Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di ALGEBRA I

9 giugno 2014

Esercizio 1. (6 punti) 1. Siano A, B, C insiemi non vuoti e $f : A \to B$ una applicazione fissata. Si definisca quindi $\Phi : C^B \to C^A$, ponendo, per ogni $g \in C^B$, $\Phi(g) = g \circ f$. Si provi che se f è iniettiva allora Φ è suriettiva.

Esercizio 2. (10 punti) Sia $A = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Dati $x, y \in A$ si scriva $x = 2^a b$, $y = 2^c d$ con $a, c, b, d \in \mathbb{N}$ e b, d dispari; poniamo $x \lhd y$ se

$$\begin{cases} a \neq c \ \text{ e } \ a|c \\ \quad\text{oppure} \\ a = c \ \text{ e } \ b \leq d \end{cases}$$

1. Si provi che $\lhd$ definisce una relazione d'ordine su A.
2. Si determinino eventuali elementi massimali/minimali, massimi/minimi di $(A, \lhd)$.
3. Posto B il sottoinsieme di A costituito dai numeri pari, si determini, se esiste, $\sup_A(B)$.

Esercizio 3. (10 punti) Dato p un numero primo, si ponga $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e si consideri

$$A_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

1. Si provi che A_p è un sottoanello di $M(2 \times 2, \mathbb{Z}_p)$.
2. Si provi che l'applicazione $\beta : \mathbb{Z}_p[x]/(x^2 + 1) \to A_p$ data da

$$\beta(a + bx + (x^2 + 1)) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

   è ben definita e isomorfismo di anelli.
3. Si provi che A_7 è un campo.
4. Si dica se A_5 è un dominio d'integrità e, in caso contrario, se ne determinino i divisori dello zero.

Esercizio 4. Si determinino tutti gli ideali di $\mathbb{Q}[x]$ che contengono entrambi i seguenti polinomi:

$$f_1 = x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1, \quad f_2 = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6.$$