Soluzioni per serie per equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine:

Irene Benedetti
Dipartimento di Energetica S.Stecco, Università di Firenze

1 Soluzioni in un intorno di un punto ordinario:

Consideriamo una equazione lineare del secondo ordine a coefficienti variabili del tipo:

$$\alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y = 0 \tag{1.1}$$

Definizione 1.1. *Un punto x_0 è detto un punto ordinario dell'equazione differenziale (2.1) se le due funzioni*

$$p(x) = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \ \ e \ \ q(x) = \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} \tag{1.2}$$

sono analitiche nel punto x_0, cioè le funzioni p, q sono sviluppabili in serie di potenze:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-x_0)^n \ \ per\ |x-x_0| < R_1, \\ q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x-x_0)^n \ per \ \ |x-x_0| < R_2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Se una delle due funzioni in (1.2) non è analitica nel punto x_0 allora x_0 è detto un punto singolare dell'equazione (2.1).

Theorem 1.2. *Se x_0 è un punto ordinario dell'equazione differenziale (2.1) allora la soluzione generale dell'equazione differenziale è sviluppabile in serie di potenze intorno a x_0.*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \tag{1.4}$$

con raggio di convergenza positivo. Più precisamente se R_1, R_2 sono raggi di convergenza delle serie in (1.3) il raggio di convergenza di (1.4) è minore o uguale al minimo fra R_1 e R_2. I coefficienti a_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ della serie (1.4) possono essere ottenuti dalla sostituzione diretta di (1.4) nella equazione differenziale (2.1) ed uguagliando i coefficienti dei termini della stessa potenza.

Esempio 1.3. *Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale:*

$$y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0 \tag{1.5}$$

in un intorno del punto $x_0 = 1$.

Soluzione: Differenziando (1.4) termine a termine si ottiene:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1}$$

e

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}$$

Ora sostituiamo $y,\ y',\ y''$ nell'equazione (1.5):

$$\begin{aligned}
y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} \\
-2(x-1)y' &= -2(x-1)\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} -2na_n(x-1)^n \\
2y &= 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x-1)^n
\end{aligned}$$

Dal momento che è più facile sommare le tre serie termine a termine se i termini generali sono della stessa potenza in ogni serie e l'indice di partenza delle serie è lo stesso per tutte e tre le serie, riscriviamo le serie nella seguente forma equivalente:

$$(j=n-2),\ y'' = \sum_{j=0}^{\infty}(j+2)(j+1)a_{j+2}(x-1)^j = 2a_2 + \sum_{j=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n$$

$$-2(x-1)y' = \sum_{n=1}^{\infty} -2na_n(x-1)^n$$

$$2y = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x-1)^n = 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n(x-1)^n$$

Sommando termine a termine il membro di destra e quello di sinistra risulta:

$$0 = (2a_2 + 2a_0) + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + 2a_n](x-1)^n$$

Il membro di sinistra è una serie di potenze identicamente uguale a zero, quindi tutti i suoi coefficienti devono essere nulli. Cioè:

$$2a_2 + 2a_0 = 0 \tag{1.6}$$

e

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + 2a_n = 0 \ \text{ per } \ n = 1, 2, \dots \tag{1.7}$$

La condizione (1.7) è detta formula di ricorrenza perchè permette di ottenere a_{n+2} sapendo a_n. Dalla (1.6) otteniamo:

$$a_2 = -a_0$$

e dalla (1.7) otteniamo

$$a_{n+2} = \frac{2(n-1)}{(n+2)(n+1)} a_n \text{ per } n = 1, 2, \ldots$$

Cioè:

$$a_3 = 0, \;\; a_4 = \frac{2}{4 \cdot 3} a_2 = -\frac{2}{4 \cdot 3} a_0 = -\frac{2^2}{4!} a_0$$

$$a_5 = 0, \;\; a_6 = \frac{2 \cdot 3}{6 \cdot 5} a_4 = -\frac{2^2 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} a_0 = -\frac{2^3 \cdot 3}{6!} a_0$$

$$a_7 = 0, \;\; a_8 = \frac{2 \cdot 5}{8 \cdot 7} a_6 = -\frac{2^3 \cdot 5 \cdot 3}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} a_0 = -\frac{2^4 \cdot 5 \cdot 3}{8!} a_0$$

Quindi abbiamo trovato che:

$$a_{2n+1} = 0, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

e

$$a_{2n} = -\frac{2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-3)}{2n!} a_0, \;\; n = 2, 3, \ldots$$

