Esercizi di Algebra A.A. 2001/02
Parte III

Esercizio 1 Si trovino le soluzioni dei seguenti sistemi di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 3 & \pmod{8} \\ x \equiv 7 & \pmod{20} \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv -4 & \pmod{14} \\ x \equiv 3 & \pmod{-21} \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv 15 & \pmod{24} \\ x \equiv 2 & \pmod{15} \end{cases}$$

Esercizio 2 Si dimostri che l'insieme $\mathbb{Z}[\sqrt{7}] = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ è, rispetto alle usuali operazioni definite in $\mathbb{R}$, un anello. Si dica se $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ possiede divisori di zero.

Esercizio 3 Si dimostri che l'insieme $A = \{a + b\sqrt{5} + c\sqrt[3]{5} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ è, rispetto alle usuali operazioni definite in $\mathbb{R}$, un anello. Si dica se A possiede divisori di zero.

Esercizio 4 Siano A un anello e x un suo elemento invertibile. Si dimostri che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'elemento x^n é invertibile.

Esercizio 5 Si consideri l'anello $A = \mathbb{Z}/2679\mathbb{Z}$. Dimostrare che la funzione $f : A \longrightarrow A$ definita da $f([a]) = [2][a]$ é una biiezione. (Sugg. : osservare che $(2679, 2) = 1$. Per dimostrare la suriettiviá è conveniente trovare l'inverso di $[2]$.)

Esercizio 6 Siano A, B due anelli senza divisori di zero. Si trovino tutti i divisori di zero dell'anello $A \times B$.

Esercizio 7 Siano A, B due anelli. Se X, Y sono sottoanelli rispettivamente di A e B, si provi che $X \times Y$ é sottoanello di $A \times B$.

Esercizio 8 Siano A, B due anelli. Dimostrare che un elemento $(a, b) \in A \times B$ é invertibile, se e solo se a e b sono elementi invertibili.

Esercizio 9 Si dimostri che, se A, B sono anelli, allora $A \times B$ non é mai un campo.

Esercizio 10 Si dimostri che l'insieme $I = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in 2\mathbb{Z}\}$ é un ideale dell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

Esercizio 11 Sia dato un anello commutativo A con un sottoanello B. Supponiamo esista un elemento $\alpha \in A$,tale che $\alpha^2 \in B$. Si dimostri allora che l'insieme $X = \{x + y\alpha \mid x, y \in B\}$ é un sottoanello di A. Sia I un ideale di B. Dimostrare che $J = \{x + y\alpha \mid x, y \in I\}$ é un ideale di X.

Esercizio 12 Sia A un anello e si consideri un suo ideale destro I. Dimostrare che l'insieme $J = \{x \in A \mid ax = 0 \ \forall\ a \in I\}$ é un ideale bilatero di A.

Esercizio 13 Sia A un anello e si consideri un suo ideale destro I. Dimostrare che l'insieme $K = \{x \in A \mid ax \in I \ \forall\ a \in A\}$ é un ideale bilatero di A. Dimostrare che $I \subseteq K$.

Esercizio 14 Dato un anello A, si consideri l'anello $B = A \times A$. Dimostrare che la funzione $f : B \longrightarrow B$ definita da $f((x, y)) = (y, x)$ é un morfismo di anelli iniettivo e suriettivo.