

Il Crivello di Eratostene

Ricordiamo che un numero naturale maggiore o uguale a 2 è *primo*, se ammette solo due divisori: 1 e se stesso.

Un metodo per trovare tutti i numeri primi fino a un fissato limite superiore è il cosiddetto *crivello* (o *setaccio*) *di Eratostene*¹, di seguito illustrato.

Si comincia con l'elenco di tutti i numeri naturali da 2 fino al limite superiore che interessa (ad esempio, per fissare le idee, 35).

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35				

Prendiamo il numero 2: è un numero primo e lo evidenziamo. Poi cancelliamo i numeri multipli di 2 e più grandi di 2 fino al limite superiore fissato 35: questi sicuramente non sono primi, infatti hanno almeno il numero 2 come ulteriore divisore oltre a 1 e a se stessi.

¹Eratostene (Cirene 275 circa a.C., Alessandria d'Egitto 195 circa a.C.) diresse ad Alessandria la più importante biblioteca dell'antichità. Intellettuale dai molteplici interessi in storia, filologia, matematica, astronomia e geodesia, fu in contatto con i principali studiosi del suo tempo. Oltre alla scoperta del metodo per trovare i numeri primi, gli sono stati attribuiti diversi altri risultati, tra cui una delle più accurate misurazioni della circonferenza terrestre di tutta l'antichità, fondata sull'osservazione delle differenti ombre proiettate dal sole in luoghi posti a diverse latitudini. Per ulteriori notizie sulla sua opera come matematico, si può consultare, ad esempio, Carl B. Boyer, *A history of Mathematics*, John Wiley & Sons, 1968 (tr. it. *Storia della matematica*, Mondadori, Milano, 1982).

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35				

Passiamo ora al numero 3, che è un numero primo. Lo evidenziamo e cancelliamo i suoi multipli da 6 (in realtà già cancellato in quanto multiplo anche di 2) fino al limite superiore 35.

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35				

Guardiamo all'elenco ottenuto: il più piccolo fra i numeri che non sono stati né evidenziati né cancellati è il numero 5, che è un numero primo. Ancora una volta lo evidenziamo e cancelliamo i suoi multipli da 10 in poi fino a 35.

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35				

A questo punto il procedimento potrebbe essere sufficientemente chiaro: ad ogni passo si evidenzia il più piccolo fra i numeri, che nei passi precedenti non sono stati né evidenziati né cancellati. Questo numero è sicuramente un numero primo, infatti se non lo fosse, sarebbe divisibile per numero primo più piccolo e quindi sarebbe stato cancellato in uno dei passi precedenti. Cancellando poi i suoi multipli più grandi, si eliminano dall'elenco solo dei numeri composti. Il procedimento si ripete, finché nell'elenco stesso restano

solo dei numeri evidenziati o cancellati. I numeri evidenziati sono i numeri primi cercati. Nel nostro caso si procede con il numero 7, poi con il numero 11 ... , finchè l'elenco non diventa:

	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35				

Quindi l'elenco completo dei numeri primi fino a 35 è:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31

Esercizio. Trovare tutti i numeri primi fino a 100.

Problema. Un'esecuzione corretta e attenta del crivello di Eratostene dovrebbe aver mostrato che *da un certo punto in poi* tutti i numeri, precedentemente non cancellati, sono primi, ossia che nessuno di questi verrà cancellato nel corso dell'esecuzione ulteriore del procedimento. Ad esempio nel caso svolto, dopo aver cancellato i multipli di 17, il più piccolo dei numeri tra quelli che non evidenziati, nè cancellati è 19, il cui più piccolo multiplo strettamente maggiore è 38. Questo è più grande del limite superiore 35, quindi sicuramente il numero 19 non dà luogo ad alcuna cancellazione di numeri minori o uguali a 35. Un'esecuzione particolarmente accurata dovrebbe mostrare che la stessa cosa succede dopo il numero 5, ossia dal 7 in poi. E' possibile precisare che cosa può significare l'espressione "da un certo punto in poi"? Si cerchi a darne una "stima", ossia si provi a determinare, in funzione del limite superiore, un valore n tale che l'esecuzione del procedimento fino a n , lasci non cancellati (dopo n e fino al limite superiore) solo dei numeri primi.