Compito di Algebra II
8/06/2015

Esercizio 1 (10 punti) Sia p un numero primo e sia

$$G = \{(a, b) \ : \ a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} | \ b \neq 0\}.$$

Si provi che G è un gruppo rispetto all'operazione definita ponendo, per $(a, b), (c, d) \in G$

$$(a, b)(c, d) = (c + ad, bd) \ .$$

Si provi che porre, per $(a, b) \in G$ e $(x, y) \in \Omega = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,

$$(a, b) \cdot (x, y) = (x + ay, by)$$

definisce una azione di G su Ω. Si determinino il nucleo e i punti fissi di tale azione.

Esercizio 2 (8 punti)
Sia G un gruppo di ordine 12 e sia P un 3-sottogruppo di Sylow di G .

(a) Si provi che se P è un sottogruppo normale di G, allora $Z(G) \neq 1$.

(b) Supponendo $Z(G) = 1$, si provi che G è isomorfo al gruppo alterno A_4.

Esercizio 3 (10 punti) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 1$ una radice del polinomio $x^{37} - 1$. Sia $E = \mathbb{Q}[\alpha]$ e sia $G = Gal(E|\mathbb{Q})$.

(a) Si provi che per ogni numero intero k, $k \not\equiv 0 \pmod{37}$, esiste un automorfismo $\phi_k \in G$ tale che $\phi_k(\alpha) = \alpha^k$.

(b) Si provi che G è isomorfo al gruppo moltiplicativo $U = (\mathbb{Z}/37\mathbb{Z})^\times$ delle classi di resto (non nulle) modulo 37.

(c) Si determini il numero dei campi intermedi della estensione $E|\mathbb{Q}$.

(d) Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irriducibile; si provi che

$$|\{\gamma \in \mathbb{C} \mid f(\gamma) = 0\} \cap E| \in \{0, deg(f)\} \ .$$

Esercizio 4 (4 punti) Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio non costante, K il campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$ e $H = Gal(K|\mathbb{Q})$. Considerando l'azione di H su $R = \{a \in K | f(a) = 0\}$ (azione definita ponendo, per $\alpha \in H$ e $a \in R$, $\alpha \cdot a = \alpha(a)$), si provi che se tale azione è transitiva, allora f è una potenza di un polinomio irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.