Limiti, derivate, integrali

Alberto Dolcetti

May 29, 2015

Note delle lezioni sugli argomenti indicati. Versione provvisoria. Sono gradite osservazioni e correzioni.

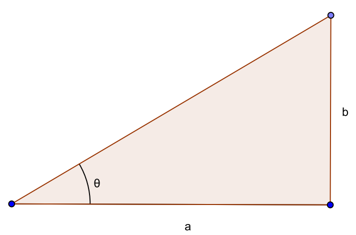
1 La pendenza

L'idea spesso intuitiva di *pendenza* viene utilizzata in contesti quotidiani, ad esempio per la pendenza di una strada.

In tal caso la *variazione nella distanza verticale associata ad una data variazione nella distanza orizzontale* fornisce una misura della pendenza della strada e può essere espressa come un rapporto:

$$Pendenza = \frac{variazione\ nella\ distanza\ verticale}{variazione\ nella\ distanza\ orizzontale} = \frac{b}{a}$$

come esemplificato dalla figura



Chi ha un minimo di confidenza con le funzioni trigonometriche può riconoscere facilmente che la pendenza in questione non è altro che la tangente dell'angolo θ: $\tan(\theta) = b/a$.

Così una strada ha una pendenza di 1 a 5, se ogni 5 metri percorsi in direzione orizzontale, l'altezza della strada sul livello del mare aumenta di 1 metro: si tratta dell'angolo la cui tangente misura $1/5 = 0,20$ e si dice che la strada ha una pendenza del 20%.

Le definizione si adatta al caso di una funzione descritta da un'equazione esplicita $y = f(x)$. In tal caso si parla più propriamente *rapporto incrementale* e, a differenza della pendenza, definta prima, può essere sia positivo che negativo.

Definizione 1.1. Il rapporto incrementale di una funzione f tra due valori del suo dominio $x_0 \neq x_1$ è definito come il rapporto fra $f(x_1) - f(x_0)$ (la variazione dei valori assunti dalla funzione f su x_0 ed x_1) e la variazione (nello stesso ordine) della variabile dipendente $x_1 - x_0$:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ossia come il rapporto fra la variazione della variabile dipendente e la corrispondente variazione della variabile dipendente.

Osservazione 1.2. Ponendo poi $x_1 - x_0 = h$ e quindi $x_1 = x_0 + h$ il rapporto incrementale si può scrivere come

$$R_f(x_0, h) := \frac{\Delta f}{\Delta x}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

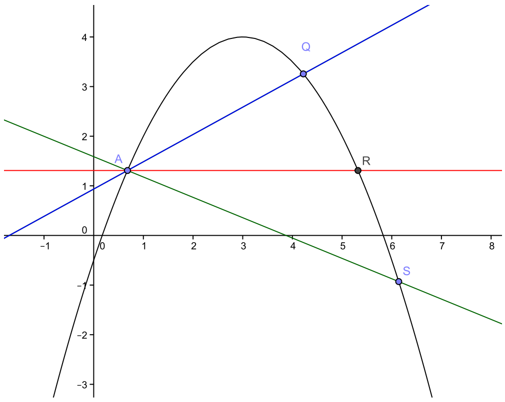
Si noti che h può essere sia positivo che negativo.

Osservazione 1.3. Sia f una funzione e siano $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ due valori del dominio di f. Allora il coefficiente angolare dell'equazione cartesiana esplicita della retta che unisce i punti di coordinate $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ coincide con il rapporto incrementale della funzione $f(x)$ fra gli stessi estremi.

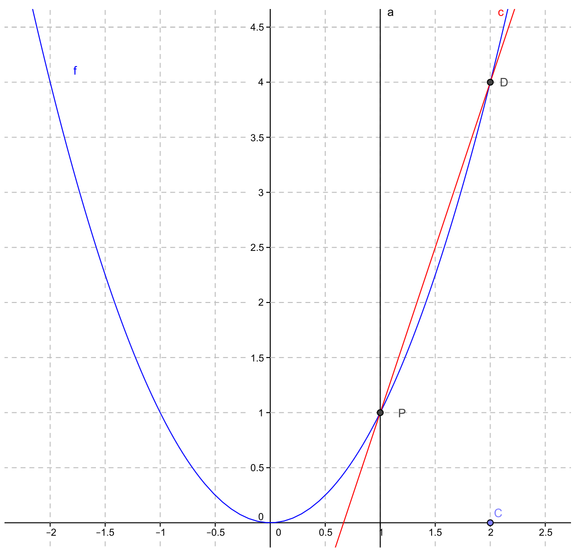
Per verificarlo (fare!) occorre scrivere esplicitamente l'equazione cartesiana esplicita della retta in questione.

In particolare assumendo $x_0 < x_1$ se tale rapporto è positivo, nullo o negativo, allora rispettivamente si ha $f(x_0) < f(x_1)$, $f(x_0) = f(x_1)$ o $f(x_0) > f(x_1)$.

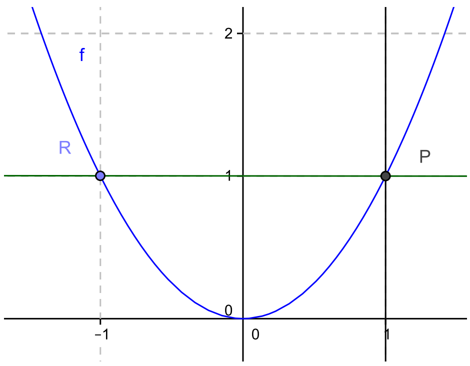
La situazione è visualizzata nella seguente figura



Esempio 1.4. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ e calcoliamo il rapporti incrementale da $x_0 = 1$ a $x_1 = 2$: si verifica facilmente che in tal caso $\dfrac{2^2 - 1^2}{2 - 1} = 3$. Si può notare che la retta che unisce i punti P, Q ha stessa pendenza del (valore assoluto) del rapporto incrementale in questione e rappresenta una sorta di "pendenza media" della funzione $f(x)$ fra x_0 e x_1 e che, quindi, più i valori x_1 e x_0 sono "vicini" (equivalentemente h è "vicino" a 0) più la retta che unisce il punti di coordinate $(x_0, f(x_0)$ e $(x_1, f(x_1)$ "approssima" (ed ha la stessa pendenza) della funzione $f(x)$ nello stesso intervallo.