Allora la soluzione generale dell'equazione (1.5) è

$$\begin{aligned} &y(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_4(x-1)^4 + a_6(x-1)^6 + \cdots = \\ &a_1(x-1) + a_0(1 - (x-1)^2 - \frac{2^2}{4!}(x-1)^4 - \frac{2^3 \cdot 3}{6!}(x-1)^6 - \ldots). \end{aligned}$$

2 Soluzioni vicino a un punto singolare regolare

Definizione 2.1. *Un punto x_0 è detto un punto singolare regolare dell'equazione differenziale:*

$$\alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y = 0 \tag{2.1}$$

se è un punto singolare e le due funzioni

$$(x - x_0)\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = (x - x_0)p(x) \text{ e } (x - x_0)^2 \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = (x - x_0)^2 q(x) \tag{2.2}$$

sono analitiche nel punto x_0. Se una delle due funzioni in (2.2) non è analitica nel punto x_0 allora x_0 è detto un punto singolare irregolare dell'equazione (2.1).

In un intorno di un punto singolare regolare il metodo di sviluppo in serie visto nel paragrafo precedente non si può applicare, in questo caso allora risolviamo l'equazione differenziale usando il cosiddetto metodo di Frobenius, che consiste nel cercare una soluzione della forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} \tag{2.3}$$

con $a_0 \neq 0$ e dove abbiamo supposto $x_0 = 0$ punto singolare regolare per semplicità. Notiamo che in questo caso oltre ai coefficienti a_n della serie è da determinare l'esponente λ.

Se sostituiamo y definita in (2.3) nell'equazione differenziale (2.1) otteniamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda+n)(\lambda+n-1)x^{n+\lambda-2}+$$

$$p(x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda+n)x^{n+\lambda-1}+q(x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}=0.$$

Raccogliamo x dalla seconda serie e x^2 dalla terza per rendere tutti gli esponenti uguali:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda+n)(\lambda+n-1)x^{n+\lambda-2}+$$

$$xp(x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda+n)x^{n+\lambda-2}+x^2q(x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda-2}=0.$$

Siccome abbiamo supposto che 0 sia un punto singolare regolare allora $xp(x)$ e $x^2q(x)$ sono sviluppabili in serie di potenze.

$$xp(x)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-x_0)^n \text{ per } |x-x_0|<R_1,$$

$$x^2q(x)=\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x-x_0)^n \text{ per } |x-x_0|<R_2.$$

Sostituendo queste serie nell'equazione si ha:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda+n)(\lambda+n-1)x^{n+\lambda-2}+$$

$$(A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda+n)x^{n+\lambda-2}+(B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda-2}=0.$$

Per $n=0$ si ha la potenza più piccola di x che è $x^{\lambda-2}$. Il suo coefficiente è $a_0(\lambda(\lambda-1)+A_0\lambda+B_0)$. Poichè $a_0\neq 0$ l'unico modo per cui questo coefficiente si annulli è che $\lambda(\lambda-1)+A_0\lambda+B_0=0$. Più in generale considerando un punto singolare regolare x_0 possiamo definire l'equazione indiciale nel seguente modo:

Definizione 2.2. *Supponiamo che x_0 sia un punto singolare regolare dell'equazione differenziale (2.1) e supponiamo che*

$$\begin{aligned}(x-x_0)p(x)&=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-x_0)^n \textit{ per } |x-x_0|<R_1,\\ (x-x_0)^2q(x)&=\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x-x_0)^n \textit{ per } |x-x_0|<R_2.\end{aligned} \tag{2.4}$$

L'equazione:

$$\lambda^2 + (A_0 - 1)\lambda + B_0 = 0 \tag{2.5}$$

è detta equazione indiciale di (2.1) in x_0.

Theorem 2.3. *Supponiamo che x_0 sia un punto singolare regolare dell'equazione differenziale (2.1) e supponiamo che gli sviluppi in serie in (2.4) valgano. Siano λ_1 e λ_2 due radici dell'equazione indiciale (2.5), nel caso in cui entrambe le radici siano numeri reali con $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Allora una delle soluzioni di (2.1) è della forma:*

$$y_1(x) = |x - x_0|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{2.6}$$

con $a_0 = 1$ ed è valida nell'intervallo $0 < |x - x_0| < R$ con $R = \min\{R_1, R_2\}$. La seconda soluzione linearmente indipendente $y_2(x)$ dell'equazione (2.1) nell'intervallo $0 < |x - x_0| < R$ si trova nel seguente modo:

CASO 1: *Se $\lambda_1 - \lambda_2 \neq$ intero, allora*

$$y_2(x) = |x - x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \tag{2.7}$$

CASO 2: *Se $\lambda_1 = \lambda_2$, allora*

$$y_2(x) = y_1(x) \ln |x - x_0| + |x - x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \tag{2.8}$$

CASO 3: *Se $\lambda_1 - \lambda_2$ non è intero, allora*

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln |x - x_0| + |x - x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \tag{2.9}$$

La costante C può essere uguale a zero.

