Esercizi di Algebra A.A. 2001/02
Parte IV

Esercizio 1 Sia A un anello commutativo. Scelti $a, b \in A$ in modo che a sia invertibile, si dimostri che la funzione $\sigma : A[x] \longrightarrow A[x]$ definita da $\sigma(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i(ax+b)^i$ è un isomorfismo di anelli.

Esercizio 2 Sia A un anello finito . Per ogni $a \in A$ si consideri la funzione $\phi_a : A \longrightarrow A$ definita da $\phi_a(g) = ag$. Dimostrare che la funzione ϕ_a è iniettiva se e solo se a non è un divisore sinistro di 0.

Esercizio 3 Se $\mathbb{F}$ è un campo, si dimostri che tutti i polinomi di grado 1 in $\mathbb{F}[x]$ sono irriducibili.

Esercizio 4 Dimostrare che il polinomio $f = x^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$. È vero che f è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$? E in $\mathbb{Z}[i][x]$?

Esercizio 5 Si dimostri che l'insieme $I = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in 3\mathbb{Z}\}$ è un ideale di $\mathbb{Z}[x]$ ma non di $\mathbb{Q}[x]$.

Esercizio 6 Dati un anello commutativo A ed un suo ideale I, si dimostri che l'insieme $J = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in I\}$ è un ideale di $A[x]$.

Esercizio 7 Dimostrare che l'anello $\mathbb{Z}[x]$ non è isomorfo a $\mathbb{Q}[x]$.

Esercizio 8 Se D è un anello euclideo con funzione norma δ, si consideri un suo ideale I diverso da 0. Allora $I = (d)$ per qualche $d \in D$. Se $a \in D$ si scriva $a = qd + r$ con $r = 0$ o $\delta(r) < \delta(d)$. Dimostrare che $a + I = r + I$.

Esercizio 9 Consideriamo l'anello euclideo $\mathbb{Z}[i]$ con la funzione norma $N(a + ib) = a^2 + b^2$. Dimostrare che l'insieme $S_n = \{\alpha \in \mathbb{Z}[i] \mid N(\alpha) \leq n\}$ è finito. Usare questo fatto e l'esercizio precedente per dimostrare che, se I è in ideale non nullo di $\mathbb{Z}[i]$, allora $\mathbb{Z}[i]/I$ è un anello finito.

Esercizio 10 Sia A un anello commutativo i cui unici ideali sono 0 ed A. Dimostrare che A è un campo. (Sugg. : per ogni $a \in A$ si consideri l'ideale (a).)

Esercizio 11 Si dimostri che $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ è invertibile se e solo se $N(\alpha) = 1$. Quanti sono gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[i]$?

Esercizio 12 Si dimostri che $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ è invertibile se e solo se $N(\alpha) = 1$. Mostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ contiene infiniti elementi invertibili.

Esercizio 13 Se A è un anello e I, J sono ideali bilateri , provare che l'insieme $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ è un ideale bilatero contenente I e J. Dimostrare $I + J$ è l'ideale generato da $I \cup J$. Oss. : dopo aver risolto questo esercizio, dovrebbe anche essere chiaro che, se I, J sono ideali destri (risp. sinistri), allora $I + J$ è ideale destro (risp. sinistro).

Esercizio 14 Si consideri l'insieme $\mathbb{Q}_2 = \{q \in \mathbb{Q} \mid q = a/b \text{ con } a, b \in \mathbb{Z},\ (a, b) = 1 \text{ e } (2, b) = 1\}$. Dimostrare che $\mathbb{Q}_2$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$. Si provi che l'insieme $M = \{2q \mid q \in \mathbb{Q}_2\}$ è un ideale di $\mathbb{Q}_2$. Provare che un elemento $q \in \mathbb{Q}_2$ è invertibile, se e solo se $q \in \mathbb{Q}_2 \setminus M$. Dimostrare che, se I è un ideale di $\mathbb{Q}_2$ diverso dall'intero anello, allora $I \subseteq M$.

Esercizio 15 Sia $\mathbb{Z}[1/2] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i(1/2)^i \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{Z}\}$. Dimostrare che $\mathbb{Z}[1/2]$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$. Si trovino gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[1/2]$. Dimostrare che esiste un ideale I di $\mathbb{Z}[x]$ tale che $\mathbb{Z}[x]/I \simeq \mathbb{Z}[1/2]$. Dire se $\mathbb{Z}[1/2]$ è isomorfo a $\mathbb{Z}[x]$.

Esercizio 16 Trovare gli elementi invertibili dell'anello $M(2, \mathbb{Q}_2)$ delle matrici 2×2 ad elementi in $\mathbb{Q}_2$. (L'anello $\mathbb{Q}_2$ è quello definito nell'esercizio 14.)