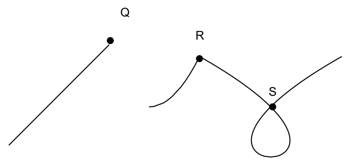
Al contrario può accadere che allontanandosi i valori x_0, x_1 il rapporto incrementale non fornisca informazioni sull'andamento della funzione f nello stesso intervallo. Infatti il rapporto incrementale dipende solo dagli estremi x_0, x_1 e dal valore assunto da f su di essi non dall'andamento di f negli altri punti dell'intervallo stesso.



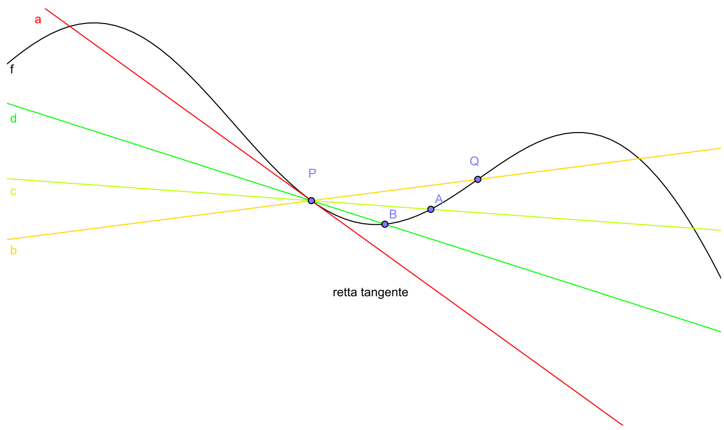
La figura precedente mostra come il rapporto incrementale di $f(x) = x^2$ fra -1 e 1 sia uguale a 0 (verificare!) e che quindi la retta che esprime la pendenza media fra i corrispondenti punti della parabola sia una retta parallela all'asse delle ascisse, mentre nello stesso intervallo la funzione $f(x) = x^2$ è ampiamente lontana dall'essere constante.

Per approfondire più precisamente, la variazione di $f(x)$ rispetto a quella di x, e per vedere come una retta "approssima" i grafico di una funzione attorno ad un suo punto introduciamo il concetto di *derivata* di una funzione, basato, a sua volta, sul concetto di *tangente* e di *limite*.

Osservazione 1.5. Consideriamo una curva del piano (non necessariamente grafico di una funzione) ed un suo punto P. Allora, se la curva è "liscia" in P, ossia se si escludono i casi in qui la curva abbia nel punto delle "singolarità" come un punto di discontinuità o un punto "a cuspide" o un punto "multiplo" come accade nei punti Q, R, S in figura



esiste una retta che meglio di tutte le altre "approssima" l'andamento della curva in corrispondenza dei punti di essa prossimi a P. Tale retta è detta *retta tangente alla curva nel punto* P. In generale tale retta in prossimità di P ha in comune con la curva il solo punto P, altre intersezioni, anche se ce ne sono, possono essere solo altrove. Tale retta può essere pensata come la posizione limite che assume una secante alla curva nel puntom P ed in un ulteriore punto quando quest'ultimo "tende" a P.



2 Limiti e continuità

Osservazione 2.1. Richiameremo solo alcuni degli aspetti fondamentali del concetto di limite e solo relativamente al caso di limiti finiti, quando la variabile dipendente tende ad un valore finito x_0 che può anche non appartenere al dominio, ma che ha la proprietà che ogni intervallo che ha centro in x_0 contiene dei punti del dominio di $f(x)$ diversi da x_0, proprietà che si indica dicendo che x_0 è un *punto di accumulazione* per il dominio di $f(x)$. Tale proprietà si può (metaforicamente) evocare in questo modo: comunque ci si avvicini a x_0 (senza raggiungerlo) c'è sempre almeno un punto del dominio della funzione più vicino ad x_0. Se il dominio della funzione è un intervallo ed x_0 vi appartiene, allora x_0 è un punto di accumulazione per il dominio di f.

Definizione 2.2. Sia $f(x)$ una funzione a valori reali e di di variabile reale e sia x_0 un punto di accumulazione per il dominio di f.
Si dice che un numero $l \in \mathbf{R}$ è il limite di $f(x)$ per x tendente ad x_0 e se la distanza fra $f(x)$ ed l è arbitrariamente piccola quando x si avvicina a x_0.
In tal caso si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \text{o anche} \quad f(x) \stackrel{x \to x_0}{\longrightarrow} l$$

Osservazione 2.3. La distanza fra i punti è misurata usando il valore assoluto della differenza: quindi $|x - x_0|$ è la distanza fra x e x_0 e $|f(x) - l|$ è la distanza fra $f(x)$ ed l.
Si può quindi concludere, con maggiore precisione formale, che

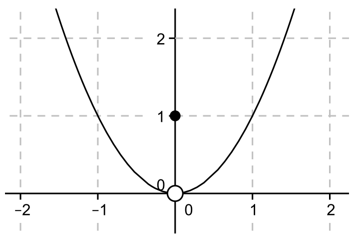
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

equivale alla proprietà:
per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un numero reale $\delta > 0$ (dipendente da ε) tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni x nel dominio di definizione di f con $0 < |x - x_0| < \delta$
scritta anche come
per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un numero reale $\delta > 0$ (dipendente da ε) tale che

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Inoltre se anche x_0 appartiene al dominio di f e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, allora f si dice continua in x_0.

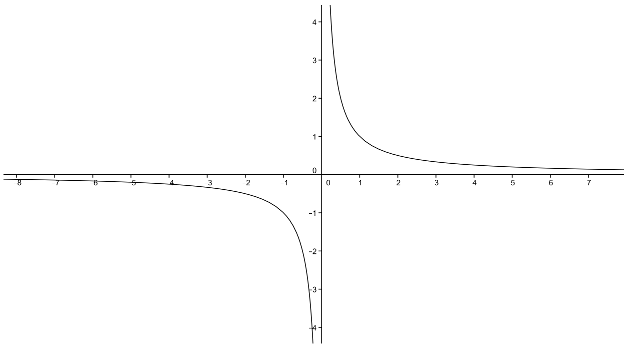
Esempio 2.4. Sia f la funzione definita su tutto $\mathbf{R}$ da $f(x) = x^2$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 1$.



La funzione risulta discontinua in 0 dove ha limite 0 diverso dal valore assunto da f nel punto 0 $f(0) = 1$, infatti su tutti i valori non nulli si ha $f(x) = x^2$ e quindi il limite di f per x tendente a 0 è 0.
Altrove invece la funzione è continua: per $x_0 \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2 = f(x_0)$

Osservazione 2.5. Mettiamo in evidenza che il limite di una funzione in un punto non dipende dal valore assunto dalla funzione nel punto stesso (dove potrebbe anche non essere definita), ma dall'andamento della funzione nell'intorno del punto: quella di limite è una nozione di carattere locale e non puntuale.

