Compito di Algebra II
10/2/03

Esercizio 1 Dato un gruppo abeliano G si consideri, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, il sottoinsieme $G_n = \{g^n \mid g \in G\}$ dimostrare che G_n è un sottogruppo di G e che $G_n = G_{-n}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Se G è finito si dimostri che $G_n = G$ se e solo se $(n, |G|) = 1$.

Esercizio 2 Siano G un gruppo, N un sottogruppo normale di G ed H un sottogruppo di G. Mostrare che $X = \{hN \mid h \in H\}$ è un sottogruppo di G/N. Dimostrare che $N \cap H$ è un sottogruppo normale di H e provare che porre $\phi(hN) = h(N \cap H)$ definisce un isomorfismo tra X ed $H/N \cap H$.

Esercizio 3 Siano H, K sottogruppi del gruppo G, e si considerino le due funzioni $\Phi, \Psi : (H \times K) \times G \longrightarrow G$, definite, per ogni $(h, k) \in H \times K$ e $g \in G$, da $\Phi((h, k), g) = hgk$ e $\Psi((h, k), g) = hgk^{-1}$. Si dica se Φ o Ψ sono azioni di $H \times K$ su G. Per ogni $g \in G$ si dimostri che $S_g = \{(h, k) \mid hg = gk\}$ è un sottogruppo di $H \times K$.

Esercizio 4 Dimostrare che $\mathbb{F} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_5\}$ è un campo. Dire quale è la caratteristica di $\mathbb{F}$ e se il polinomio $x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}[x]$ è irriducibile.

Esercizio 5 Trovare il grado di $\alpha = \sqrt{2} + i$ su $\mathbb{Q}$. Per ogni $a \in \mathbb{Q}$ trovare il grado di $\alpha + a$ su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 6 Siano A un anello commutativo ed $\mathbb{F} \leq A$ un campo. Se $\alpha \in A$ ed $\mathbb{F}[\alpha]$ è un campo, dimostrare che α è algebrico su $\mathbb{F}$. Provare quindi che, se $\mathbb{F}[\alpha]$ è un dominio ma non un campo, allora α è trascendente su $\mathbb{F}$.