Prima Prova Intermedia di Algebra II
13/11/2017

Esercizio 1 (9 punti) Sia $F = \mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$ e $G = \{(a, b) \mid a, b \in F, a \neq 0\}$.

1. Provare che G è un gruppo rispetto alla operazione definita da, per $(a_0, b_0), (a, b) \in G$,
$$(a_0, b_0) \cdot (a, b) = (a_0 a, a_0 b + b_0 a^{-1})$$
(non occorre dimostrare che l'operazione è associativa).
Provare che $N = \left\{(\overline{1}, b) \mid b \in F\right\}$ è un sottogruppo normale di G.
2. Si determini l'ordine dell'elemento $(\overline{2}, \overline{1})N$ nel gruppo quoziente G/N.
3. Si determini il numero dei sottogruppi di G che contengono N.

Esercizio 2 (6 punti) Sia G il gruppo definito nell'Esercizio 1 e, per $z \in \mathbb{Z}$, si scriva $\overline{z} = z + 31\mathbb{Z}$. Sia $U = U_{31} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha^{31} = 1\}$. Si provi che porre, per $(\overline{z}, \overline{w}) \in G$ e $\alpha \in U$,
$$(\overline{z}, \overline{w}) \cdot \alpha = \alpha^z$$
definisce una azione di G su U. Si determinino il nucleo e le orbite di tale azione.

Esercizio 3 (8 punti)

1. Nel gruppo simmetrico S_{10} sia
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 10 & 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Scrivere σ come prodotto di cicli disgiunti; determinare l'ordine di σ e il centralizzante $C_{S_{10}}(\sigma)$.
2. Sia $\alpha \in S_n$, $\alpha = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m$ prodotto di cicli disgiunti, con γ_i a_i-ciclo. Supponendo $n = \sum_{i=1}^{m} a_i$ e che $(a_i, a_j) = 1$ per ogni $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$, si determini $C_{S_n}(\alpha)$.

Esercizio 4 (9 punti) Sia G un gruppo d'ordine 935

1. Provare G ha un 17-sottogruppo di Sylow normale P.
2. Provare che $P \leq Z(G)$ e che se G non è abeliano allora $Z(G) = P$.
3. Si provi che se esiste un omomorfismo non banale $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{Z}/352\mathbb{Z}$, allora G è ciclico.