Esempio 2.6. Non sempre esiste ed è finito il limite di una funzione.
Ad esempio $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (il cui grafico è l'iperbole equilatera) ha in $x = 0$ un punto si accumulazione per il suo dominio ma in corrispondenza ad esso non ha limite. meglio si potrebbe dimostrare (formalizzando i relativi concetti) che f tende a $+\infty$ quando x tende a 0 da "destra" (ossia per valori positivi) e che f tende a $-\infty$ quando x tende a 0 da "sinistra" (ossia per valori negativi).



3 Derivata

Osservazione 3.1. Utilizzando il concetto di tangente e di limite possiamo ora definire la derivata di una funzione. Consideriamo una funzione reale di variabile reale f e sia x_0 un punto d'accumulazione del suo dominio. Abbiamo definito il rapporto incrementale
$R_f(x_0, h) := \dfrac{\Delta f}{\Delta x}(h) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ (scritto anche come $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$).
Fissato x_0, $R_f(x_0, h)$ è una funzione che ha in 0 un punto d'accumulazione quindi ha senso chiedersi se esista e sia finito $\lim_{h\to 0} R_f(x_0, h)$ che può scriversi come $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ e anche come $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

Definizione 3.2. Siano f una funzione reale di variabile reale ed x_0 un punto d'accumulazione del suo dominio. Si dice che f è derivabile in x_0 se esiste ed è finito il limite del suo rapporto incrementale nel punto x_0, ossia se esiste $l \in \mathbf{R}$ tale che

$$\lim_{h\to 0} R_f(x_0, h) = l$$

scritto anche come $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = l$.
Tale valore l si chiama derivata di f nel punto x_0 e si trova indicata con una pluralità di simboli, indice della complessità della storia di tale nozione:

$$\frac{df}{dx}(x_0), \quad f'(x_0), \quad \dot{f}(x_0)$$

e numerose altre.

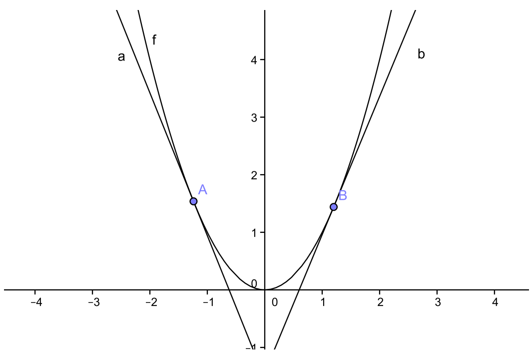
Osservazione 3.3. Come succede in generale per i limiti, non necessariamente la derivata esiste, ma quando esiste essa è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto x_0.

La situazione in cui la derivata esiste in tutti i punti del dominio di f risulta interessante: infatti in questo caso è possibile definire una nuova funzione che associa ad ogni $x \in Dom(f)$ il valore $f'(x)$ e tale funzione si chiama funzione derivata prima di f. Se poi anche f' risulta derivabile, possiamo derivarla a sua volta ottenendo la derivata seconda $f''(x)$ e così via.

Si può dimostrare che se una funzione f è derivabile in un punto appartenente al suo dominio, allora essa è continua in quel punto e quindi se è derivabile in un intervallo contenuto nel suo dominio, allora essa continua in nell'intervallo.

Ricordando inoltre che la derivata è il coefficiente angolare della retta tangente, si può dimostrare il seguente

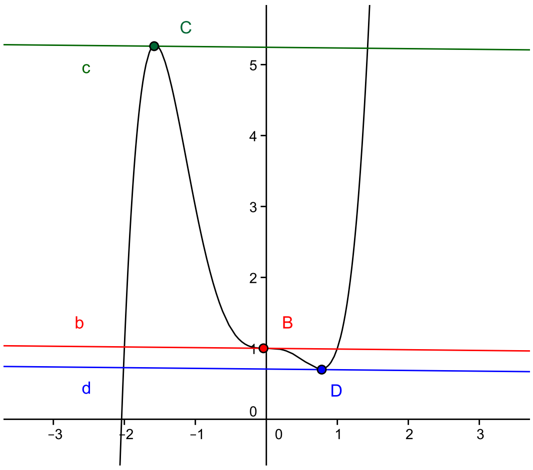
Proposizione 3.4. Sia f una funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$. Se $f'(x) > 0$ (risp. $f'(x) < 0$) in tutto $[a, b]$, allora f è crescente (risp. decrescente) in tutto $[a, b]$.



Nella figura precedente è rappresentata una funzione decrescente in $]-\infty, 0]$ e crescente in $[0, +\infty[$.

Osservazione 3.5. I punti x_0 del dominio di una funzione f, in cui la derivata prima si annulla, presentano un certo interesse. Supponiamo $x_0 \in [a, b]$ e $[a, b]$ incluso nel dominio di f, e supponiamo che x_0 sia l'unico punto di $[a, b]$ in cui la derivata di f si annulla. Possono presentarsi diversi casi come nell'esempio seguente

Guardiamo ai punti B, C e D in figura e restringiamo il dominio di definizione



della funzione a tre intervalli sufficientemente piccoli attorno a tali punti. In corrispondenza a C la funzione ha derivata prima positiva prima di tale punto, nulla in tale punto e negativa dopo, ossia f è crescente prima di C e decrescente dopo ed ha in C un punto di massimo. Invece in corrispondenza a D la funzione ha derivata prima negativa prima di tale punto, nulla in tale punto e positiva dopo, ossia f è decrescente prima di D e decrescente dopo ed ha in C un punto di minimo.

Quanto accade in C e D, accade anche in ogni punto di massimo e di minimo relativi (detti genericamente punti estremali). Tuttavia l'annullarsi della derivata prima è condizione solo necessaria ma non sufficiente affiné in quel punto la funzione abbia massimo o minimo. Ad esempio nel punto C la derivata è nulla senza che il punto sia estremale, (ma un punto di flesso della funzione): in esso la funzione risulta decrescente: ciò che succcede è che la decrescita rallenta avvicinandosi a al punto per valori più piccoli del punto fino ad annullarsi nel punto ma per poi riprendere immediatamente dopo. In definitiva vale la

Proposizione 3.6. Se f è una funzione definita in un intervallo $[a, b]$ derivabile in esso con derivata (prima) definita e continua in $[a, b]$ e se un punto $x_0 \in]a, b[$ è un punto estremale (ossia di massimo relativo o di minimo relativo) per f, allora $f'(x_0) = 0$.

