Prova scritta di ALGEBRA I
A.A. 2016/17
12 luglio 2017

Esercizio 1. *(5 punti) Sia* $\{u_n\}_n$ *la successione di Fibonacci* ($u_0 = 0$, $u_1 = 1$ *e* $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ *per ogni* $n \geq 2$*). Provare che per ogni intero* $n \geq 1$ *vale*

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

Esercizio 2. *(9 punti) Sull'insieme* $A = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *si consideri la seguente relazione, per ogni* $(a, b), (c, d) \in A$

$$(a, b) \sim (c, d) \quad se \quad 2^{a+d} \equiv 2^{c+b}\,(mod\,7).$$

(a) *Provare che* $\sim$ *è una relazione d'equivalenza su* A*.*

(b) *Detta* f *la funzione definita da* A *in* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *tale che* $f(a, b) = a - b + 3\mathbb{Z}$*, per ogni* $(a, b) \in A$*, provare che* $\sim_f = \sim$*.*

(c) *Determinare la cardinalità dell'insieme quoziente* $A/\sim$ *ed un suo sistema di rappresentanti.*

Esercizio 3. *(10 punti) Sia* A *un anello,* $n \geq 2$ *un intero, e sia* B *l'anello, rispetto alle usuali operazioni, delle funzioni da* A *in* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *(non occorre dimostrare che* B *è un anello).*

(a) *Si determinino i divisori dello zero e gli elementi invertibili dell'anello* B*.*

(b) *Si determini la caratteristica di* B*.*

(c) *Sia* $I = \{f \in B \mid f(0_A) = 0 + n\mathbb{Z}\}$*. Si provi che* I *è un ideale di* B *e si determinino gli interi* $n \geq 2$ *per cui* I *è un ideale primo di* B*.*

Esercizio 4. *(7 punti) Dato un numero primo* p*, siamo* $f = x^3 - x^2 + x + 5$ *e* $g = x^3 + x$ *polinomi in* $\mathbb{Z}_p[x]$ *(dove al solito* $\mathbb{Z}_p = \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$*). Sia inoltre* $I = (f, g)$ *l'ideale generato da* f *e* g *in* $\mathbb{Z}_p[x]$*.*

(a) *Si determinino i numeri primi* p *per cui* I *è un ideale proprio e quelli per cui* I *è un ideale massimale.*

(b) *Si determini (se esiste) l'inverso di* $x + 1 + I$ *nell'anello* $\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{I}$*.*