**Lezione del 10 dicembre 2002**

1. Trovare $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{B}}(T)$ con $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ , $T \in End(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}))$ definito da
$$T(A) = {}^tA$$
nei casi
(a) $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}$ base canonica
(b) $\mathfrak{D}$ base canonica e $\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineari individuate da
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ -y \\ 3x+y \end{pmatrix}$$
$g(e_1 - e_3) = -e_3, g(2e_1 + e_2) = e_1 + 5e_2 - 5e_3, g(e_2 + e_3) = e_1 + 2e_2 - e_3$ con $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica.
Scrivere la matrice di $g \cdot f$ rispetto alle basi canoniche.

3. Sia $f \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ suriettiva, provare che esiste $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ tale $f \cdot g = Id_{\mathbb{R}^3}$.

4. Si consideri la scomposizione di $\mathbb{R}(n)$ come somma diretta del sottospazio delle matrici simmetriche $S(n)$ con il sottospazio delle matrici antisimmetriche$A(n)$.Trovare le matrici delle due proiezioni rispetto alle basi canoniche.

5. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ definito da
$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
Determinare $A \in \mathbb{R}(3)$ tale che $L_A = f$

**Soluzioni**

1. (a) $\mathcal{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e quindi la traccia di $T$ è 2.

(b) $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\mathcal{M}(g\cdot f)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 12 & 4\\ -9 & -5\end{pmatrix}$

3. Basta prendere una base di $\mathbb{R}^4$ data da $\{v_i\}$ dove $v_1\in Ker(f)$. Dico che $w_i=f(v_i)$ con $i=2,3,4$ è una base di $Im(f)$. Infatti : $a_2w_2+a_3w_3+a_4w_4=a_2f(v_2)+a_3f(v_3)+a_4f(v_4)=f(a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4)=0$ se e solo se $a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4\in Ker(f)$ se e solo $a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4=a_1v_1$ se e solo se $a_i=0$ per ogni $i$ (perchè $v_i$ è una base). Quindi definisco $g(w_i)=v_i$ (ben definita perchè lo e su una base). e g verifica la richiesta in quanto $f(g(w_i))=f(v_i)=w_i$ per ogni $i=2,3,4$.

4. La decomposizione in somma diretta si scrive nel seguente modo:
$$\sum_{i,j}a_{ij}E_{ij}=\sum_i a_iiE_{ii}+\frac{1}{2}\sum_{i<j}a_{ij}(S_{ij}+A_{ij})-\frac{1}{2}\sum_{i<j}a_{ji}(S_{ij}-A_{ij})$$
dove

   $\{E_{ij}\}$ è la base canonica di $R(n)$

   $\{S_{ii},S_{ij}\}_{i<j}=\{E_{ii},(E_{ij}-E_{ji})_{i<j}\}$ è la base di $S(n)$ e

   $\{A_{ij}\}_{i<j}=\{(E_{ij}+E_{ji})_{i<j}\}$ è la base di $A(n)$.

   Per semplicità facciamo il caso $n=2\quad \dim S(2)=3\quad \dim A(2)=1$

$$\mathcal{M}(p_{S(2)})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ e } \mathcal{M}(p_{A(2)})=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

5. $A=\mathcal{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{C}}(f)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$