Il viceversa è falso: ossia possono esistere punti su cui la derivata prima si annulla senza che questi siano estremali

Osservazione 3.7. La ricerca dei massimi e dei minimi è un interessante campo di studio della matematica e delle scienze che usano metodi e modelli matematici. Se f è una funzione definita in un intervallo $[a, b]$ derivabile in esso con derivata (prima) definita e continua in $[a, b]$ e se un punto $x_0 \in]a, b[$, l'insieme $\{x \in]a, b[\ / \ f'(x) = 0\}$ contiene i punti estremali, pur potendo contenere ulteriori punti. Un'analisi della positività e della negatività della derivata prima di f in un intorno sufficientemente di x_0 consente di distinguere massimi, minimi e gli eventuali ulteriori punti. In generale i punti in cui la derivata prima si annulla si dicono punti critici o stazionari.

Il seguente risultato consente invece di distinguere tra i vari tipi di punti almeno per funzioni per cui è definita e continua anche la derivata seconda:

Proposizione 3.8. Se f è una funzione definita in un intervallo $[a, b]$ derivabile in esso con derivate prima e seconda definite e continue in $[a, b]$ e sia $x_0 \in]a, b[$ un punto con $f'(x_0) = 0$.

Se $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo. Se $f''(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di flesso. Se $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo.

Osservazione 3.9. La prima e l'ultima condizione della proposizione precedente hanno delle importanti interpretazioni geometriche: infatti il primo caso comporta che la parte di piano sopra il grafico della funzione sia convessa, mentre invece la terza implica che lo sia la parte di pian sotto il grafico della funzione, come succede ad esempio per le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$.

4 Alcuni calcoli espliciti sulle derivate

- Sia f una funzione costante: $f(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ costante fissata e definita su tutto l'insieme dei numeri reali. Allora $f'(x) = 0$ (funzione identicamemte nulla).

  Infatti il rapporto incrementale è
  $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{c - c}{x_1 - x_0} = \dfrac{c}{x_1 - x_0} = 0.$

- Sia $f(x) = x$. Allora $f'(x) = 1$.
  Infatti $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = 1.$

- (Additività) Se f e g sono funzioni derivabili nello stesso punto, allora

  $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$.

  Infatti il rapporto incrementale della funzione somma si scrive come

$$\frac{(f(x_1)+g(x_1)-(f(x_0)+g(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)+g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} + \frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0} \stackrel{x_1\to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)+g'(x_0).$$

- (Omogeneità) Sia f derivabile e $c \in \mathcal{R}$ una costante. Allora $[cf]'(x) = cf'(x)$.

  Infatti $\dfrac{cf(x_1)-cf(x_0)}{x_1-x_0} = c\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \stackrel{x_1\to x_0}{\longrightarrow} cf'(x_0)$.

- Se $f(x) = mx+q$ con m, q costanti reali, allora $f'(x) = m$.

  Segue dalle precedenti proprietà di additività e di omogeneità e dal fatto che la derivata di $g(x) = x$ è $g'(x) = 1$.

- Sia $f(x) = x^2$. Allora $f'(x) = 2x$.

  Infatti $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \dfrac{x_1^2-x_0^2}{x_1-x_0} = \frac{(x_1-x_0)(x_1-x_0)}{x_1-x_0} = x_1+x_0 \stackrel{x_1\to x_0}{\longrightarrow} 2x_0$.

- Per ogni $n \geq 1$ se $f(x) = x^n$, allora $f'(x) = x^{n-1}$.

  Si facciano per esercizio i casi $n = 3$ e $n = 4$. Il caso generale segue in modo analogo utilizzando l'identità:

  $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

  applicata al rapporto incrementale della funzione (esercizio).

- (Regola di Leibniz) Se f e g sono funzioni derivabili nello stesso punto, allora $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

  Infatti

$$\frac{f(x_1)g(x_1)-f(x_0)g(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)g(x_1)-f(x_0)g(x_1)+f(x_0)g(x_1)-f(x_0)g(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)g(x_1)-f(x_0)g(x_1)}{x_1-x_0} + \frac{f(x_0)g(x_1)-f(x_0)g(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}g(x_1)+f(x_0)\frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0} \stackrel{x_1\to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

La regola di Leibniz consente di ottenere nuovamente $F'(x) = nx^{n-1}$ per $F(x) = x^n$ per induzione su n scrivendo $F(x) = x^n = f(x)g(x)$ con $f(x) = x$ e $g(x) = x^{n-1}$ (esercizio).

- Nei punti in cui f è derivabile e non nulla: $[\frac{1}{f(x)}]' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$.

  Infatti il rapporto incrementale diventa

$$\frac{\frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{f(x_0)-f(x_1)}{f(x_1)f(x_0)}}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{f(x_1)f(x_0)} \frac{1}{x_1 - x_0} =$$
$$- \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0} \frac{1}{f(x_1)f(x_0)} \xrightarrow{x_1 \to x_0} -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

  In particolare se $f(x) = \frac{1}{x}$, allora $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Si provi a ricavare direttamente questa formula mediante il limite del rapporto incrementale (esercizio) ed analogamente si faccia con $\frac{1}{x^2}$ e con $\frac{1}{x^3}$.

- Se f e g sono funzioni derivabili nello stesso punto, allora $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ dove g è non nulla: $[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

  Infatti si può applicare la regola di Leibniz e la formula precedente alle funzioni $f(x)$ e $\frac{1}{g(x)}$ (esercizio).

- Non si deve confondere la funzione reciproca di $f(x)$ denotata $\frac{1}{f(x)}$ con la funzione inversa di f definita quando f è biunivoca e denotata con f^{-1}. A differenza dell'usuale notazione numerica, in generale fra le funzioni si ha $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

  Per la funzione inversa si ha:

  $[f^{-1}(y)] = \frac{1}{f'(x)}$ con $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$ (senza dimostrazione).

