ALGÈBRE IV - FEUILLE D'EXERCICES 2

DANIELE FAENZI

Exercice 1. Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{K}[t]_{\leq 2}$ des polynômes en la variable t et coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré au plus 2. Soit φ l'application qui associe à un couple (p,q) d'éléments de E le scalaire :

$$\varphi(p,q) = \int_0^1 p(t)q(1-t)dt.$$

i) La fonction φ est-elle une forme bilinéaire ? Symétrique ?

ii) Calculer l'orthogonal de l'ensemble $A = \{t^2 - t + 1, t^2 + t + 1, 5t\} \subset E$.

iii) Écrire une matrice de φ_F, où $F = \text{vect}(A)$. Quel est le rang de φ_F ?

Corrigé 1. L'espace vectoriel E est de dimension 3 et on peut choisir comme base :

$$B = (1, t, t^2).$$

Un polynôme p de degré au plus 2 et de la forme $p = at^2 + bt + c$, donc les coordonnées de p dans la base B sont donnés par le vecteur colonne $(c, b, a)^{\mathrm{t}}$.

On répond maintenant aux questions posées dans l'exercice.

i) L'application φ est une forme bilinéaire. Pour prouver cela, on doit démontrer que, si λ_1, λ_2 appartiennent à $\mathbb{K}$, et p, p_1, p_2, q, q_1, q_2, appartiennent à E, alors :

$$\varphi(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2, q) = \lambda_1 \varphi(p_1, q) + \lambda_2 \varphi(p_2, q). \tag{1}$$

$$\varphi(p, \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2) = \lambda_1 \varphi(p, q_1) + \lambda_2 \varphi(p, q_2). \tag{2}$$

Or par les propriétés de linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_0^1 (\lambda_1 p_1(t) + \lambda_2 p_2(t))q(1-t)dt = \lambda_1 \int_0^1 p_1(t)q(1-t)dt + \lambda_2 \int_0^1 p_2(t)q(1-t)dt,$$

$$\int_0^1 p(t)(\lambda_1 q_1(1-t) + \lambda_2 q_2(1-t))dt = \lambda_1 \int_0^1 p(t)q_1(1-t)dt + \lambda_2 \int_0^1 p(t)q_2(1-t)dt,$$

Les propriétés (1) et (2) de φ en découlent aussitôt.

Pour montrer que φ est symétrique (la réponse sera donc "oui" aux deux questions) il va falloir prouver :

$$\varphi(p,q) = \varphi(q,p),$$

pour tout $p, q \in E$. Cela revient à prouver :

$$\int_0^1 p(t)q(1-t)dt = \int_0^1 q(t)p(1-t)dt. \tag{3}$$

Date: 12 février 2009.

Au second membre de l'équation ci-dessus on peut utiliser un changement de variables : $s = 1 - t$. On en obtient :

$$\int_0^1 q(t)p(1-t)dt = \int_1^0 -q(1-s)p(s)ds = \int_0^1 q(1-s)p(s)ds,$$

et cette quantité est égale à $\int_0^1 p(t)q(1-t)dt$, ce qui prouve (3).

Avant de répondre à (ii), on calcule la matrice $M = \mathrm{M}_B(\varphi)$. Par définition $M = (m_{i,j})_{i,j=1,2,3}$ avec $m_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$, où on note les vecteurs de base par $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2$. Par exemple on aura :

$$m_{1,1} = \varphi(e_1, e_1) = \int_0^1 dt = 1$$
$$m_{1,2} = \varphi(e_1, e_2) = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$$
$$m_{1,3} = \varphi(e_1, e_3) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Par des simples calculs on arrive à écrire la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}.$$

ii) On rappelle que l'orthogonal $A^\perp$ de A est égale à l'orthogonal de $\mathrm{vect}(A)$. Or $\mathrm{vect}(A) = \mathrm{vect}(t^2+1, t)$, car les deux vecteurs t^2+1 et t appartiennent à $\mathrm{vect}(A)$, ils sont indépendants, et on voit facilement que $\dim(A) = 2$. Les coordonnées de ces deux vecteurs dans la base B sont respectivement $(1,0,1)^{\mathrm{t}}$ et $(0,1,0)^{\mathrm{t}}$. On a donc $A^\perp = \{t^2+1, t\}^\perp$, et on calcule ce dernier sous-espace.

$$\{t^2+1, t\}^\perp = \{p \in E \mid \varphi(t^2+1, p) = \varphi(t, p) = 0\}.$$

Si p est de la forme $at^2 + bt + c$, on a les coordonnées $(c, b, a)^{\mathrm{t}}$ de p. On calcule alors :

$$\varphi(t^2+1, p) = (1,0,1) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \frac{4}{3}c + \frac{7}{12}b + \frac{11}{30}a;$$
$$\varphi(t, p) = (0,1,0) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{6}b + \frac{1}{12}a.$$

Donc un polynôme p est dans $A^\perp$ si et seulement si p vérifie ces deux équations à la foi, c'est-à-dire si :

$$\begin{cases} \frac{4}{3}c + \frac{7}{12}b + \frac{11}{30}a = 0, \\ \frac{1}{2}c + \frac{1}{6}b + \frac{1}{12}a = 0. \end{cases}$$

