I Compitino di Algebra II
18/11/02

Esercizio 1 Siano p un numero primo ed $\mathbb{F}_p$ il campo con p elementi. Se $a, b \in \mathbb{F}_p$ si definisca la funzione $f_{a,b} : \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p$ ponendo $f_{a,b}(\alpha) = a\alpha + b$ per ogni $\alpha \in \mathbb{F}_p$. Definiamo $G = \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{F}_p \ a \neq 0\}$. Dimostrare che G è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni, e dire quanti elementi ha. Dimostare che $H = \{f_{1,b} \mid b \in \mathbb{F}_p\}$ è un sottogruppo normale di G. Per ogni $f \in H$ trovare $|f|$. Se $p = 5$ si trovi l'ordine dell'elemento $f_{2,1}H$ in G/H. È vero, sempre se $p = 5$, che G/H è ciclico?

Esercizio 2 Calcolare il derivato del gruppo $G = S_3 \times Q_8$ e dire quanti elementi ha G/G'. Mostrare che ogni elemento di G/G' ha ordine che divide 2.

Esercizio 3 Sia G un gruppo abeliano. Poniamo $H = G \times G$ e $K = \{(g, g^{-1}) \mid g \in G\}$. Dimostrare che $K \leq G$. Se $\phi : H \longrightarrow G$ è la funzione definita da $\phi((a, b)) = ab$, dimostrare che ϕ è un morfismo suriettivo. Mostrare che H/K è isomorfo a G.

Esercizio 4 Sia G il gruppo definito nell'esercizio 1 e poniamo $\Omega = \mathbb{F}_p$. Dimostrare che a funzione $\Phi : G \times \Omega \longrightarrow \Omega$ definita da $\Phi(g, \omega) = g(\omega)$, è un'azione di G su Ω. Dire se l'azione è transitiva e trovarne il nucleo. Per ogni $\omega \in \Omega$, determinare G_ω.

Esercizio 5 Sia $G = \langle g \rangle$ un gruppo ciclico di ordine finito n. Sia k un intero coprimo con n. Dimostrare che la funzione $\pi : G \longrightarrow G$ definita da $\pi(x) = x^k$, è un automorfismo di G. Se $N \leq G$ provare che porre $\sigma(xN) = x^k N$ definisce un automorfismo del gruppo G/N.