  Questa formula in particolare permette di ottenere la formula della derivata della radice n-esime che è l'inversa della funzione potenza n-esima, quando questa è biunivoca. Questa formula si può unificare con quella della funzione potenza concludendo che

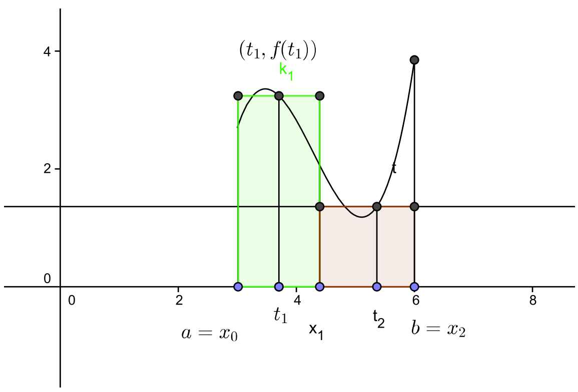
  $f'(x) = mx^{m-1}$ se $f(x) = x^m$ e $m \in \mathbb{Z}$.

- (Regola della catena) Per la composizione di funzioni vale:

  $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$ (senza dimostrazione).

5 Integrale

Osservazione 5.1. Per semplicità ci limitiamo a considerare funzioni continue a valori reali definite su intervalli limitati e chiusi contenuti in $\mathbb{R}$.
Assumiamo anche per ora che tale funzione non assuma valori negativi: $f(x) \geq 0$ per ogni x appartenete al dominio di f.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una tale funzione. Sia $x_1 \in]a, b[$ un punto arbitrario e si ponga $x_0 = a, x_2 = b$: in questo modo l'intevallo $[a, b] = [x_0, x_2]$ è stato suddiviso in due intervalli $[x_0, x_1]$ e $[x_1, x_2]$ o, più sinteticamente, $[x_{s-1}, x_s]$ con $1 \leq s \leq 2$. In ciascun intervallo si sceglie un punto t_s. Si costruisce allora il rettangolo che ha per base l'intervallo $[x_{s-1}, x_s]$ e per altezza $f(t_s)$ l'immagine di t_s tramite f. L'area della figura costituita dai due rettangoli così costruiti è $\sum_{s=1}^{2} f(t_s)(x_s - x_{s-1})$



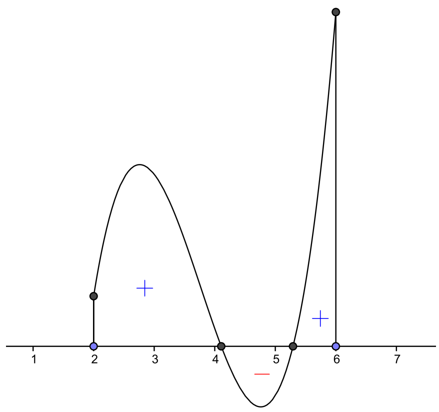
Prendiamo ora delle suddivisioni sempre più fini di $[a, b]$ ovvero scegliamo dei punti $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ facendo diminuire ad ogni passo l'ampiezza di degli intervalli della suddivisione e prendiamo un punto t_s in ogni intervallo $[x_{s-1}, x_s]$ considerando tutti i relativi rettangoli. Si può notare che i lati superiori di tali rettangoli tendono ad approssimare tanto più la funzione quanto più il numero n dei punti diventa grande. Chiamiamo $S_n = \sum_{s=1}^{n} f(t_s)(x_s - x_{s-1})$ l'area del "plurirettangolo" ottenuto. Si potrebbe mostrare che tale area tende all'area della regione compresa fra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse quando la suddivisione si infittisce (ossia quando

$n \to \infty$).
Tale limite si chiama integrale della funzione f nell'intervallo $[a, b]$.
Si potrebbe dimostrare che, quando la funzione f è continua ma può assumere valori negativi, tale limite esiste ancora. Allora si pone la seguente

Definizione 5.2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si chiama integrale di f sull'intervallo $[a, b]$ e si indica con $\int_a^b f(x)dx$ il limite precedente calcolato su tutte le suddivisioni di $[a, b]$ come nell'osservazione precedente,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Osservazione 5.3. Dalla definizione di integrale segue che esso è somma algebrica delle aree delle regioni comprese fra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse e che tali aree sono prese con segno positivo nei tratti in cui la funzione è positiva e negativo quando la funzione è negativa.



In particolare se la funzione è sempre negativa il suo integrale è negativo ed è l'opposto dell'area della regione compresa fra il suo grafico della e l'asse delle ascisse.

6 Primitive

Definizione 6.1. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Una funzione primitiva (o semplicemente una primitiva) di f è una qualsiasi funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

tale che $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, ossia la cui derivata prima coincide con la funzione f in tutto l'intervallo $[a, b]$.

Osservazione 6.2. Non è difficile mostrare che se G è una primitiva di f, allora lo è anche $G(x) + C$, per ogni valore costante $C \in \mathbb{R}$.

Inoltre è possibile mostrare che vale anche il viceversa: se G e G^* sono due qualsiasi primitive di f, allora esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che $G^*(x) = G(x) + C$ in tutto $[a, b]$.

Quindi per conoscere tutte le primitive di f, è sufficiente conoscere una particolare primitiva G: tutte le altre si ottengono allora aggiungendo ad essa tutte le varie costanti reali, ossia se G è una qualsiasi particolare primitiva di f, allora l'insieme di tutte le primitive di f è dato dall'insieme $\{G(x) + C \ / \ C \in \mathbb{R}\}$. Si noti infine che una tabella di derivate, letta al contrario, fornisce una tabella di primitive.

Esempio 6.3. Il caso delle funzioni polinomiali è interessante.

Se $g(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, dove $a_0, a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{R}$ e $a_m \neq 0$ è una funzione polinomiale, allora la sua derivata è:

$g'(x) = m_a m x^{m-1} + (m-1)a_{m-1}x^{m-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$.

Ad esempio se $g(x) = x^3 - x + 5$, allora $g'(x) = 3x^2 - 1$.

Così una primitiva della funzione costante $f(x) = 3$ è $G(x) = 3x$.

Infatti $G'(x) = 3$. Anche la funzione $G^*(x) = 3x - 10$ lo è ed infatti l'insieme di tutte le primitive di $f(x) = 3$ è dato dall'insieme $\{3x + C/C \in \mathbb{R}\}$.

Analogamente una primitiva di $f(x) = x$ è $G(x) = \frac{1}{2}x^2$, perché $G'(x) = x$, ma lo è anche la funzione $G^*(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$, infatti l'insieme di tutte le primitive di $f(x) = x$ è $\{\frac{1}{2}x^2 + C/C \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 6.4. . Mostrare che per ogni intero positivo n una primitiva di $f(x) = x^n$ è $G(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ e che l'insieme di tutte le primitive è $\{\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C/C \in \mathbb{R}\}$.

