Esercizio 1. Siano A, B e C insiemi. Si dimostri che:

a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

b) $(A \cap B)\Delta(A \cap C) = A \cap C$ se e solo se $A \cap B = \emptyset$.

Esercizio 2. Dati A e B sottoinsiemi dell'insieme I, sia $\omega : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(I)$ l'applicazione definita, per $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$, da $\omega((X,Y)) = X \cup Y$. Provare che ω è iniettiva se e solo se $A \cap B = \emptyset$ e che è suriettiva se e solo se $A \cup B = I$.

Esercizio 3. Si provi che l'applicazione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita da $f(x) = 2x + |x| + 1$, per ogni $x \in \mathbb{Q}$, è biettiva. Se ne determini l'inversa.

Esercizio 4. Sull'insieme $A = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \setminus \{(0,0)\}$ si definisca la relazione ρ ponendo, per $(a,b),(c,d) \in A$, $(a,b)\rho(c,d)$ se $|ad| = |bc|$. Si dimostri che ρ è una relazione di equivalenza e si provi che l'insieme quoziente A/ρ è infinito. Si detemini inoltre una funzione $f : A \to \mathbb{Q}$ tale che ρ coincida con l'equivalenza indotta da f.

Esercizio 5. Si provi che, se a e b sono interi positivi, vale $ab = (a[a,b], b[a,b])$.

Esercizio 6. Dati n, b interi positivi, $b \geq 2$, sia $n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_0$ la rappresentazione b-adica di n. Si provi che

$$n \equiv \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_i \pmod{b+1}$$

Esercizio 7. Dire per quali $a \in \mathbb{Z}$ il numero

$$2^{1346} + 12 \cdot 48^{121} + 21003 \cdot 5^{30} + a$$

è divisibile per 7.

Esercizio 8. Siano n, m interi e p un primo positivo. Provare che $n \equiv m \pmod{p-1}$ implica $a^n \equiv a^m \pmod{p}$.

Esercizio Siano A, B insiemi con $|A| = 5$, $|B| = 9$. Determinare la cardinalità dell'insieme delle applicazioni $\{f : A \to B \mid |f(A)| \leq 3\}$.

Esercizio Si provi per induzione che, per ogni naturale $n \geq 1$, valgono le seguenti uguaglianze:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (i + (-1)^i i^2) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ n(n+1) & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$