Prova scritta di ALGEBRA I
A.A. 2016/17
12 giugno 2017

Esercizio 1. *(10 punti)*

Sull'insieme $\Omega = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing, \mathbb{N}\}$ si consideri la seguente relazione, per ogni $A, B \in \Omega$

$$A \preceq B \quad \text{se} \quad A \subseteq B \text{ e } |B \setminus A| < \infty.$$

(a) Provare che $\preceq$ è una relazione d'ordine su Ω.

(b) Trovare gli eventuali elementi massimali e minimali di $(\Omega, \preceq)$.

(c) Vedere se esistono, ed eventualmente trovare,

$$\sup \{\{0\}, \{1\}\} \quad \text{e} \quad \inf \{\{2k | k \in \mathbb{N}\}, \{4h | h \in \mathbb{N}\}\}.$$

(d) Provare che se esiste $\sup \{A, B\}$, allora $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)|$ è finito.

Esercizio 2. *(5 punti)*

Trovare tutte le soluzioni intere della seguente congruenza

$$x^{61} + x^{49} + 16x^{16} - x^{13} \equiv 14 \pmod{51}.$$

Esercizio 3. *(9 punti)*

Sia

$$I = \{(3a - b) + (a + 3b)i | a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}[i].$$

(a) Si provi che I è un ideale dell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss.

(b) Si determini un generatore di I.

(c) Si dica se I è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[i]$; nel caso non lo sia, si determinino gli ideali J di $\mathbb{Z}[i]$ tali che $I \subseteq J$.

Esercizio 4. *(6 punti)*

Sia

$$A = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(0) \in \mathbb{Z}\}$$

Si provi che A è un anello e si determini se A è o meno un dominio a ideali principali.