ALGÈBRE IV - CORRECTIONS DES QUELQUES EXERCICES DES FEUILLES DE TD 7 ET 8 UPPA - ANNÉE 2009-2010

DANIELE FAENZI

Correction 1 (Correction de l'exercice 4 de la feuille 7)**.** L'application q est une forme quadratique, grâce au critère polynomiale. Soit B la base canonique.

(1) Écrivons la matrice de q dans la base B.

$$\mathrm{M}_B(q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Nous savons que, si $X = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}}$ sont les coordonnées d'un vecteur u, alors :

$$q(u) = X^{\mathrm{t}}\mathrm{M}_B(q)X.$$

Par ailleurs, si α est un endomorphisme de E, nous pouvons écrire sa matrice $\mathrm{M}_B(\alpha)$ dans la base B. On aura :

$$\alpha(u) = \mathrm{M}_B(\alpha)X.$$

Rappelons que, si Y sont les coordonnées d'un vecteur v de E, alors :

$$\langle v, u\rangle = Y^{\mathrm{t}}X.$$

Donc nous pouvons écrire :

$$\langle \alpha(u), u\rangle = (\mathrm{M}_B(\alpha)X)^{\mathrm{t}}X = X^{\mathrm{t}}\mathrm{M}_B(\alpha)^{\mathrm{t}}X,$$

et si on veut que $\langle \alpha(u), u\rangle = q(u)$ on peut poser :

$$\mathrm{M}_B(\alpha)^{\mathrm{t}} = \mathrm{M}_B(q),$$

donc

$$\mathrm{M}_B(\alpha) = \mathrm{M}_B(q),$$

puisque $\mathrm{M}_B(q)$ est symétrique. La matrice de α est donc symétrique aussi, et α est symétrique.

(3) Les valeurs propres de $\mathrm{M}_B(q)$ sont $0, 1, 3$, ce qu'on voit aisément par le calcul du polynôme caractéristique. Il existe donc une base B' orthonormée de vecteurs propres de $\mathrm{M}_B(q)$. On calcule les espaces propres :

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathrm{vect}\left((1, -1, -1)^{\mathrm{t}}\right), \\ V_1 &= \mathrm{vect}\left((0, 1, -1)^{\mathrm{t}}\right), \\ V_3 &= \mathrm{vect}\left((2, 1, 1)^{\mathrm{t}}\right). \end{aligned}$$

En normalisant les vecteurs ci-dessus on obtient une matrice de passage P à la base B' :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

Date: 4 mai 2010.

Nous avons alors :

$$P^{\mathrm{t}}\mathrm{M}_B(q)P = \mathrm{diag}(0, 1, 3).$$

Puisque P est orthogonale, nous avons $P^{-1} = P^{\mathrm{t}}$. Dans la base B', la matrice de α est donc

$$\mathrm{M}_{B'}(\alpha) = P^{-1}\mathrm{M}_B(q)P = \mathrm{diag}(0, 1, 3).$$

Correction 2 (Correction de l'exercice 3 de la feuille 8)**.** Cet exercice est en partie analogue au devoir concernant la première partie du cours.

(1) Montrons que φ est hermitienne. Soit donc A_1, A_2, A, B_1, B_2, B dans E et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, B) = \mathrm{tr}((\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)^{\mathrm{t}}\overline{B}) &= \\ = \lambda_1 \mathrm{tr}(A_1^{\mathrm{t}}\overline{B}) + \lambda_2 \mathrm{tr}(A_2^{\mathrm{t}}\overline{B}) &= \\ = \lambda_1 \varphi(A_1, B) + \lambda_2 \varphi(A_2, B)&,\end{aligned}$$

donc φ est linéaire en la première variable. On a aussi :

$$\begin{aligned}\varphi(A, \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2) = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}}\overline{\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2}) &= \\ = \overline{\mu_1}\mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}}\overline{B_1}) + \overline{\mu_2}\mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}}\overline{B_2}) &= \\ = \overline{\mu_1}\varphi(A, B_1) + \overline{\mu_2}\varphi(A, B_2)&,\end{aligned}$$

donc φ est antilinéaire en la deuxième variable. De plus :

$$\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}}\overline{B}) = \mathrm{tr}(\overline{B}^{\mathrm{t}}A) = \overline{\mathrm{tr}(B^{\mathrm{t}}\overline{A})} = \overline{\varphi(A, B)},$$

donc φ est hermitienne.

