

Corso di Laurea in Matematica  
**Compito di ALGEBRA I**  
12 maggio 2014

**Esercizio 1.** (9 punti) 1. Si provi che porre, per  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,

$$f((a + 5\mathbb{Z}, b + 7\mathbb{Z})) = 15b - 14a + 35\mathbb{Z}$$

definisce un'applicazione  $f : \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{35\mathbb{Z}}$ .

2. Si dica se  $f$  è iniettiva e/o suriettiva.
3. Si determini la controimmagine  $f^{-1}(\{1 + 35\mathbb{Z}\})$ .

**Esercizio 2.** (7 punti) Sull'insieme  $A = \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$  di tutte le applicazioni da  $\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{Z}$ , si definisca la relazione  $\sim$  ponendo, per  $f, g \in A$ ,

$$f \sim g \text{ se } \begin{cases} f(z) \equiv g(z) \pmod{2} & \text{se } z \text{ è pari} \\ f(z) \equiv g(z) \pmod{3} & \text{se } z \text{ è dispari} \end{cases}$$

1. Si provi che  $\sim$  è una relazione d'equivalenza su  $A$ .
2. Si determini un sistema di rappresentanti per le classi di equivalenza in  $A$  modulo  $\sim$ .

**Esercizio 3.** (6 punti) Sia  $A$  un dominio a fattorizzazione unica e sia  $a \in A$  con  $a \neq 0_A$  e  $a \notin U(A)$ .

1. Si provi che per ogni  $n, k \in \mathbb{N}$ :  $(a^n) = (a^k) \Leftrightarrow n = k$ .
2. Si provi che  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a^n) = \{0_A\}$ .

**Esercizio 4.** (10 punti) Sia  $A = \frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}[x]$  e sia

$$I = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \in A \mid \sum_{i=0}^n a_i = 0 \right\}.$$

1. Si provi che  $I$  è un ideale di  $A$ .
2. Si stabilisca se  $I$  è un ideale primo di  $A$ .
3. Si determinino gli ideali di  $A$  che contengono  $I$ .