

Lezioni del 28 novembre 2002 e del 2 dicembre 2002

1. Dimostrare che

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x + 2iy = iz - 3x \right\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^3$ e calcolarne una base

2. Dire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono o meno dei sottospazi vettoriali

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1 \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid e^{x+2y+z} = 1 \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (x-y)(x+y+z) = 0 \right\}$$

3. Dimostrare che l'insieme

$$\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ è simmetrica}\}$$

è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione (ripetere l'esercizio per le matrici antisimmetriche)

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; e $L_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ applicazione lineare definita

da $L_A(X) = AX$ Calcolare $Im(L_A)$ e $Ker(L_A)$ e determinare la proiezione ortogonale su $Ker L_A$.

DEFINIZIONE Data $\{w_1, \dots, w_m\}$ base ortogonale di W sottospazio vettoriale di V , si definisce **proiezione ortogonale di V su W** l'applicazione lineare $p_W : V \rightarrow V$ tale che

$$p_W(v) = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \dots + \frac{\langle v, w_m \rangle}{\langle w_m, w_m \rangle} w_m$$

5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineare definita dalle condizioni:

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) è ben definita?

(b) se si determina $f(w)$ con $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la dimensione del nucleo e dell'immagine e dire se è iniettiva.

6. Sia $\mathfrak{B} = \{i, j, k\}$ una base ortonormale positivamente orientata di $\mathcal{V}$, $v_0 = 2j - i$ e sia $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ definito da

$$L(v) = v \wedge v_0 - v;$$

(a) descrivere $\text{Ker} L$ e $\text{Im} L$;

(b) determinare $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$, e $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{D}}(f)$, essendo $\mathfrak{D} = \{i, j + k, k\}$.