Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di ALGEBRA I
14 luglio 2014

Esercizio 1. (9 punti) 1. Si provi che porre, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$f((a + 5\mathbb{Z}, b + 7\mathbb{Z})) = 15b - 14a + 35\mathbb{Z}$$

definisce un'applicazione $f : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$.

2. Si dica se f è iniettiva e/o suriettiva.

3. Si determini la controimmagine $f^{-1}(\{1 + 35\mathbb{Z}\})$.

Esercizio 2. (7 punti) Sull'insieme $A = \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ di tutte le applicazioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$, si definisca la relazione $\sim$ ponendo, per $f, g \in A$,

$$f \sim g \quad \text{se} \quad \begin{cases} f(z) \equiv g(z) \pmod 2 & \text{se } z \text{ e}' \text{ pari} \\ f(z) \equiv g(z) \pmod 3 & \text{se } z \text{ e}' \text{ dispari} \end{cases}$$

1. Si provi che $\sim$ è una relazione d'equivalenza su A.

2. Si determini $|A/\!\sim|$.

Esercizio 3. (7 punti) 1. Sia A un sottoanello dell'anello S e sia I un ideale di S; si provi che $A \cap I$ è un ideale di A, e che se I è primo in S allora $A \cap I$ è primo in A.

2. Posto $S = \mathbb{Q}[x]$ e $I = (\frac{1}{2}x)$, si provi che I è un ideale massimale di S ma che $I \cap \mathbb{Z}[x]$ non è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[x]$.

Esercizio 4. (9 punti) Siano $\mathbb{Z}_5 = \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ e $f = x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{2}x^2 - \bar{2}x - \bar{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

1. Si dica se $K = \frac{\mathbb{Z}_5[x]}{(f)}$ è un campo.

2. Si determinino gli ideali massimali di K.

3. Si dica se esiste un ideale J di $\mathbb{Z}_5[x]$ tale che $f \in J$ e $|\mathbb{Z}_5[x]/J| = 25$.