Svolgere prima i casi $n = 3, 4$ e poi cercare di generalizzare.

Esercizio 6.5. Verificare che una primitiva di $(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ è $G(x) = x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x$.

Esercizio 6.6. Trovare una primitiva del generico polinomio di secondo grado: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Esercizio 6.7. Trovare delle primitive dei seguenti polinomi:
$x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1; \quad x^5 + 3x^4 + \sqrt{2}x^3 + x - \pi; \quad -\frac{1}{5}x^6 - x^3 + x^2 - x + 1.$

Osservazione 6.8. Siamo in grado ora di trovare una primitiva della generica funzione polinomiale $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, dove $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$: essa è allora
$G(X) = \frac{1}{n+1}a_n x^{n*1} + \frac{1}{n}a_{n-1}x^n + \cdots + \frac{1}{3}a_2x^3 + \frac{1}{2}a_1x^2 + a_0x$ (mentre l'insieme di tuttee le primitive è .....).

Abbiamo così dimostrato l'esistenza e descritto tutte le primitive delle funzioni polinomiali. In generale ogni funzione continua su un intervallo $[a, b]$ ammette primitiva: questo è un importante risultato detto *teorema fondamentale del calcolo integrale*, che enunciamo senza dimostrazione.

Teorema 6.9. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione reale continua. Per ogni $x \in [a, b]$ la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

detta funzione integrale di f in $[a, b]$, è derivabile e si ha

$$F'(x) = f(x)$$

per ogni $x \in [a, b]$, ossia F è una primitiva di f in $[a, b]$.

In particolare tutte le primitive di una funzione continua si trovano aggiungendo un'arbitraria costante reale alla funzione integrale.
Le primitive si rivelano particolarmente utili nel calcolo degli integrali. Infatti vale il seguente risultato detto *formula fondamentale del calcolo integrale*, che enunciamo nuovamente senza dimostrazione.

Teorema 6.10. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione reale continua e sia G una qualunque sua primitiva. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

La differenza a secondo membro viene spesso denotata con i simboli $G(x)|_a^b$ oppure con $[G(x)]_a^b$

Osservazione 6.11. Sono utili per i calcoli le seguenti proprietà che ci limitiamo ancora ad enunciare

- (Linearità) Se f e g sono entrambe funzioni continue su $[a, b]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono delle costanti, allora

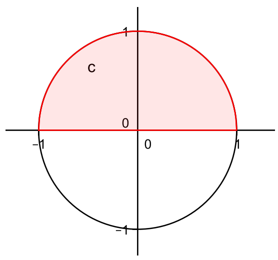
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

- (Additività) Se f è una funzioni continua su $[a, b]$ e $c \in]a, b[$, allora

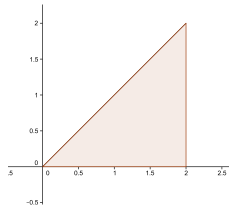
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

7 Alcuni calcoli espliciti sugli integrali

Esempio 7.1. Calcolare $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$.
Si tratta di una funzione di cui non abbiamo studiato la primitiva e quindi non abbiamo gli strumenti per trattarla dal punto di vista del calcolo integrale. Ma in questo caso osserviamo che la curva di equazione $y = \sqrt{1-x^2}dx$ è la metà superiore della circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine infatti elevando al quadrato entrambi i membri si ottiene: $y^2 = 1 - x^2$, ossia $x^2 + y^2 = 1$.



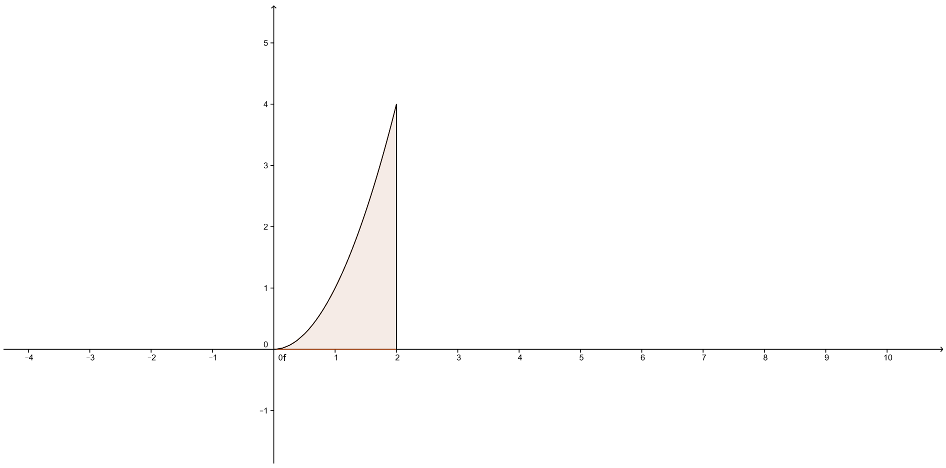
Dato che l'area del cerchio unitario è π, l'integrale in questione è $\frac{\pi}{2}$.
Esempio 7.2. Esempio. Calcolare l'integrale $\int_0^2 xdx$
Si tratta dell'area del sottografico della funzione in figura:
È l'area di un triangolo rettangolo di cateti che misurano 2: ovvero ha area 2.



Calcolando l'integrale area mediante la formula fondamentale del calcolo integrale, dato che un primitiva di $f(x) = x$ è $G(x) = \frac{1}{2}x^2$, si ha $\frac{1}{2}x^2|_0^2 = \frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{2}0^2 = 2$.

Esempio 7.3. Calcolare l'integrale $\int_0^2 x^2 dx$.

Si tratta dell'area del sottografico della funzione in figura:



Una primitiva di $f(x) = x^2$ è $G(x) = \frac{x^3}{3}$ quindi tale integrale vale $\frac{x^3}{3}|_0^2 = \frac{8}{3}$.

Esempio 7.4. Calcolare l'integrale $\int_{-2}^2 x^2 dx$.

Si può procedere come nell'esempio precedente $\int_{-2}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}|_{-2}^2 = \frac{8}{3} - \frac{-8}{3} = \frac{16}{3}$.

Oppure osservare che la funzione $f(x) = x^2$ è pari e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine e quindi il gtafico di f è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Allora: $\int_{-2}^2 x^2 dx = 2\int_0^2 x^2 dx$ e concludere con l'esempio precedente.

