_x + (k - Dh^2)c]. \end{aligned}$$

Quindi, se scegliamo

$$h = -\frac{v}{2D}, \qquad k = \frac{v^2}{4D}$$

la funzione w è soluzione dell'equazione del calore

$$w_t - D\Delta w = 0,$$

con la condizione iniziale

$$w(x,0) = C(x)e^{-\frac{vx}{2D}}.$$

Ricordando quanto detto nel paragrafo 3.1.6, w è data da

$$w(x,t) = G(x,t) * C(x)e^{-\frac{vx}{2D}},$$

dove G è la soluzione fondamentale dell'equazione del calore; la concentrazione c è data quindi dalla convoluzione

$$c(x,t) = e^{\frac{v}{2D}(x-\frac{v}{2}t)} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y,t)C(y)e^{-\frac{vy}{2D}}dy.$$

Nella formula precedente, l'effetto provocato dal trasporto è dato dall presenza della variabile $\left(x - \frac{v}{2}t\right)$ (che indica un 'fronte' che avanza con velocità $v/2$), mentre l'effetto della diffusione si esprime con la presenza del termine di convoluzione, che provoca una velocità infinita di propagazione, cosa che non avveniva nel caso di trasporto semplice.

Concludiamo questa sezione modificando il modello in esame mediante l'aggiunta di un termine di *reazione* o di *assorbimento*. Dal punto di vista fisico stiamo supponendo che la quantità totale della sostanza in oggetto (l'inquinante) non si conservi nel tempo, ma sia soggetta ad estinguersi, ad esempio per decomposizione batteriologica. Quando ciò accade, nella legge di bilancio dobbiamo inserire anche un termine di ordine zero, che supporremo lineare per semplicità. Otteniamo dunque l'equazione

$$c_t + vc_x = Dc_{xx} - \gamma c,$$

con $\gamma > 0$ costante. In questo semplice caso, l'equazione precedente (detta equazione di *trasporto–diffusione–assorbimento*) si può ricondurre a quella senza termine di reazione mediante la trasformazione

$$u(x,t) := e^{\gamma t}c(x,t).$$

La nuova variabile u infatti soddisfa l'equazione

$$u_t + vu_x = Du_{xx},$$

che può essere risolta come sopra.

4.7 L'equazione di Burgers viscosa

Torniamo al modello di traffico introdotto nel paragrafo 4.1. Nel paragrafo 4.3 abbiamo ricavato una legge costitutiva per la velocità dei veicoli

$$V(g) = v_{max}\left(1 - \frac{g}{g_{max}}\right).$$

Tale espressione tiene conto solo del fatto che la velocità di un veicolo è influenzata dalla presenza o meno di altri veicoli nei dintorni. In questo paragrafo introduciamo un effetto di ordine superiore che esprima (in modo semplificato) la consapevolezza da parte del guidatore delle condizioni del traffico dei veicoli che lo precedono. Ovviamente, il guidatore tende a rallentare se si accorge che la densità dei veicoli che lo precedono sta *aumentando*, mentre esso tende ad accelleare se la densità dei veicoli che lo precedono sta diminuendo. Anche in questo caso, dunque, come nel paragrafo precedente, introduciamo una dipendenza del flusso di veicoli f dalla derivata spaziale di ρ, ovvero

$$f(g) = gv_{max}\left(1 - \frac{g}{g_{max}}\right) - \nu g_x,$$

ove $\nu > 0$ è una costante. L'equazione di Whitham–Lighthill (4.15) diventa

$$g_t + f(g)_x = \nu g_{xx}. \tag{4.39}$$

Come osservato nel paragrafo 4.3, l'equazione precedente può essere un interessante oggetto di studio con condizioni piuttosto generali riguardo alla funzione f. La differenza sostanziale tra l'equazione (4.39) e l'equazione di deriva diffusione (4.38) è che il termine di trasporto $f(g)$ è in questo caso nonlineare. Per semplificare la trattazione, esamineremo anche qui il caso in cui $f(g) = g^2/2$. Cambiando nome alla variabile dipendente, concentriamo dunque la nostra attenzione sulla seguente *equazione di Burgers viscosa*

$$\rho_t + \rho\rho_x = \nu\rho_{xx}. \tag{4.40}$$

Studieremo il problema si Cauchy per tale equazione, accoppiandola quindi con un dato inziale $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$. Per risolvere l'equazione (4.40) usiamo un procedimento sviluppato indipendentemente da Cole (1951) e Hopf(1950). Iniziamo ponendo

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(y)dy,^{1}$$

il che implica la seguente equazione per ψ ottenuta integrando la (4.40),

$$\psi_t + \frac{1}{2}\psi_x^2 = \nu\psi_{xx}. \tag{4.41}$$

[1] Stiamo ovviamente sottintendendo che ρ abbia integrale finito sulla retta reale.