Esempio 2.4. *Calcolare la soluzione generale dell'equazione:*

$$2x^2 y'' + (x - x^2) y' - y = 0 \tag{2.10}$$

in un intorno di $x_0 = 0$.

Soluzione: In questo caso $\alpha(x) = 2x^2$, $\beta(x) = x - x^2$, $\gamma(x) = -1$.
Poichè $\alpha(0) = 0$, il punto $x_0 = 0$ è un punto singolare dell'equazione differenziale (2.10), d'altra parte si ha che:

$$(x - x_0)\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = x\frac{x - x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$$

$$(x - x_0)^2\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = x^2\frac{-1}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

sono funzioni analitiche con raggio di convergenza infinito, il punto $x_0 = 0$ è un punto singolare regolare dell'equazione differenziale (2.10). $A_0 = \frac{1}{2}$, $B_0 = -\frac{1}{2}$, quindi l'equazione indiciale è:

$$2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

con radici $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.
Una soluzione dell'equazione (2.10) è della forma:

$$y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{2.11}$$

con $a_0 = 1$. Poichè $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{3}{2}$, le due radici dell'equazione indiciale non differiscono per un intero e quindi la seconda soluzione linearmente indipendente è della forma:

$$y_2(x) = |x|^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \tag{2.12}$$

con $b_0 = 1$. Poichè $R_1 = R_2 = +\infty$ la serie di potenze in (2.11) converge per ogni x. D'altra parte la serie in (2.12) non è definita per $x = 0$, è definita nell'intervallo $0 < |x| < +\infty$.
Ora calcoliamo i coefficienti a_n della soluzione (2.11). Si ha che:

$$y(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^n \ e \ y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_n x^{n-1}$$

$$2x^2y'' = \sum_{n=0}^{\infty} 2n(n+1)a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n(n+1)a_n x^{n+1}$$

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+1} = a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+1}$$

$$-x^2y' = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+2} = -\sum_{j=1}^{\infty} j a_{j-1} x^{j+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} x^{n+1} \quad (n+1 = j)$$

$$-y = \sum_{n=0}^{\infty} -a_n x^{n+1} = -a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} -a_n x^{n+1}$$

e sommando membro a membro otteniamo:

$$0 = (a_0 - a_0)x + \sum_{n=0}^{\infty}[2n(n+1)a_n + (n+1)a_n - na_{n-1} - a_n]x^{n+1}.$$

Uguagliando i coefficienti a zero, otteniamo la formula ricorsiva:

$$2n(n+1)a_n + (n+1)a_n - na_{n-1} - a_n = 0\ ,\ n = 1, 2, \dots$$

$$a_n = \frac{na_{n-1}}{2n(n+1) + (n+1) - 1} = \frac{1}{2n+3}a_{n-1}\ ,\ n = 1, 2, \dots$$

per $n = 1:\quad a_1 = \frac{1}{5}a_0$
per $n = 2:\quad a_2 = \frac{1}{7}a_1 = \frac{1}{5\cdot 7}a_0$
per $n = 3:\quad a_3 = \frac{1}{9}a_2 = \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9}a_0$
in generale

$$a_n = \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)}a_0\ ,\ n = 1, 2, \dots$$

Quindi una soluzione dell'equazione (2.10) in un intorno di x_0 è

$$y_1(x) = a_0x\left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{5\cdot 7} + \dots + \frac{x^n}{5\cdot 7\cdots(2n+3)} + \dots\right)$$

Ora calcoliamo i coefficienti b_n di y_2 nel caso $x > 0$:

$$y_2(x) = x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^{n-(1/2)}$$

$$y_2'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n - \frac{1}{2})b_nx^{n-(3/2)}$$

$$y_2''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2})b_nx^{n-(5/2)}$$

Quindi otteniamo:

$$2x^2y_2'' = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2})b_nx^{n-(1/2)} = \frac{3}{2}b_0x^{(-1/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2})b_nx^{n-(1/2)}$$

$$xy_2' = \sum_{n=0}^{\infty}(n - \frac{1}{2})b_nx^{n-(1/2)} = -\frac{1}{2}b_0x^{(-1/2)} + \sum_{n=1}^{\infty}(n - \frac{1}{2})b_nx^{n-(1/2)}$$

