Corso di Algebra I. 2011/2012.

Esame scritto del 10 luglio 2012

Esercizio 1. (punti) Siano A, B, C insiemi e si ponga, secondo consuetutine, $C^B = \{f \mid f : B \to C\}$ e $C^A = \{g \mid g : A \to C\}$; infine, sia fissata un'applicazione suriettiva $\alpha : A \to B$. Si definisca quindi l'applicazione $\chi : C^B \to C^A$ ponendo,

$$\chi(f) = f \circ \alpha$$

per ogni $f \in C^B$. Si provi che χ è un'applicazione iniettiva.

Esercizio 2. (punti) Sull'insieme $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si definisca la relazione $\lhd$ ponendo, per ogni $(a, b), (c, d) \in A$,

$$(a, b) \lhd (c, d) \quad \text{se} \quad \begin{cases} a \leq c \\ a + d \leq b + c \end{cases} .$$

1. Si provi che $\lhd$ è una relazione d'ordine e che non è totale;
2. Osservato che per ogni $(a, b) \in A$ si ha $(a, b) \lhd (a+1, b)$, si provi che l'insieme parzialmente ordinato $(A, \lhd)$ non ha né elementi massimali né minimali.
3. Posto $x = (0, 0)$ e $y = (1, 2)$, si provi che $\inf_A\{x, y\} = (0, 1)$.

Esercizio 3. (punti) Sia $A = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid m \in \mathbb{Z}, (n, 7) = 1\}$.

1. Si provi che A è un sottoanello dell'anello $\mathbb{Q}$.
2. Si determini l'insieme degli elementi invertibili $U(A)$.
3. Si provi che $I = A \setminus U(A)$ è un ideale di A e che è principale, determinandone esplicitamente un generatore.
4. Qual è la caratteristica di A? Sia infine $\phi : A \to \mathbb{K}$ un omomorfismo suriettivo con $\mathbb{K}$ un campo: qual è la caratteristica di $\mathbb{K}$?

Esercizio 4. (punti) Si fattorizzi come prodotto di irriducibili il polinomio

$$x^4 - x^2 - 2 \in \mathbb{K}[x]$$

con $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.