Prova scritta di ALGEBRA I
A.A. 2016/17
15 maggio 2017

Esercizio 1. *(9 punti)*

Sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si definisca la seguente relazione

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{se e solo se} \quad ab + c = cd + a.$$

1. Provare che $\sim$ è una relazione di equivalenza su A.
2. Determinare la cardinalità della classe d'equivalenza dell'elemento $(1, 1)$.
3. Mostrare che $\sim$ coincide con la relazione $\sim_f$ definita dalla funzione

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x, y) &\longmapsto x(y - 1) \end{aligned}$$

4. Provare che se $(a, b) \not\sim (1, 1)$ allora la classe $[(a, b)]_\sim$ ha cardinalità finita.

Esercizio 2. *(6 punti)*

Si determini l'insieme delle soluzioni della congruenza

$$x^{61} \equiv 93 \pmod{231}.$$

Esercizio 3. *(9 punti)*

Sia A un dominio a fattorizzazione unica e sia K il suo campo dei quozienti. Sia p un fissato elemento irriducibile di A.

Definiamo

$$R = \{\frac{a}{b} \in K \mid p \text{ non divide } b\} .$$

1. Si provi che R è un anello.
2. Si determini l'insieme $U(R)$ degli elementi invertibili di R.
3. Sia $I = R \setminus U(R)$. Si provi che I è un ideale di R. Si dica se I è massimale e/o principale e, nel caso, se ne determini un generatore.

Esercizio 4. *(7 punti)*

Nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss, si consideri l'ideale principale $I = (257)$. Si determinino gli ideali dell'anello quoziente A/I e si dica se A/I è un dominio di integrità.