$$-x^2y_2' = \sum_{n=0}^{\infty} -(n - \frac{1}{2})b_nx^{n+(1/2)} = \sum_{n=1}^{\infty}(n - \frac{3}{2})b_{n-1}x^{n-(1/2)}$$

$$-y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} -b_nx^{n-(1/2)} = -b_0x^{-(1/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} -b_nx^{n-(1/2)}$$

sommando membro a membro:

$$0=(\frac{3}{2}b_0-\frac{1}{2}b_0-b_0)x^{-(1/2)}+\sum_{n=1}^{\infty}[2(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})b_n+(n-\frac{1}{2})b_n-(n-\frac{3}{2})b_{n-1}-b_n]x^{n-(1/2)}$$

Uguagliando ogni coefficiente a zero, otteniamo la formula ricorsiva:

$$2(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})b_n+(n-\frac{1}{2})b_n-(n-\frac{3}{2})b_{n-1}-b_n=0,\ \ n=1,2,\dots$$

cioè:

$$b_n=\frac{(n-\frac{3}{2})b_{n-1}}{2(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})+(n-\frac{1}{2})-1}=\frac{1}{2n}b_{n-1},\ \ n=1,2,\dots$$

per $n=1:\ \ b_1=\frac{1}{2}b_0$

per $n=2:\ \ b_2=\frac{1}{2\cdot 2}b_1=\frac{1}{2^2\cdot 2}b_0$

per $n=3:\ \ b_3=\frac{2}{3}b_2=\frac{1}{2^3\cdot 2\cdot 3}b_0$

in generale

$$b_n=\frac{1}{2^n\cdot n!}b_0\ ,\ n=1,2,\dots$$

Quindi una soluzione dell'equazione (2.10) in un intorno di x_0 è

$$y_2(x)=b_0x^{-(1/2)}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2\cdot 2!}+\cdots+\frac{x^n}{2^n\cdot n!}+\dots\right)$$

$$=b_0x^{-(1/2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n!}=b_0x^{-(1/2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x/2)^n}{n!}$$

cioè

$$y_2(x)=b_0x^{-1/2}e^{x/2}$$

dunque la soluzione generale è:

$$y(x)=a_0x\left(1+\frac{x}{5}+\frac{x^2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{x^n}{5\cdot 7\cdots(2n+3)}+\dots\right)+b_0x^{-1/2}e^{x/2}.$$

Esempio 2.5. *Trovare la soluzione generale dell'equazione:*

$$xy''+(2-x)y'+\frac{1}{4x}y=0 \tag{2.13}$$

in un intorno del punto $x_0=0$.

Soluzione: In questo caso:

$$p(x)=\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\frac{2-x}{x}\ ;\ q(x)=\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}=\frac{1}{4x^2}$$

$x_0 = 0$ è un punto singolare, ma dato che:

$$xp(x) = x\frac{2-x}{x} = 2 - x \ ; \ x^2 q(x) = x^2 \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{4}$$

si ha che $x_0 = 0$ è un punto singolare regolare, inoltre si ha $A_0 = 2$, $B_0 = \frac{1}{4}$, l'equazione indiciale è:

$$\lambda^2 + (2-1)\lambda + \frac{1}{4} = 0$$

che ha una radice doppia $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$.
Quindi c'è una soluzione della forma:

$$y_1(x) = x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-(1/2)}$$

Otteniamo

$$y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \frac{1}{2}) a_n x^{n-(3/2)}$$

$$y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) a_n x^{n-(5/2)}$$

Quindi otteniamo:

$$\begin{aligned}
xy_1'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) a_n x^{n-(3/2)} = \frac{3}{4} a_0 x^{(-3/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) a_n x^{n-(3/2)} \\
(2-x)y_1' &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(n - \frac{1}{2}) a_n x^{n-(3/2)} - \sum_{n=0}^{\infty} (n - \frac{1}{2}) a_n x^{n-(1/2)} = \\
&= -a_0 x^{-(3/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n - \frac{1}{2}) a_n x^{n-(3/2)} - \sum_{n=1}^{\infty} (n - \frac{3}{2}) a_{n-1} x^{n-(3/2)} \\
\frac{1}{4x} y_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} a_n x^{n-(3/2)} = \frac{1}{4} a_0 x^{-(3/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} a_n x^{n-(3/2)}
\end{aligned}$$

sommando membro a membro:

$$\left(\frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{4}\right) a_0 x^{-(3/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) a_n + 2(n - \frac{1}{2}) a_n - (n - \frac{3}{2}) a_{n-1} + \frac{1}{4} a_n \right) x^{n-(3/2)} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n n^2 - \frac{2n-3}{2} a_{n-1} \right) x^{n-(3/2)} = 0$$

