Compito di Algebra II

April 28, 2003

Esercizio 1 Dato un naturale n, si definisca $A_n = \{x \in \mathbb{C} \mid x^{2^n} = 1\}$. Dimostrare che, rispetto all'usuale prodotto dei complessi, A_n é un gruppo ciclico con 2^n elementi. Provare quindi che $A_n \leq A_m$ se e solo se $n \leq m$ e che, posto $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, anche A é un gruppo rispetto al prodotto. É vero che anche A é ciclico?

Esercizio 2 Si consideri il gruppo G delle matrici 2×2 a coefficienti reali, e sia $V = \mathbb{R}^2$. Dimostrare che la mappa $\Phi : G \times V \longrightarrow V$ definita da $\Phi(A, v) = Av$ (il vettore v é pensato come una matrice 2×1), é un'azione di G su V. Trovare le orbite. Trovare lo stabilizzatore del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la sua orbita.

Esercizio 3 Si dica se il numero complesso $\alpha = i + \sqrt{3}$ é algebrico su $\mathbb{Q}$. In caso di risposta affermativa si determini il grado di $\mathbb{Q}[\alpha]$ su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 4 É noto che, se $\mathbb{F}$ é un campo finito, allora il suo gruppo moltiplicativo é ciclico (questo lo diamo per buono, non chiediamo di dimostrarlo). Dimostrare invece che, per ogni primo p e naturale $n > 0$, esiste sempre un polinomio $f \in \mathbb{F}_p[x]$ che sia irriducibile e di grado n.