Compito di Algebra II
23/02/2015

Esercizio 1 (10 punti) Sia $f(X) = x^7 - x + 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$ e sia α una radice di f in una opportuna estensione di $\mathbb{Z}_7$. Provare quanto segue:

1. $\alpha \notin \mathbb{Z}_7$ e tutte le radici di f sono della forma $\alpha + b$, al variare di $b \in \mathbb{Z}_7$.
2. f è irriducibile in $\mathbb{Z}_7[x]$. (Sugg.: usare il punto precedente).
3. $E = \mathbb{Z}_7[\alpha]$ è campo di spezzamento per f su $\mathbb{Z}_7$.
4. Posto $G = Gal(E|\mathbb{Z}_7)$, trovare l'ordine di G, dire se G è ciclico e determinare i campi intermedi L, con $\mathbb{Z}_7 \subseteq L \subseteq E$.

Esercizio 2 (8 punti) Sia G un gruppo finito d'ordine $1265 = 5 \cdot 11 \cdot 23$.

1. Si provi che G possiede un unico sottogruppo d'ordine 23.

   Supponendo che esista un omomorfismo non banale da G in $\mathbb{Z}_{46}$, allora si provi che:

2. esiste un sottogruppo normale K di G tale che $[G : K] = 23$.
3. esiste un sottogruppo normale N di G tale che $[G : N] = 5$.

Esercizio 3 (14 punti) Sia $f(x) = x^7 - 7 \in \mathbb{Q}[x]$, $E \subseteq \mathbb{C}$ il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ e sia $G = Gal(E|\mathbb{Q})$.

(a) Si determini $|G|$.

(b) Sia $\Omega = \{(\zeta^a, \alpha\zeta^b) \mid 1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 7\}$ dove $\zeta = e^{\frac{2\pi}{7}i}$ e $\alpha = \sqrt[7]{7}$. Si provi che porre, per $g \in G$ e $(x, y) \in \Omega$, $g \cdot (x, y) = (g(x), g(y))$ definisce un'azione di G su Ω.

(c) Dato $\omega = (\zeta^a, \alpha\zeta^b) \in \Omega$, si provi che $E = \mathbb{Q}[\zeta^a, \alpha\zeta^b]$, $G_\omega = 1$ e che l'azione di G su Ω è transitiva.

(d) Si provi che esiste un unico campo L tale che $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq E$ e $[L : \mathbb{Q}] = 6$.

(e) Posto $N = Gal(E|L)$, si provi che N è un sottogruppo normale di G e che G/N è ciclico.