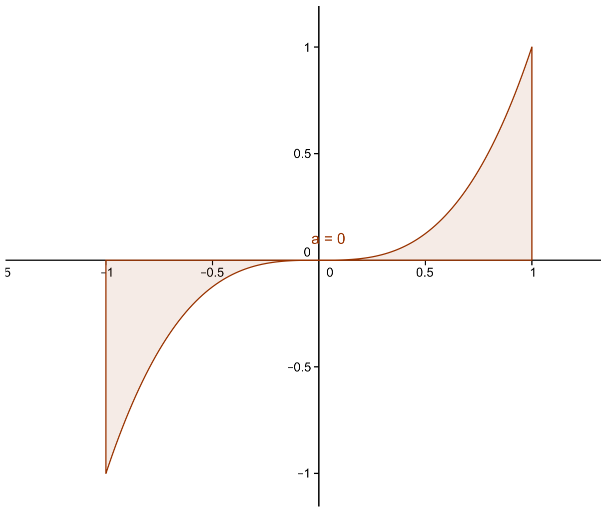
Osservazione 7.5. L'esempio precedente si generalizza come segue: se f è una funzione pari definita su un intervallo $[-a, a]$ simmetrico rispetto all'origine, allora $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ (Perché?)

Esercizio 7.6. Calcolare gli integrali $\int_0^1 x^3 dx$ e $\int_{-1}^1 x^3 dx$.

Una primitiva di x^3 è $\dfrac{x^4}{4}$. Quindi $\int_0^1 x^3 dx = \dfrac{x^4}{4}|_0^1 = \dfrac{1^4}{4} - \dfrac{0^4}{4} = \dfrac{1}{4}$.

Allo stesso modo $\int_{-1}^1 x^3 dx = \dfrac{x^4}{4}|_{-1}^1 = \dfrac{1^4}{4} - \dfrac{(-1)^4}{4} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1^4}{4} = 0$.

In questo secondo caso si poteva dedurre il risultato osservando che la funzione x^3 è dispari e che $[-1, 1]$ è simmetrico rispetto all'origine e quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine. Allora le parti dell'integrale che contribuiscono positivamente sono controbilanciate da quelle che contribuiscono negativamente e viceversa.



Osservazione 7.7. L'esempio precedente si generalizza come segue: se f è una funzione dispari definita su un intervallo $[-a, a]$ simmetrico rispetto all'origine, allora $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ (Perché?)

Esercizio 7.8. Calcolare e confrontare fra di loro gli integrali $\int_0^1 x^n dx$ con $n \geq 1$ numero naturale. Cercare di intuire che cosa succede quando n "tende all'infinito".

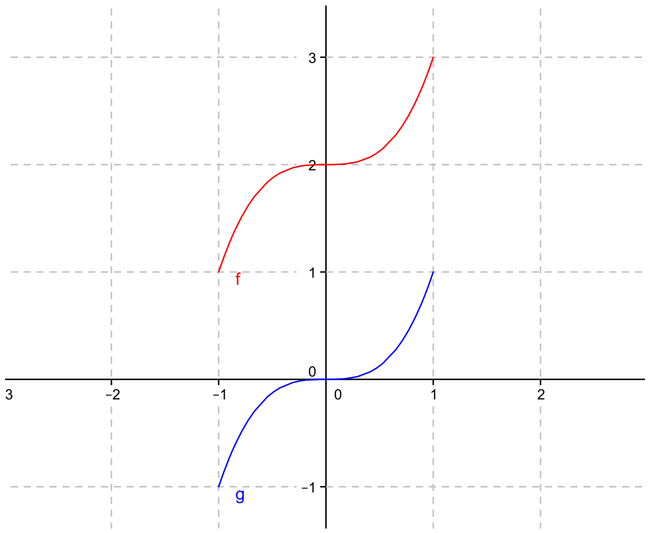
Esercizio 7.9. Calcolare i seguenti integrali

$\int_1^2 (x^3 + \sqrt{5}x^2 - \sqrt{2})dx$; $\int_{-1}^2 (x^4 + \dfrac{3}{5}x^2 - \pi)dx$; $\int_{-2}^{-1} (x^2 + \dfrac{x}{3} - 1)dx$;

$\int_{-100}^{100} (x^{15} + x^{13} + x^3 + x)dx$.

Esercizio 7.10. Tracciare il grafico della funzione $f(x) = x^3 + 2$ nell'intervallo $[-1, 1]$ e calcolare l'integrale .

L'ingrale si può calcolare dalla primitiva $G(x) = \frac{x^4}{4} + 2x$ ottenendo $\frac{1}{4} + 2 - (\frac{1}{4} - 2) = 4$.
Guardiamo alla funzione $f(x) = x^3 + 2$: essa è ottenuta dalla funzione $g(x) = x^3$ sommando sempre 2 ad ogni valore. Quindi il grafico di f si ottiene da quello di g traslando quest'ultimo di 2 parallelamente all'asse y nel verso positivo.
Quindi riportando i due grafici nella stessa figura:

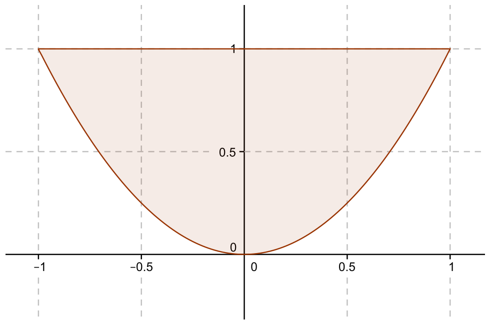


Si noti che l'integrale vale 4, esattamente come l'area del quadrato di lato 2. Come mai? Si suggerisce di provare a confrontare tale grafico con tale quadrato con un lato sull'asse delle ascisse sovrapposto all'intervallo $[-1, 1]$.

Osservazione 7.11. In generale il grafico di una funzione $g(x) + K$ con $K \neq 0$ costante reale si ricava da quello di g traslandolo parallelamente all'asse y e precisamente di K nel verso positivo se $K > 0$ e di $|K|$ nel verso negativo se $K < 0$.
Come esercizio si provi a tracciare i grafici delle funzioni
a) $x^2 + 1$; $x^2 + 2$; $x^2 + 3$; $x^2 - 1$; $x^2 - 2$; $x^2 - 3$;
b) $x^3 + 1$; $x^3 + 2$; $x^3 + 3$; $x^3 - 1$; $x^3 - 2$; $x^3 - 3$;

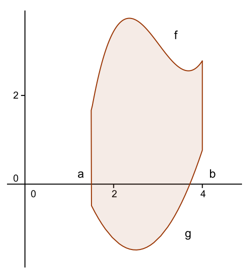
c) $\frac{1}{x}+1$; $\frac{1}{x}+2$; $\frac{1}{x}+3$; $\frac{1}{x}-1$; $\frac{1}{x}-2$; $\frac{1}{x}-3$.