L'equazione (4.41) è detta equazione di *Hamilton–Jacobi*. Poniamo quindi

$$\psi = -2\nu \log \phi.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\psi_t &= -2\nu \frac{\phi_t}{\phi} \\
\psi_x &= -2\nu \frac{\phi_x}{\phi} \\
\psi_{xx} &= -2\nu \frac{\phi_{xx}}{\phi} + 2\nu \frac{\phi_x^2}{\phi^2}.
\end{aligned}$$

Sostituendo tali espressioni nell'equazione (4.41) otteniamo

$$0 = \psi_t + \frac{1}{2}\psi_x^2 - \nu\psi_{xx} = -\frac{2\nu}{\phi}\left(\phi_t - \nu\phi_{xx}\right),$$

ovvero ϕ soddisfa l'equazione del calore

$$\phi_t = \nu\phi_{xx}$$

con dato iniziale

$$\phi(x,0) = \phi_0(x) = e^{-\frac{1}{2\nu}\int_0^x \rho_0(y)dy}.$$

Usando il procedimento esposto nella sezione 3.1.6, abbiamo la seguente formula per ϕ

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}} dy.$$

Usando le definizioni di ψ e ϕ otteniamo la relazione

$$\rho = -2\nu \frac{\phi_x}{\phi}. \tag{4.42}$$

Dunque, la soluzione nella variabile ρ è data da

$$\begin{aligned}
\rho(x,t) &= \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-y}{t} e^{-G(y,x,t)/2\nu} dy}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-G(y,x,t)/2\nu} dy}, \\
G(y,x,t) &= \int_0^y \rho_0(z)dz + \frac{(x-y)^2}{2t}.
\end{aligned}$$

Chiudiamo questo paragrafo osservando che il termine di diffusione aggiunto all'equazione non dà alcun contributo alla massa totale della soluzione (vedi il calcolo al termine della sezione 3.1.2).

4.8 Viscosità evanescente nell'equazione di Burgers

In questa sezione consideriamo una particolare soluzione non negativa ed integrabile della (4.40) per un dato valore di $\nu > 0$ ed esamineremo il comportamento di tale soluzione al tendere di ν a zero. Un tale procedimento è detto *limite di viscosità evanescente* per una legge di conservazione viscosa. Costruiremo la nostra soluzione particolare usando la trasformazione (4.42). Consideriamo la funzione

$$\phi(x,t) = 1 - \frac{C}{\sqrt{4\nu\pi t}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} dy,$$

con $C > 0$ costante da determinare. Dato che ϕ è data da una costante sommata ad una primitiva della soluzione fondamentale dell'equazione del calore, è chiaro che ϕ soddisfa la stessa equazione $\phi_t = \nu\phi_{xx}$. Dunque, possiamo inserire ϕ nella formula (4.42) ed ottenere una soluzione dell'equazione di Burgers viscosa. Per prima cosa fissiamo la massa totale di ρ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,t) = M.$$

Integrando la trasformazione (4.42) su tutto $\mathbb{R}$ otteniamo la seguente espressione per C

$$C = 1 - e^{-\frac{M}{2\nu}}.$$

La dimostrazione della formula precedente è lasciata per esercizio. Abbiamo così ottenuto la seguente formula per ρ,

$$\rho(x,t) = \frac{\frac{\sqrt{\nu}C}{\sqrt{t\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\nu t}}}{1 - \frac{C}{\sqrt{4\nu\pi t}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} dy}.$$

Cambiando variabile dentro l'integrale abbiamo

$$\rho(x,t) = \frac{\frac{\sqrt{\nu}C}{\sqrt{t\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\nu t}}}{1 - \frac{C}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sqrt{4\nu t}} e^{-y^2} dy}.$$

Ponendo

$$z = \frac{x}{2\sqrt{t}}, \quad R = \frac{1}{\nu}$$

e moltiplicando numeratore e denominatore per $e^{MR/2}$, otteniamo

$$\rho = \frac{(e^{MR/2} - 1)e^{-Rz^2}}{\sqrt{tR}\left[\sqrt{\pi}e^{MR/2} + (1 - e^{MR/2}) \int_{-\infty}^{z\sqrt{R}} e^{-y^2} dy\right]}.$$

Usando le proprietà di additività dell'integrale, ed usando il fatto che l'integrale della funzione e^{-y^2} su tutto $\mathbb{R}$ è uguale a $\sqrt{\pi}$, otteniamo

$$\rho = \frac{(e^{MR/2}-1)e^{-Rz^2}}{\sqrt{tR}\left[\sqrt{\pi}+(e^{MR/2}-1)\int_{z\sqrt{R}}^{+\infty} e^{-y^2}dy\right]}.$$

Dell'espressione precedente vogliamo prendere il limite per $R \to +\infty$ (ricordiamo che a noi interessa sapere cosa succede quando $\nu \to 0^+$). In virtù di ciò, possiamo semplificare l'espressione precedente e calcolare il limite

