Compito di Algebra II
21/05/2015

Esercizio 1 (6 punti) Siano m ed n due interi positivi e sia

$$\Omega = \Omega_{m,n} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n | x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m\}.$$

Sia $G = S_n$. Si provi che ponendo per ogni $\sigma \in G$ ed ogni $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$

$$\sigma \cdot \underline{x} = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$$

si definisce un'azione di G su Ω. Si calcolino le orbite nel caso $(m, n) = (2, 3)$.

Esercizio 2 (8 punti) Nel gruppo simmetrico S_9 sia

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scriva α come prodotto di cicli disgiunti e si dica se α è una permutazione pari o dispari.

(b) Si determini il numero delle trasposizioni $(a\ b) \in S_9$ tali che $(a\ b)A_9 = \alpha A_9$.

(c) Si determini il numero degli omomorfismi dal gruppo $A = \langle \alpha \rangle$ nel gruppo (additivo) $B = \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$.

Esercizio 3 (14 punti) Sia $\alpha = \sqrt{\sqrt{2} + 1} \in \mathbb{C}$.

(a) Determinare il polinomio minimo f di α su $\mathbb{Q}$ e tutte le sue radici complesse.

(b) Prese due arbitrarie radici β e γ di f, determinare il grado di $\mathbb{Q}[\beta\gamma]$ su $\mathbb{Q}$.

(c) Dire se l'estensione $\mathbb{Q}[\alpha]|\mathbb{Q}$ è normale e/o separabile.

(d) Detto E il campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$ determinare ordine e tipo di isomorfismo del gruppo di Galois $Gal(E|\mathbb{Q})$.

(e) Determinare il numero dei campi intermedi L di $E/\mathbb{Q}$ tali che $|L : \mathbb{Q}| = 4$.

Esercizio 4 (4 punti) Sia E/F una estensione di campi e siano $a, b \in E$ tali che a è algebrico su F e b è trascendente su F. Si dica se $a + b$ è algebrico o trascendente su F.