Uguagliando i coefficienti a zero, otteniamo la formula ricorsiva:

$$a_n = \frac{2n-3}{2n^2} a_{n-1}.$$

Allora una soluzione è:

$$y_1(x) = a_0 \left(x^{-(1/2)} - \frac{1}{2} x^{1/2} - \frac{1}{16} x^{3/2} + \dots \right)$$

Poichè le radici dell'equazione indiciale sono uguali c'è una seconda soluzione linearmente indipendente della forma:

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-(1/2)}$$

Otteniamo:

$$y_2'(x) = \frac{y_1(x)}{x} + y_1'(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} (n - \frac{1}{2}) b_n x^{n-(3/2)}$$

$$y_2''(x) = \frac{-y_1(x)}{x^2} + \frac{2y_1'(x)}{x} + y_1''(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) b_n x^{n-(5/2)}$$

Quindi otteniamo:

$$\begin{aligned}
xy_2'' &= \frac{-y_1(x)}{x} + 2y_1'(x) + xy_1''(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) b_n x^{n-(3/2)} = \\
&= \frac{-y_1(x)}{x} + 2y_1'(x) + xy_1''(x) \ln x + \frac{3}{4} b_0 x^{(-3/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) b_n x^{n-(3/2)} \\
(2-x)y_2' &= (2-x) \left(\frac{y_1(x)}{x} + y_1'(x) \ln x \right) + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n - \frac{1}{2}) b_n x^{n-(3/2)} - \\
&- \sum_{n=0}^{\infty} (n - \frac{1}{2}) b_n x^{n-(1/2)} = \\
&= (2-x) \left(\frac{y_1(x)}{x} + y_1'(x) \ln x \right) - b_0 x^{-(3/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n - \frac{1}{2}) b_n x^{n-(3/2)} - \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} (n - \frac{3}{2}) a_{n-1} x^{n-(3/2)} \\
\frac{1}{4x} y_2 &= \frac{1}{4x} y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} b_n x^{n-(3/2)} = \frac{1}{4x} y_1 \ln x + \frac{1}{4} b_0 x^{-(3/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} b_n x^{n-(3/2)}
\end{aligned}$$

Sommando membro a membro si ha:

$$\left(xy_1'' + (2-x)y_1' + \frac{1}{4x}y_1(x)\right)\ln x$$
$$+\frac{y_1(x)}{x} + 2y_1'(x) - y_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n n^2 - \frac{2n-3}{2}b_{n-1}\right)x^{n-(3/2)} = 0.$$

La quantità che moltiplica $\ln x$ è pari a zero in quanto y_1 è soluzione dell'equazione (2.13), quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n n^2 - \frac{2n-3}{2}b_{n-1}\right)x^{n-(3/2)} = -\frac{y_1(x)}{x} - 2y_1'(x) + y_1(x)$$

Uguagliando i coefficienti si ha che:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n n^2 - \frac{2n-3}{2}b_{n-1}\right)x^{n-(3/2)} = 2x^{-1/2} - 14x^{1/2} + 1384x^{5/2} + \ldots$$

$$\begin{aligned} &b_1 + 12b_0 = 2 \\ &4b_2 - 12b_1 = -14 \\ &9b_3 - 32b_2 = 0 \end{aligned}$$

In conclusione otteniamo scegliendo $b_0 = 0$:

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + 2x^{1/2} + 316x^{3/2} + 132x^{5/2} + \ldots$$

Esempio 2.6. *Trovare una soluzione generale dell'equazione:*

$$x^2y'' - (x+2)y = 0 \tag{2.14}$$

in un intorno di $x_0 = 0$.

Soluzione: In questo caso $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = 0$ e $\gamma(x) = -(x+2)$. Poichè $a_2(0) = 0$, il punto $x_0 = 0$ è un punto singolare dell'equazione differenziale (2.14). Si ha che:

$$(x-x_0)\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0;$$

$$(x-x_0)^2\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = -2-x,$$

il punto $x_0 = 0$ è un punto singolare regolare, l'equazione indiciale è ($A_0 = 0$, $B_0 = -2$):

