ALGÈBRE IV - DEVOIR 2
UPPA - ANNÉE 2009-2010

DANIELE FAENZI

Exercice 1. Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et soit α un endomorphisme symétrique de E.

(1) Montrer que α est orthogonal si et seulement son polynôme minimal divise $1 - X^2$.

(2) Montrer que toutes les valeurs propres de α sont ≥ 0 si et seulement si :

$$\langle u, \alpha(u) \rangle \geq 0, \quad \forall u \in E. \tag{A}$$

(3) Montrer que, si (A) est vérifiée, alors un vecteur propre de α^k est un vecteur propre de α.

(4) Soit α et β symétriques satisfaisant (A). Montrer que $\alpha^k = \beta^k$ implique $\alpha = \beta$.

Correction 1. L'endomorphisme α est symétrique, ce qui veut dire que α est égal à son adjoint α^*. Par ailleurs, nous savons que α^* est défini par la formule :

$$\langle \alpha^*(u), v \rangle = \langle u, \alpha(v) \rangle.$$

(1) Soit P un polynôme en X à coefficients réels donc $P(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}$. On dit que α annule P si $P(\alpha) = 0$, i.e. si $a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \mathrm{id}_E = 0$. Rappelons que le polynôme minimale $p_\alpha(t)$ est l'unique polynôme unitaire $p_\alpha(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}$ qui divise tout autre polynôme P qui annulé par α.

Cela dit, nous remarquons que α est orthogonal si et seulement si $\alpha^* \circ \alpha = \mathrm{id}_E$, car ceci équivaut à avoir α inversible et $\alpha^{-1} = \alpha^*$. Donc, puisque α est symétrique, il est orthogonal si et seulement si :

$$\alpha^2 = \mathrm{id}_E.$$

Or, si l'égalité ci-dessus est vérifié, bien entendu α annule $1 - X^2$ donc $p_\alpha(X)$ divise $1 - X^2$. Vice versa, si $p_\alpha(X)$ divise $1 - X^2$, alors α annule $1 - X^2$ donc $\alpha^2 = \mathrm{id}_E$, ce qui veut dire que α est orthogonal.

(2) Supposons que (A) soit valide, soit λ une valeur propre de α et soit $u \neq 0$ un vecteur propre de valeur propre λ. Donc $\alpha(u) = \lambda u$. Par (A) on obtient :

$$0 \leq \langle u, \alpha(u) \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle = \lambda \|u\|^2,$$

donc $\lambda \geq 0$.

Pour la réciproque, nous utilisons le théorème spectral. Ce dernier garantit qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ orthonormée de vecteurs

Date: 2 mai 2010.

propres de α. Donc $\alpha(e_i) = \lambda_i e_i$, avec, par hypothèse, $\lambda_i \geq 0$ pour tout i. Soit u un vecteur de E. Il existent alors des $a_i \in \mathbb{R}$ tels que $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Donc :

$$\begin{aligned}\langle u, \alpha(u)\rangle &= \langle \sum_{i=1,\dots,n} x_i e_i, \alpha\left(\sum_{j=1,\dots,n} x_j e_j\right)\rangle = \\ &= \sum_{i,j=1,\dots,n} x_i x_j \langle e_i, \alpha(e_j)\rangle = \\ &= \sum_{i,j=1,\dots,n} x_i x_j a_j \lambda_j \langle e_i, e_j\rangle = \\ &= \sum_{i,j=1,\dots,n} x_i x_j a_j \lambda_j \delta_{i,j} = \\ &= \sum_{j=1,\dots,n} \lambda_j x_j^2,\end{aligned}$$

et cette quantité est ≥ 0 car $\lambda_i \geq 0$ pour tout i. Nous avons donc (A).

(3) Soit $\lambda_1 < \cdots < \lambda_s$ les valeurs propres de α, et soit V_{λ_i} l'espace propre de la valeur propre λ_i. Posons $n_i = \dim(V_{\lambda_i})$. D'après le théorème spectral, α est diagonalisable, donc $E = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$. Donc $n_1 + \cdots + n_s = n$. De plus, nous savons que $V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j}$, pour tout $i \neq j$.

Remarquons que, si $v \in V_{\lambda_i}$, on a $\alpha^k(v) = \lambda_i^k v$. L'espace propre U_i de la valeur propre λ_i^k de α^k contient donc V_{λ_i}. En particulier $\dim(U_i) \geq n_i$.

Nous avons $\lambda_1^k < \cdots < \lambda_s^k$, car $\lambda_i \geq 0$ pour tout i, donc α^k a du moins les valeurs propres distinctes $\lambda_1^k, \dots, \lambda_s^k$, donc $U_i \perp U_j$ si $i \neq j$. Donc $U_i \cap U_j = \{0\}$ si $i \neq j$, ce qui implique $n \leq \dim(U_1) + \cdots + \dim(U_s)$. Mais comme $\dim(U_i) \geq n_i$ et $n_1 + \cdots + n_s = n$, nous avons $\dim(U_i) = n_i$ pour tout i. Donc α^k n'admet que les valeurs propres $\lambda_1^k, \dots, \lambda_s^k$, dont les espaces propres sont $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_n}$.

Nous avons donc que, si u est un vecteur propre de α^k, u appartient à V_{λ_i} pour un certain i, donc u est un vecteur propre de α.

(4) Soit $\lambda_1 < \cdots < \lambda_s$ les valeurs propres de α, V_{λ_i} l'espace propre de λ_i. Par le théorème spectral, on sait $E = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$.

Supposons $\alpha^k = \beta^k$. Soit u un vecteur de V_{λ_i} pour un certain i. Donc $\alpha^k(u) = \lambda_i^k u$ et par hypothèse $\beta^k(u) = \lambda_i^k u$. Alors u est un vecteur propre de β^k, de valeur propre λ_i^k. Donc, par le point précédant, nous avons que u est un vecteur propre de β, de valeur propre λ_i (car β aussi satisfait (A)). Donc α et β coïncident sur V_{λ_i}. Comme $E = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$, α et β coïncident partout.

E-mail address: `daniele.faenzi@univ-pau.fr`

Université de Pau et des Pays de l'Adour, L.M.A., I.P.R.A. Avenue de l'université BP 1155, 64013 PAU Cedex, Téléphone : +33(0)05 40 17 51 78, Télécopie : +33(0)5 59 40 70 01 `http://www.univ-pau.fr/~faenzi`