Esercizi di Algebra A.A. 2001/02

Esercizio 1 Siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Si dice che c è un *minimo comune multiplo* tra a e b se:

- $a \mid c$ e $b \mid c$ (c è un multiplo comune di a e b);
- se $a \mid x$ e $b \mid x$, allora anche $c \mid x$.

Se $a = 0 = b$ allora 0 è l'unico minimo comune multiplo di a e b. Dimostrare che, se $\{a, b\} \neq \{0\}$, allora $ab/(a, b)$ è un minimo comune multiplo di a e b. Dire quanti sono i minimi comuni multipli di una data coppia a, b.

Esercizio 2 Si scriva il numero 1457 nelle basi $2, 7$ e 11.

Esercizio 3 Siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = c\mathbb{Z}$, dove c è un minimo comune multiplo di a e b.

Esercizio 4 Dati a, b in $\mathbb{Z}$, indichiamo con $[a, b]$ il minimo comune multiplo positivo (per positivo si intende *maggiore o uguale* a 0) di a e b (se avete fatto l'esercizio 1 dovreste sapere che ogni coppia di interi ha un unico minimo comune multiplo positivo). Dimostrare che, comunque si prendano $a, b, c \in \mathbb{Z}$, si ha $[[a, b], c] = [a, [b, c]]$. (Sugg. : osservate che $(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}) \cap c\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \cap (b\mathbb{Z} \cap c\mathbb{Z})$.)

Esercizio 5 Se a, b, c sono interi, si dimostri che si ha $(a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}) + c\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + (b\mathbb{Z} + c\mathbb{Z})$. Usare questo fatto per dimostrare che vale $((a, b), c) = (a, (b, c))$.

Esercizio 6 Sia $n \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che esiste un numero primo p che divide n.

Esercizio 7 Siano a ed x due numeri naturali tali che $a \mid x^2$. Dimostrare che, se $(a, x)^2 \mid a$ allora $a = (a, x)^2$.

Esercizio 8 Dimostrare, seguendo le indicazioni, che, se $a, b \in \mathbb{N}$ sono due numeri coprimi (cioè $(a, b) = 1$) tali che $ab = x^2$ per qualche $x \in \mathbb{N}$, allora a e b sono quadrati di numeri naturali.

1. Provare che $(a, x)^2 \mid a$ e $(b, x)^2 \mid b$
2. Usare l'esercizio 7 per concludere la dimostrazione.

Esercizio 9 (Terne Pitagoriche) Una terna di numeri naturali (x, y, z) si dice una *Terna Pitagorica* se $x^2 + y^2 = z^2$. Si dice che la terna è *ridotta* se non esiste alcun intero diverso da 1 e -1 che divide contemporaneamente x, y e z.

Si verifichi che, presi comunque due naturali a e b con $a \geq b$, la terna $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$ è una terna Pitagorica.

Lo scopo della seconda parte di questo esercizio è far vedere che tutte le terne Pitagoriche ridotte si ottengono in questo modo. La dimostrazione è divisa in vari passi.

1. Sia (x, y, z) una terna Pitagorica ridotta. Provare che z non può essere pari.
2. Provare che uno solo tra x e y è dispari.
3. Supponiamo, tanto per fissare le idee, che x sia dispari. Se d è il massimo comun divisore di $(z-x)/2$ e $(z+x)/2$ dimostrare che, allora, d divide z e x. Dedurne che deve essere $((z - x)/2, (z + x)/2) = 1$.
4. Usare l'esercizio 8 per far vedere che esistono due interi a, b tali che $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$, $z = a^2 + b^2$.

Esercizio 10 Si esegua la divisione con resto di a per b, quando la coppia (a, b) è una delle seguenti: $(5123, 576)$, $(56, 1678)$, $(-3457, 132)$, $(-1452, -567)$, $(883, -123)$.

Esercizio 11 Si usi l'algoritmo di Euclide per calcolare $(-315, 2167)$. Si trovino quindi $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che $(-315, 2167) = (-315)x + 2167y$.

Esercizio 12 Se $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}$ non è irriducibile, allora ha un divisore d tale che $d \leq \sqrt{|a|}$.

Esercizio 13 Usando il principio di induzione si dimostrino le seguenti formule:

- $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n}$.
- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- $\prod_{i=2}^{n}(1 - \frac{1}{i^2}) = \frac{n+1}{2n}$.
- $\prod_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.