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Le radici sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.
Una soluzione dell'equazione (2.14) è del tipo:

$$y_1(x) = x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}$$

Poichè le soluzioni differiscono per un intero la seconda soluzione linearmente indipendente è della forma:

$$y_2(x) = Cy_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1}$$

Calcoliamo i coefficienti a_n di y_1. Si ha che:

$$y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_n x^{n+1}$$

$$y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n x^{n}$$

$$x^2 y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n x^{n+2}$$

Sostituendo nell'equazione ed uguagliando i coefficienti otteniamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n x^{n+2} - (x+2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n x^{n+2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} = 0$$

$$(2a_0 - 2a_0) + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n x^{n+2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+2} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}((n+2)(n+1)a_n - 2a_n + a_{n-1})x^{n+2} = 0$$

Allora otteniamo la formula ricorsiva

$$a_n = -\frac{1}{n(n+3)}a_{n-1}$$

$$y_1(x) = x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{40} + \cdots$$

Ora calcoliamo i coeficienti b_n di y_2, lo facciamo nel caso $x > 0$. Otteniamo

$$y_2(x) = C\left(x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{40} + \cdots\right)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1}$$

$$y_2'(x) = C\left(2x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{10}x^3 + \cdots\right)\ln x + C\left(x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{40} + \cdots\right) + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)b_n x^{n-2}$$

$$y_2''(x) = C\left(2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{10}x^2 + \cdots\right)\ln x + C\left(2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{10}x^2 + \cdots\right) +$$

$$C\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{40}x^2 + \cdots\right) + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)b_n x^{n-3}$$

Sostituendo nell'equazione viene:

$$C\left(2x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \cdots\right)\ln x + C\left(3x^2 + \frac{5}{4}x^3 + \cdots\right) + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)b_n x^{n-1} -$$

$$C\left(x^3 + \frac{x^4}{4} + \cdots\right)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n -$$

$$C\left(2x^2 + \frac{x^3}{2} + \cdots\right)\ln x - 2\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} = 0$$

Quindi si ha:

$$C\left(3x^2 + \frac{5}{4}x^3 + \cdots\right) + [(-b_0 - 2b_1) + (-b_1 - 2b_2)x - b_2x^2 - \cdots] = 0$$

uguagliando i coefficienti a zero viene:

$$(-b_0 - 2b_1) + (-b_1 - 2b_2)x + (3C - b_2)x^2 + \cdots = 0.$$

Prendendo $b_0 = 1$ otteniamo

$$b_1 = -\frac{1}{2},\ b_2 = \frac{1}{4},\ C = \frac{1}{12},\ \cdots$$

Dunque la seconda soluzione linearmente indipendente è:

$$y_2(x) = \frac{1}{12}\left(x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{40} + \cdots\right)\ln|x| + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \cdots\right).$$

In ogni caso se y_1 è una soluzione dell'equazione (2.1), una seconda soluzione linearmente indipendente è data da $y_2(x) = y_1(x)\displaystyle\int \frac{e^{-}\int p(x)\,dx}{[y_1(x)]^2}$ che si ottiene con il metodo della riduzione d'ordine. Infatti applicando questo metodo cerchiamo una soluzione del tipo $y_1 v$, sostituendola nell'equazione (2.1) si ottiene:

$$a_2(x)y_1(x)v''(x) + v'(x)(2a_2y_1'(x) + a_1(x)y_1(x)) + v(x)(a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1(x)) = 0$$

risolvendo in termini di v otteniamo:

$$\frac{v''(x)}{v'(x)} = -2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} - p(x)$$

$$\ln|v'| = -2\ln|y_1(x)| - \int p(x)\,dx + C$$

$$v'(x) = D|y_1(x)|^{-2}e^{-\int p(x)\,dx}$$

Ed infine, integrando ancora una volta ambo i membri e prendendo $D = 1$ otteniamo:

$$v(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{[y_1(x)]^2}\,dx \tag{2.15}$$

Esempio 2.7. *Trovare una soluzione generale di:*

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0,\ x > 0. \tag{2.16}$$

L'equazione è della forma $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$, quindi $x = 0$ è un punto singolare regolare. Dal fatto che $xp(x) = x(1/x) = 1$ e $x^2q(x) = x^2$, si ha che $A_0 = 1$, $B_0 = 0$, quindi l'equazione indiciale diventa:

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda = \lambda^2 - \lambda + \lambda = \lambda^2 = 0$$

quindi $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Quindi c'è una soluzione della forma:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Sostituendola nell'equazione (2.16) troviamo:

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Unificando le tre serie si ottiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

In questo modo otteniamo:

$$a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n(n-1)a_n + n a_n + a_{n-2}) x^n = 0$$

Uguagliando i coefficienti a zero otteniamo la formula ricorsiva:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0; \\ a_n &= -\frac{1}{n^2} a_{n-2} \end{aligned}$$

