ALGÈBRE IV - FEUILLE D'EXERCICES 1

DANIELE FAENZI

Exercice 1. Soit $B = (b_1, \dots, b_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base de E. Notons par P la matrice de passage de B à B'.

– Montrer que si les coordonnées d'un vecteur x dans la base B sont donné par le vecteur colonne X, alors celles dans la base B' sont données par le vecteur colonne $X' = P^{-1}X$.
– Soit $C = (c_1, \dots, c_m)$ une base d'un espace vectoriel F, et $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$. Rappelons que la matrice $(a_{ij})_{ij} = M_{B,C}(\varphi)$ est donné par :
$$\varphi(b_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, c_j.$$
Démontrer que, si $C' = CQ$ est une base obtenue par une matrices de passage Q, on a :
$$M_{B',C'}(\varphi) = Q^{-1} M_{B,C}(\varphi) P.$$
Appliquer la formule au cas de φ endomorphisme de E.
– Pour tout $\varphi \in E^*$, démontrer que :
$$\varphi = \sum_{i=1,\dots,n} \varphi(b_i) b_i^*.$$
Quelle est la matrice de passage de B^* à $(B')^*$?

Exercice 2. Soit $\mathbb{K}$ un corps, et soit $\mathscr{B}(\mathbb{K}^n)$ l'espace des formes bilinéaires sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. Notons par $\mathscr{S}(\mathbb{K}^n)$ (resp. $\mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$) l'espace des formes bilinéaires symétriques (resp. antisymétriques) sur $\mathbb{K}^n$.

(1) Décrire une base explicite de $\mathscr{S}(\mathbb{K}^4)$.
(2) Calculer la dimension de $\mathscr{B}(\mathbb{K}^n)$, $\mathscr{S}(\mathbb{K}^n)$ et $\mathscr{A}(\mathbb{K}^n)$.
(3) Décrire un isomorphisme entre $\mathscr{S}(\mathbb{K}^n)$ et $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_2$.

Exercice 3. Pour quelles valeurs des paramètres λ_i les fonctions ci-dessous définissent-elles des formes bilinéaires sur $\mathbb{C}^3$? Des formes bilinéaires symétriques ?

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= (\lambda_3 - 4)x_1^3 + \lambda_1 x_1 y_1 + 6x_2 y_2 + 2x_1 y_2 + \lambda_2 x_2 y_1 + 3\lambda_1 x_1 y_3 + (\lambda_2 + 2\lambda_3)x_3 y_1,\\
\psi(x, y) &= x_1 y_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)x_1 y_2 + x_1 y_3 +\\
&\quad + (\lambda_3 - \lambda_1)x_2 y_1 + x_2 y_2 + \lambda_3 x_2 y_3 +\\
&\quad + \lambda_5 x_3 y_1 - \lambda_2 x_3 y_2 + \lambda_2 x_3 y_3.
\end{aligned}$$

(1) Si φ est bilinéaire et $x \in \mathbb{C}^3$, on note par φ_x la forme linéaire :
$$\varphi_x : y \mapsto \varphi(y, x).$$
Existent-elles des valeurs des λ_i telles que le morphisme $x \mapsto \varphi_x$ ait un noyau non trivial ? Quel est le noyau en ce cas ?
(2) Déterminer les valeurs des paramètres λ_i tels que ψ soit une forme bilinéaire symétrique dégénérée.

Date: 21 janvier 2009.

E-mail address: `daniele.faenzi@univ-pau.fr`

Université de Pau et des Pays de l'Adour, L.M.A., I.P.R.A. Avenue de l'université BP 1155, 64013 PAU Cedex, Téléphone : +33(0)5 59 40 75 15, Télécopie : +33(0)5 59 40 70 01