

Corso di Laurea in Matematica
II Compito di ALGEBRA I
2 maggio 2012

Esercizio 1. (8 punti) Siano

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_{11} \right\} \quad \text{e} \quad I := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z}_{11} \right\}$$

1. Si provi che A è un anello, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici, e che I è un ideale di A .
2. Si determinino i divisori dello zero e gli invertibili dell'anello quoziente A/I .

Esercizio 2. (10 punti) Sia

$$I = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x] : a_0 \in 18\mathbb{Z}\}.$$

1. Si provi che I è un ideale di $\mathbb{Z}[x]$.
2. Si stabilisca se I è primo e/o principale.
3. Determinare gli ideali massimali di $\mathbb{Z}[x]$ che contengono I .
4. Determinare la caratteristica dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[x]/I$.

Esercizio 3. (10 punti) Si provi che $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ non è un dominio a fattorizzazione unica. Si trovi un elemento irriducibile, ma non primo, di $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$. Si determini una coppia di elementi di $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ che non ammette massimo comun divisore in $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$.

Esercizio 4. (4 punti) Siano $f = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$, $g = x^3 - x^2 - x + 1$ e sia $I = (f, g)$ l'ideale generato da f e g in $\mathbb{Q}[x]$. Si trovi un elemento nilpotente non nullo dell'anello quoziente $\mathbb{Q}[x]/I$.