(2) Pour montrer que φ est définie positive, nous écrivons la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$. Cela se fait comme dans le devoir, en calculant $\mathrm{tr}(A_i^{\mathrm{t}}A_j)$, qui équivaut à $\mathrm{tr}(A_i^{\mathrm{t}}\overline{A_j})$ car les A_j sont réelles. On obtient, en calculant ces 16 produits :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathbb{I}_4.$$

Alors, pour une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},$$

nous avons :

$$\begin{aligned}\varphi(A, A) &= (a_1, a_2, a_3, a_4)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)\overline{(a_1, a_2, a_3, a_4)}^{\mathrm{t}} = \\ &= a_1\overline{a_1} + a_2\overline{a_2} + a_3\overline{a_3} + a_4\overline{a_4} = \\ &= \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \|a_3\|^2 + \|a_4\|^2,\end{aligned}$$

donc φ est définie positive.

(3) Écrivons d'abord la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Pour cela, on calcule :

$$\overline{J}A_1J = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{J}A_2J = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix},$$

$$\overline{J}A_3J = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \qquad \overline{J}A_4J = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

On en obtient la matrice de f, en arrangeant en colonne les coordonnées des vecteurs $f(A_j)$ (par exemple $f(A_1) = A_1 + iA_2 - iA_3 + A_4$).

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 1 \\ i & 1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 1 & i \\ 1 & -i & i & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée, on peut calculer la matrice de f^* par :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f^*) = \overline{\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ -i & 1 & 1 & i \\ i & 1 & 1 & -i \\ 1 & i & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Une autre méthode pour calculer f^* est la suivante. On sait que, étant données $A, B \in E$, on a :

$$\langle f^*(A), B\rangle = \langle A, f(B)\rangle = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}}\overline{\overline{J}BJ}) = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}}J\overline{BJ}).$$

Remarquons que :

$$\langle JA\overline{J}, B\rangle = \mathrm{tr}((JA\overline{J})^{\mathrm{t}}\overline{B}) = \mathrm{tr}(\overline{J}^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}J^{\mathrm{t}}\overline{B}) = \mathrm{tr}(\overline{J}A^{\mathrm{t}}J\overline{B}),$$

où la dernière égalité vient de la symétrie de J. On sait que la trace ne change pas lorsqu'on conjugue par une matrice inversible. Ici on conjugue par $\overline{J}$:

$$\mathrm{tr}(\overline{J}A^{\mathrm{t}}J\overline{B}) = \mathrm{tr}((\overline{J}^{-1}\overline{J}A^{\mathrm{t}}J\overline{BJ}) = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}}J\overline{BJ}) = \langle JA\overline{J}, B\rangle.$$

On en obtient :

$$f^*(A) = JA\overline{J}.$$

(4) Pour montrer que f est normal, on peut :
- calculer $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f^*)$ et $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f^*)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ et remarquer que ces deux matrices sont identiques ;
- calculer :

$$f(f^*(A)) = \overline{J}JA\overline{J}J = 2\mathbb{I}_2\,A\,2\mathbb{I}_2 = 4A,$$

et aussi :

$$f^*(f(A)) = J\overline{J}AJ\overline{J} = 2\mathbb{I}_2\,A\,2\mathbb{I}_2 = 4A,$$

donc $f \circ f^* = f^* \circ f$.

(5) Nous savons que f, en étant normal, est diagonalisable. Donc $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est semblable à la matrice $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, où les λ_j sont les valeurs propres de f. Pour calculer les valeurs propres on peut :
- calculer $\det(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda\mathbb{I}_4)$, et découvrir que que ce polynôme admet la racine 2 avec multiplicité 2 et les racines simples $2i, -2i$;
- poser $g = 1/2f$, et remarquer $g^4 = \mathrm{id}_E$. Les valeurs propres de g sont donc des racines quatrièmes de 1, donc ± 1, $\pm i$. La trace de g vaut 2, donc on peut avoir les valeurs propres :

$$\{1, 1, 1, -1\}, \qquad \{1, 1, i, -i\}.$$

Mais la première possibilité ne peut pas avoir lieu, car elle implique $g^2 = \mathrm{id}_E$, ce qui n'est pas.

E-mail address: daniele.faenzi@univ-pau.fr

Université de Pau et des Pays de l'Adour, L.M.A., I.P.R.A. Avenue de l'université BP 1155, 64013 PAU Cedex, Téléphone : +33(0)05 40 17 51 78, Télécopie : +33(0)5 59 40 70 01 http://www.univ-pau.fr/~faenzi