Esempio 7.12. Calcolare l'area della regione piana delimitata come in figura dalla parabola $y = x^2$ e dalla retta $y = 1$.



Si tratta del sottografico della retta $f_1(x) = 1$ nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ a cui è stato tolto il sottografico della parabola $f_2(x) = x^2$ nello stesso intervallo.
Il sottografico della retta è un rettangolo di base 2 ed altezza 1 e quindi ha area 2.
Si noti che allo stesso risultato si arriva calcolando direttamente $\int_{-1}^{1} f_1(x)dx = \int_{-1}^{1} 1(dx = \int_{-1}^{1} dx$. Poiché una primitiva della funzione $f_1(x) = 1$ è $G_1(x) = x$, allora l'integrale vale $1–(-1) = 2$.
Come prima una primitiva di $f_2(x) = x^2$ è $G_2(x) = \frac{x^3}{3}$. Quindi $\int_{-1}^{1} f_2(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}$. Allora l'area cercata è $\int_{-1}^{1} f_1(x)dx - \int_{-1}^{1} f_2(x)dx = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

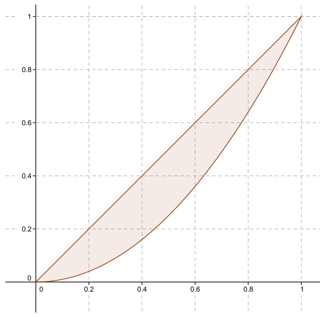
Osservazione 7.13. Se f_1, f_2 sono due funzioni continue definite sullo stesso intervallo $[a, b]$ ed $f_1(x) \geq f_2(x)$ su tutto $[a, b]$, allora l'area della regione del piano compresa fra i grafici di f_1 e f_2 come in figura



si calcola mediante la differenza $\int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx$ o equivalentemente, per la proprietà di linearità dell'integrale: $\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$.

Esempio 7.14. Calcolare l'area della regione compresa fra la bisettrice del primo e terzo quadrante e la parabola $y = x^2$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.

E' l'area della regione il cui bordo è il grafico delle funzioni $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = x^2$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.



Quindi è data da $\int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 (x - x^2)dx = \cdots$ (completare)

Esercizio 7.15. Calcolare l'area delle regioni comprese

a) fra la bisettrice del primo e terzo quadrante e la curva $y = x^3$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$;

b) fra la bisettrice del primo e terzo quadrante e il grafico della curva $y = x^4$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$;

c) fra la bisettrice del primo e terzo quadrante e il grafico della curva $y = x^n$, $n \geq 1$, nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$;

d) fra la retta $y = 1$ e il grafico della curva $y = x^n$, $n \geq 1$, nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$;

e) fra la parabola $y = x^2$ e la curva $y = x^3$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$;

f) fra la parabola $y = x^2$ e la curva $y = x^2$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$;

g) fra la parabola $y = x^2$ e la curva $y = x^2$ nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$;

h) fra la parabola $y = 2x^2$ e la curva $y = 2x^4$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$;

i) fra la curva $y = x^3$ e la curva $y = x^4$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$;

j) fra la curva $y = x^3 + 1$ e la curva $y = x^4 + 1$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$;

k) fra la curva $y = x^3$ e la curva $y = x^5$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$;

l) fra la curva $y = x^4$ e la curva $y = x^5$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$;

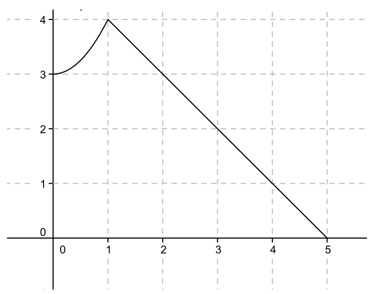
m) fra la curva $y = x^3$ e la curva $y = x^5$ nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$;

n) fra la curva $y = x^4$ e la curva $y = x^6$ nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$

Esercizio 7.16. Tracciare il grafico della funzione f definita a tratti nel modo seguente $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 5 - x, & 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$

e calcolarne l'integrale sull'intervallo $[0, 5]$.

Sul primo tratto è tratta la parabola x^2 traslata in alto di 2, sul secondo tratto è la retta per i punti $(1, 4)$ e $(5, 0)$. Il grafico risulta allora:



L'integrale in questione coincide con l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse nell'intervallo in questione e, coerentemente con la proprietà di additività, può essere spezzato in due addendi: ciascuno dei quali è l'integrale della funzione sull'intervallo sul quale la funzione si scrive in modo analiticamente semplice: $f(x) = 3 + x^2$ quando $0 \leq x \leq 1$ e $f(x) = 5 - x$ quando $1 \leq x \leq 5$.

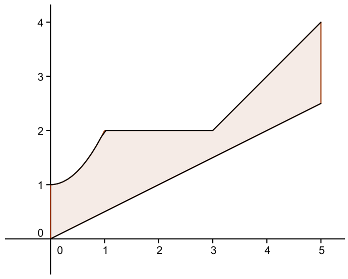
Terminare l'esercizio calcolando separatamente i due integrali per poi sommarli.

Esercizio 7.17. Tracciare i grafici delle funzioni

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x < 3 \\ x - 1, & 3 \leq x \leq 5 \end{cases} \qquad f_2(x) = \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 5$$

e calcolare l'area della regione piana compresa nello stesso intervallo fra i grafici delle due funzioni.

Svolgere l'esercizio nei dettagli. Ci limitiamo a indicare i grafici e l'area della regione in questione:



Esercizio 7.18. Tracciare i grafici delle funzioni

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2+1, & 0 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x < 3 \\ x-1, & 3 \le x \le 5 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} f_1(x) = \begin{cases} x^5+1, & 0 \le x < 1 \\ -x+3, & 1 \le x < 3 \\ x-3, & 3 \le x \le 5 \end{cases} \end{cases}$$

e calcolare l'area della regione piana compresa nello stesso intervallo fra i grafici delle due funzioni.

Svolgere l'esercizio nei dettagli. Come prima ci limitiamo a indicare i grafici e l'area della regione in questione