Compito di Algebra II
23/1/03

Esercizio 1 Sia $G = \{x \in \mathbb{C} \mid x^{2^n} = 1 \ \exists\, n \in \mathbb{N}\}$. Dimostrare i seguenti fatti:

1. G è un gruppo rispetto al prodotto definito in $\mathbb{C}$.
2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme $G[n] = \{x \in G \mid o(x) \mid 2^n\}$ è un sottogruppo normale di G ($o(g)$ indica l'*ordine* dell'elemento x).
3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $\phi_n : G \longrightarrow G$ definita da $\phi_n(x) = x^{2^n}$ è un morfismo suriettivo.
4. $G/G[n]$ è isomorfo a G per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2 Consideriamo l'insieme $G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \{\pm 1\}, b \in \mathbb{Q}\}$. Provare che G è un gruppo rispetto all'usuale prodotto tra matrici. Se $H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \{\pm 1\}, b \in \mathbb{Z}\}$, provare che H è un sottogruppo di G. Se $n \in \mathbb{Z}$, si dimostri che $H_n = \{\begin{pmatrix} a & nb \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \{\pm 1\}, b \in \mathbb{Z}\}$ è un sottogruppo normale in H ma non in G.

Esercizio 3 Siano $G = S_3 \times C_3$ ed $H = \{(a, 1) \mid a \in \langle (12) \rangle\}$.Posto $\Omega = \{gH \mid g \in G\}$ si trovi $|\Omega|$. Si consideri ora l'azione di G su Ω. Si dica se l'azione è transitiva, si trovi lo stabilizzatore del punto H e si determini il nucleo dell'azione.

Esercizio 4 Dato il polinomio $f = x^3 + x^2 + 2 \in \mathbb{F}_3[x]$, dimostrare che f è irriducibile. Costruire un campo $\mathbb{K}$ con 27 elementi e provare che il polinomio $g = x^{13} + 2 \in \mathbb{F}_3[x]$ ha uno zero in $\mathbb{K} \setminus \mathbb{F}_3$.

Esercizio 5 Consideriamo il numero reale $\alpha = \sqrt{3+\sqrt{3}}$. Detrminare il grado dell'estensione $\mathbb{Q}[\alpha]$ su $\mathbb{Q}$, ed esprimere α^{-1} come combinazione lineare su $\mathbb{Q}$ di elementi nell'insieme $\{\alpha^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.