Quindi scegliendo $a_0 = 1$ una soluzione è $y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \ldots$. Usiamo la formula (2.15) per determinare una seconda soluzione linenarmente indipendente:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int 1/x\,dx}}{\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \ldots\right)^2}\,dx$$

Svolgendo l'integrale al numeratore otteniamo:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{x^{-1}}{\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \dots\right)^2} dx$$

Svolgendo il quadrato al denominatore otteniamo:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{x^{-1}}{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{32} + \dots\right)} dx$$

Dopo aver fatto la divisione di polinomi e risolvendo l'integrale otteniamo:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{x^{-1}}{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{32} + \dots\right)} dx = y_1(x) \int \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{32} + \dots\right) dx =$$

$$y_1(x) \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{5x^3}{32} + \dots\right) dx = y_1(x)\left(\ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \dots\right)$$

Notiamo che con questo metodo alternativo per trovare una seconda soluzione linearmente indipendente, si ottiene una soluzione della forma che si era trovata nel terzo caso del Teorema.
Una soluzione generale dell'equazione (2.16) è $y_(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, con c_1, c_2 costanti arbitrarie.

3 Applicazioni:

Il metodo di Frobenius è un metodo utile per risolvere alcune equazioni differenziali che compaiono spesso nelle applicazioni. Una di queste è l'equazione di Bessel di ordine p, che è una equazione differenziale della forma:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \tag{3.1}$$

dove p è una costante.
Vediamo come l'equazione di Bessel appare nella soluzione di problemi specifici.
Supponiamo di sapere la distribuzione della temperatura in un cilindro al tempo $t = 0$, allora si ha che la temperatura $u = u(r, \theta, t)$ nel punto (r, θ) in ogni istante t soddisfa la seguente equazione differenziale alle derivate parziali in coordinate polari:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \frac{1}{k}u_t.$$

In questo caso abbiamo supposto che la temperatura sia indipendente dall'altezza del cilindro, la quantità k nell'equazione è una costante che dipende dalla conduttività termica e, in generale, dal materiale usato nel costruire il cilindro. Usiamo il metodo della separazione di variabili per risolvere l'equazione. Seguendo questo metodo supponiamo che esista una soluzione $u(r, \theta, t)$ dell'equazione che sia il prodotto di una funzione di r, di una funzione di θ e di una funzione di t. Cioè:

$$u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t),$$

Dove R, Θ, T sono funzioni incognite. Sostituendo u in (3), otteniamo:

$$R''\Theta T + \frac{1}{r}R'\Theta T + \frac{1}{r^2}R\Theta'' T = \frac{1}{k}R\Theta T'.$$

Possiamo scrivere l'equazione nel modo seguente:

$$r^2 R'' R + rR'R - r^2 kT'T = -\Theta''\Theta.$$

Il primo membro è una funzione indipendente dalla variabile θ mentre il secondo membro è una funzione della sola θ. Quindi devono essere entrambi uguali ad una costante che chiameremo p^2. Quindi otteniamo le equazioni:

$$\Theta'' + p^2\Theta = 0 \tag{3.2}$$

e

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} - r^2 k\frac{T'}{T} = p^2$$

oppure in maniera analoga:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} - \frac{p^2}{r^2} = \frac{1}{k}\frac{T'}{T}. \tag{3.3}$$

Ora il primo membro dell'equazione (3.3) è una funzione solo di r, mentre il secondo membro è una equazione solo di t, quindi ambo i membri devono essere uguali a una costante, che chiameremo $-\lambda^2$. Così otteniamo:

$$T' + \lambda^2 kT = 0 \tag{3.4}$$

e

$$r^2R'' + rR' + (\lambda^2r^2 - p^2)R = 0. \tag{3.5}$$

Le funzioni $\Theta(\theta)$ e $T(t)$ si trovano risolvendo le semplici equazioni differenziali (3.2) e (3.4). Per trovare $R(r)$ bisogna risolvere (3.5), che, come si vede, è un'equazione di Bessel. Facciamo la trasformazione $x = \lambda r$ e poniamo $y(x) = R(r)$, otteniamo:

$$R' = \frac{dR}{dx}\cdot\frac{dx}{dr} = \lambda y' = \frac{x}{r}y' \ \ e \ \ R'' = \frac{d}{dx}(\lambda y')\frac{dx}{dr} = \lambda^2 y'' = \frac{x^2}{r^2}y''.$$

