

Prova scritta di ALGEBRA I
A.A. 2016/17
12 settembre 2017

Esercizio 1. (9 punti)

Sia $2 \leq n \in \mathbb{N}$, e si consideri $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ data ponendo, per ogni $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$,

$$\varphi(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{2a - b}.$$

1. Si provi che φ è un'applicazione ben definita.
2. Si dica se φ è iniettiva e/o suriettiva.
3. Si determini la cardinalità di $\varphi^{-1}(\{\bar{0}\})$.

Esercizio 2. (9 punti)

Sia $\Omega = \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0}$ (dove al solito $\mathbb{N}_{>0} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$).
Su Ω si ponga

$$(a, b) \simeq (c, d) \quad \text{se} \quad a^d = c^b.$$

1. Si provi che \simeq è una relazione d'equivalenza su Ω .
2. Si determini la classe $[(3, 2)]$, contenente $(3, 2)$, e la sua cardinalità.
3. Si provi che ponendo $f : \Omega / \simeq \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f([(a, b)]) = \sqrt[b]{a} \quad \text{per ogni } [(a, b)] \in \frac{\Omega}{\simeq}$$

si definisce una funzione.

4. Si dica se la relazione \simeq coincide con quella definita da f .

Esercizio 3. (9 punti)

Siano $f = x^5 + 8x^4 + 24x^3 + 34x^2 + 23x + 6$, $g = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$ e sia $I = (f, g)$ l'ideale generato da f e g in $\mathbb{Q}[x]$.

1. Si determinino gli ideali dell'anello quoziente $\mathbb{Q}[x]/I$.
2. Si dica se $\mathbb{Q}[x]/I$ è un dominio di integrità e se contiene elementi nilpotenti non nulli.
3. Si dica se $2 + x + I$ è invertibile in $\mathbb{Q}[x]/I$ e, se lo è, se ne determini l'inverso.

Esercizio 4. (4 punti)

Sia F un campo. Si provi che nell'anello dei polinomi $F[x]$ esistono infiniti elementi irriducibili a due a due non associati.