Corso di Laurea in Matematica
I compito di ALGEBRA I
10 gennaio 2014

Esercizio 1. (punti) Siano $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $d = (n, m)$. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\alpha n + \beta m = 1.$$

Si provi che $(\alpha, \beta) = 1$.

Esercizio 2. (punti) Sull'insieme

$$A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

si definisca una relazione $\sim$ ponendo, per ogni $f, g \in A$

$$f \sim g \text{ se esiste } 0 < a \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(x) = g(x) \text{ per ogni } x \in [-a, a]$$

1. Si provi che $\sim$ è una relazione di equivalenza su A.
2. Si provi che porre, per $[f]_\sim \in A/\sim$,

   $$\phi([f]_\sim) = f(0)$$

   definisce una funzione $\phi : A/\sim \to \mathbb{R}$.
3. Si provi che la funzione ϕ è suriettiva, ma non iniettiva.

Esercizio 3. (punti) Sull'insieme

$$P = \{p^n |\ p, n \in \mathbb{N},\ p \text{ primo } \}$$

si definisca una relazione $\trianglelefteq$ ponendo, per $p^n, q^m \in P$,

$$p^n \trianglelefteq q^m \text{ se } p < q \text{ oppure } \begin{cases} p = q \\ n | m \end{cases}$$

1. Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione di ordine su P. Si dica se $(P, \trianglelefteq)$ è un insieme totalmente ordinato.
2. Si determinino eventuali elementi massimali, minimali, massimi e minimi in $(P, \trianglelefteq)$.
3. Sia $Q = \{2^2, 3^3, 3^4\}$. Si determinino, se esistono, $\inf_P(Q)$ e $\sup_P(Q)$.

Esercizio 4. (punti) Si risolva la seguente congruenza in $\mathbb{Z}$:

$$x^{20} + 4x^{19} \equiv x - 4 \pmod{35}.$$