Sostituendo R' e R'' in (3.5 troviamo l'equazione di Bessel (3.1), che ora risolveremo in un intorno del punto $x = 0$. Supponiamo per semplicità che $p \geq 0$, si ha che:

$$\alpha(x) = x^2, \ \beta(x) = x, \ \gamma(x) = x^2 - p^2.$$

Poichè $\alpha(0) = 0$ si ha che $x = 0$ è un punto singolare. Ma

$$x\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 \ e \ x^2\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = -p^2 + x^2,$$

Così $x = 0$ è un punto singolare regolare con equazione indiciale $\lambda^2 - p^2 = 0$. Le due soluzioni dell'equazione indiciale sono $\lambda_1 = p$, $\lambda_2 = -p$, quindi una soluzione dell'equazione di Bessel è della forma:

$$y_1(x) = |x|^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3.6}$$

le soluzioni di (3.1) hanno senso per $|x| > 0$, cioè per $x > 0$, $x < 0$. La seconda soluzione dipende dal valore di $\lambda_1 - \lambda_2 = 2p$, è data da:

Caso 1. Se $2p \neq$ intero, allora $y_2(x) = |x|^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$;

Caso 2. Se $p = 0$ allora

$$y_2(x) = y_1(x) \ln|x| + |x|^p \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n; \tag{3.7}$$

Caso 3. Se $2p =$ intero positivo, allora

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln|x| + |x|^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \tag{3.8}$$

Calcoliamo i coefficienti a_n, abbiamo $x > 0$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p},\ y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p) a_n x^{n+p-1},$$

e

$$y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1) a_n x^{n+p-2}$$

$$x^2 y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1) a_n x^{n+p}$$

$$x y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p) a_n x^{n+p}$$

$$x^2 y_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p}$$

$$-p^2 y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -p^2 a_n x^{n+p}$$

$$[p(p-1)a_0 + pa_0 - p^2 a_0] x^p + [(1+p)pa_1 + (1+p)a_1 - p^2 a_1] x^{1+p} +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} [(n+p)(n+p-1)a_n + (n+p)a_n + a_{n-2} - p^2 a_n)] x^{n+p}$$

Questo implica

$$(1+2p)a_1 = 0 \text{ e}$$
$$n(n+2p)a_n + a_{n-2} = 0 \ n = 2, 3, \ldots$$

Quindi otteniamo

$$a_1 = 0 \text{ e} a_n = -\frac{1}{n(n+2p)} a_{n-2} \ n = 2, 3, \ldots$$

Questo implica:

$$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0 \text{ e}$$
$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n} n!(p+1)(p+2)\cdots(p+n)} a_0 \; n = 2, 3, \ldots$$

Quindi la soluzione è data da:

$$y_1(x) = a_0 |x|^p \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(p+1)(p+2)\cdots(p+n)} x^{2n} \right]$$

e la serie converge per ogni x.
Se $2p \neq$ intero una seconda soluzione linearmente indipendente può essere trovata se sostituiamo $-p$ con p nell'equazione precedente, cioè:

$$y_1(x) = a_0 |x|^{-p} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(p+1)(p+2)\cdots(p+n)} x^{2n} \right]$$

e la serie converge per $x > 0$ o $x < 0$.
Nella teoria delle funzioni di Bessel la costante a_0 si prende uguale a

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$$

Dove Γ è la funzione gamma cioè la funzione definita dall'integrale:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} \, dx$$

Con questa scelta di $a_0$la soluzione y_1 è detta la funzione di Bessel del primo tipo di ordine p ed si indica con $J_p(x)$. Se usiamo l'identità

$$\Gamma(n+p+1) = (n+p)(n+p-1)\cdots(p+2)(p+1)\Gamma(p+1)$$

si ottiene la formula

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

la soluzione y_2 con a_0 definito da:

$$a_0 = \frac{1}{2^{-p}\Gamma(-p+1)}$$

è una soluzione di Bessel del primo tipo di ordine $-p$ e si denota con $J_{-p}(x)$, chiaramente

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$$

Allora $j_p(x)$ è sempre una soluzione dell'equazione di Bessel. Inoltre quando $2p$ non è un intero le funzioni $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione di Bessel. Se $p = 0$ e osservando che $\Gamma(n+1) = n!$, otteniamo:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

La funzione $J_0(x)$ è una soluzione dell'equazione di Bessel con $p = 0$.
Quando $p = 0$ oppure quando $2p$ è un intero positivo la seconda soluzione linearmente indipendente è della forma 3.7 oppure 3.8 rispettivamente e può essere ottenuta con una sostituzione diretta nell'equazione. Una tale soluzione con una appropriata scelta della costante b_0 è detta funzione di Bessel del secondo tipo.