# II Compitino di Algebra II
# 9/1/03

**Esercizio 1** Sia $S = \{1/2, 1/3\} \subseteq \mathbb{Q}$. Dimostrare che $\mathbb{Z}[S] = \{k/2^n 3^m \mid k, n, m \in \mathbb{Z}\}$.

**Esercizio 2** Dire quali tra i seguenti polinomi, sono irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$: $3x^3 - x^2 + 3x - 1$, $2x^4 + 6x^2 + 4x + 3$, $x^4 + 2x^3 + x + 1$.

**Esercizio 3** Sia $u$ un numero complesso tale che $u^3 = 6u - 3$. Trovare il grado dell'estensione $\mathbb{Q}[u]$ su $\mathbb{Q}$. Trovare l'inverso dell'elemento $u^4 - 1$ esprimendolo come combinazione lineare di elementi di una opportuna base del $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale $\mathbb{Q}[u]$.

**Esercizio 4** Dimostrare che il polinomio $f = x^3 + x + 1$ è irriducibile in $\mathbb{F}_2[x]$. Usare $f$ per costruire un campo $\mathbb{K}$ con 8 elementi. Trovare in $\mathbb{K}^*$ un elemento di periodo 7.

**Esercizio 5** Siano $p$ un primo ed $n, m$ due numeri naturali. Dimostrare che, se $n \mid m$, allora $p^n - 1 \mid p^m - 1$. Usare questo fatto per mostrare che, se $n \mid m$,allora il polinomio $x^{p^n-1} - 1$ divide il polinomio $x^{p^m-1} - 1$ in $\mathbb{F}_p[x]$. Si privi infine che, se $\mathbb{F}$ e $\mathbb{K}$ sono campi di ordine rispettivamente $p^n$ e $p^m$, si ha che $\mathbb{F} \leq \mathbb{K}$ se e solo se $n \mid m$.