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{e^{R\left(\frac{M}{2}-z^2\right)}}{\sqrt{tR}\left(\sqrt{\pi}+e^{MR/2}\int_{z\sqrt{R}}^{+\infty} e^{-y^2}dy\right)}.$$

Consideriamo anzitutto il caso $z < 0$. Sotto questa condizione, l'integrale a denominatore tende a $\sqrt{\pi}$, cosicché l'intera frazione è maggiorata definitivamente da

$$\frac{e^{MR/2}}{\frac{3\sqrt{tR\pi}}{2}e^{MR/2}} = \frac{2}{3\sqrt{tR\pi}} \to 0.$$

Abbiamo dunque mostrato che il limite in questione è nullo sotto la condizione $z < 0$, che è equivalente ad $x < 0$. Prima di analizzare il caso $z > 0$ risolviamo il seguente esercizio.

Esercizio 4.8.1 Dimostrare il seguente limite

$$\lim_{\eta\to+\infty} \frac{2\eta\int_{\eta}^{+\infty} e^{-y^2}dy}{e^{-\eta^2}} = 1.$$

In virtù del risultato nell'esercizio precedente, possiamo affermare che nel caso in cui $z > 0$ il limite in questione è equivalente al seguente

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{e^{R\left(\frac{M}{2}-z^2\right)}}{\sqrt{tR}\left(\sqrt{\pi}+\frac{e^{R\left(\frac{M}{2}-z^2\right)}}{2z\sqrt{R}}\right)}.$$

Nel caso in cui $z > \sqrt{\frac{M}{2}}$, il numeratore tende a zero mentre il denominatore tende a $+\infty$. Di conseguenza, sotto la condizione

$$x > \sqrt{2Mt}$$

il limite è ancora nullo. Il caso più interessante è quello in cui $0 < z < \sqrt{\frac{M}{2}}$, ovvero

$$0 < x < \sqrt{2Mt}.$$

In questo caso il termine esponenziale diverge, e diventa predominante a denominatore. Il risultato del limite è dunque

$$\frac{2z}{\sqrt{t}} = \frac{x}{t}.$$

La funzione ottenuta al limite per $\nu \to 0$ è dunque

$$\overline{\rho}(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & \text{se } 0 < x < \sqrt{2Mt} \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

La funzione appena scritta è uguale a quella determinata nell'esempio 4.4.6, ovvero la soluzione di tipo *N–wave* dell'equazione di Burgers non viscosa. Commentiamo dunque il risultato appena ottenuto. Da un lato, esso non ci sorprende più di tanto: abbiamo mandato la viscosità a zero, ed è quindi naturale aspettarsi al limite una soluzione della stessa equazione con viscosità nulla. Da un altro punto di vista, però, questo risultato riveste una importanza non indifferente. Ricordiamo che nell'esempio 4.4.4 avevamo un problema di unicità della soluzione. Abbiamo infatti determinato due soluzioni deboli dell'equazione di Burgers a partire dallo stesso dato iniziale. Abbiamo poi stabilito che la soluzione 'giusta' era quella data da un'onda di rarefazione, dato che lo shock in questo caso non era ammissibile in quanto lo stato di sinistra era minore dello stato di destra. Ebbene, la soluzione limite che abbiamo qui ottenuto è costituita da un'onda di rarefazione. Per gli scopi di questo corso, ciò costituisce una motivazione sufficiente per selezionare l'onda di rarefazione nell'esempio 4.4.4 sopracitato. Il motivo per cui stiamo dando alla soluzione limite appena ottenuta una certa importanza è il seguente: una soluzione ottenuta come limite di viscosità evanescente è fisicamente sensata, in quanto è realistico supporre che la viscosità, per quanto piccola, non sia mai nulla. Un'ultimo commento riguarda il profilo della soluzione. Nel caso viscoso, $\rho(\cdot,t)$ è una funzione di classe C^∞, la cui forma approssima sempre di più quella della N–wave. Nel caso $\nu = 0$ otteniamo una funzione *discontinua* nel punto $x = \sqrt{2Mt}$, in cui vi è uno shock. Questo è coerente con l'idea intuitiva che la diffusione 'regolarizza' l'evoluzione del modello. Nel caso del traffico, infatti, le nuove ipotesi fatte sul flusso dei veicoli suggeriscono l'idea che la densità sia distribuita in modo più regolare, senza variazioni brusche.

Bibliografia

- A. Milani Comparetti – Introduzione ai Sistemi Dinamici – Plus (Pisa)
- G. B. Whitham – Linear and Nonlinear Waves – Wiley Interscience.
- S. Salsa – Equazioni alle derivate parziali – Springer
- R. Esposito – Appunti delle lezioni di Meccanica Razionale – Aracne.