Il est facile de démontrer que ce deux équations définissent un sous-espace vectoriel de E de dimension 1, engendré par le vecteur dont les coordonnées sont :

$$\left(1, -\frac{52}{50}, \frac{9}{50}\right)^{\mathrm{t}}.$$

Donc :

$$A^{\perp} = \operatorname{vect}\left(\left(1, -\frac{52}{50}, \frac{9}{50}\right)^{\mathrm{t}}\right).$$

iii) On note $F = \operatorname{vect}(A)$. Pour écrire une matrice de φ_F il faut d'abord choisir une base $C = (f_1, f_2)$ de F (on a dit que F est de dimension 2). On prend alors $f_1 = t^2 + 1$ et $f_2 = t$. On doit donc calculer :

$$\varphi_F(f_1, f_1) = \varphi(f_1, f_1) = (1, 0, 1)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{17}{10},$$

$$\varphi_F(f_1, f_2) = \varphi(f_1, f_2) = (1, 0, 1)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{7}{12},$$

$$\varphi_F(f_2, f_2) = \varphi(f_2, f_2) = (0, 1, 0)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6},$$

et remarquons que $\varphi_F(f_1, f_2) = \varphi_F(f_2, f_1)$ car φ est symétrique donc φ_F aussi. La matrice $\mathrm{M}_C(\varphi_F)$ est donc :

$$\begin{pmatrix} \frac{17}{10} & \frac{7}{12} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n sur $\mathbb{K}$.

(1) Montrer que l'application φ définie par :

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ &(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}}B), \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire symétrique. Quel est son rang ?

(2) Étant choisie une base B de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, écrire la matrice $\mathrm{M}_B(\varphi)$.

(3) Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques.

Corrigé 2. On rappelle d'abord que $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension n^2. Une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ (celle qu'on appelle la *base canonique*) est donnée par :

$$\mathcal{B} = (E_{1,1}, \ldots, E_{1,n}, \ldots, E_{n,1}, \ldots, E_{n,n}),$$

où les matrices $E_{i,j}$ ont des zéros partout, sauf un coefficient 1 à la colonne numéro j, ligne i.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & \ldots & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array} = E_{i,j}$$

Cela peut s'écrire en formule, en notant par $(e^{i,j})_{h,k}$ le coefficient à la place (h,k) de la matrice $E_{i,j}$:

$$(e^{i,j})_{h,k} = \delta_{i,h}\delta_{j,k}, \tag{4}$$

où δ est le symbole de Kronecker. Une matrice $M = (m_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ s'écrit donc :

$$M = \sum_{i,j=1,\dots,n} m_{i,j} E_{i,j}.$$

On regarde maintenant les questions posées dans le problème.

(1) On vérifie que φ est bilinéaire symétrique. On considère donc des matrices A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ et des scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. On vérifie alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, B) &= \mathrm{tr}((\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)^{\mathrm{t}} B) = \\
&= \mathrm{tr}((\lambda_1 A_1^{\mathrm{t}} + \lambda_2 A_2^{\mathrm{t}}) B) = \\
&= \mathrm{tr}(\lambda_1 A_1^{\mathrm{t}} B) + \mathrm{tr}(\lambda_2 A_2^{\mathrm{t}} B) = \\
&= \lambda_1 \mathrm{tr}(A_1^{\mathrm{t}} B) + \lambda_2 \mathrm{tr}(A_2^{\mathrm{t}} B) = \\
&= \lambda_1 \varphi(A_1, B) + \lambda_2 \varphi(A_2, B). \\
\varphi(A, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) &= \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}}(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)) = \\
&= \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}} \lambda_1 B_1^{\mathrm{t}} B) + \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}} \lambda_2 B_2^{\mathrm{t}}) = \\
&= \lambda_1 \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}} B_1) + \lambda_2 \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}} B_2) = \\
&= \lambda_1 \varphi(A, B_1) + \lambda_2 \varphi(A, B_2).
\end{aligned}$$

Donc l'application φ est une forme bilinéaire. Démontrons qu'elle est symétrique. Pour cela, on remarque que, si C est une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}(C^{\mathrm{t}}).$$

Donc, en posant $C = A^{\mathrm{t}} B$, et vu que $C^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}}(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}} A$, on en obtient :

$$\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}} B) = \mathrm{tr}(B^{\mathrm{t}} A) = \varphi(B, A),$$

donc φ est une forme bilinéaire symétrique.

(2) Pour calculer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$, on doit calculer la valeur de φ sur tous les couples de vecteurs de base, $(E_{i,j}, E_{p,q})$. On est obligés donc de calculer le produit $E_{i,j}^{\mathrm{t}} E_{p,q}$ (ensuite la trace $\mathrm{tr}(E_{i,j}^{\mathrm{t}} E_{p,q})$ de ce produit sera $\varphi(E_{i,j}, E_{p,q})$). Or ce produit est une matrice, dont le coefficient (h,k) se calcule par la formule :

$$\sum_{\ell=1,\dots,n} e_{\ell,h}^{i,j} e_{\ell,k}^{p,q},$$

vu que le coefficient (h,ℓ) de $E_{i,j}^{\mathrm{t}}$ est $e_{\ell,h}^{i,j}$ et le coefficient (ℓ,k) de $E_{p,q}^{\mathrm{t}}$ est $e_{\ell,k}^{p,q}$. En utilisant la formule (4) qui donne l'expression des coefficients $e_{\ell,h}^{i,j}$, on obtient :

$$\sum_{\ell=1,\dots,n} e_{\ell,h}^{i,j} e_{\ell,k}^{p,q} = \sum_{\ell=1,\dots,n} \delta_{i,\ell}\delta_{j,h}\delta_{p,\ell}\delta_{q,k} = \delta_{i,p}\delta_{j,h}\delta_{q,k}.$$

Remarquons que le coefficient (h,k) de $E_{j,q}$ est $e^{j,q}_{h,k} = \delta_{j,h}\delta_{q,k}$. Donc la formule ci-dessus entraîne :

$$\sum_{\ell=1,\dots,n} e^{i,j}_{\ell,h} e^{p,q}_{\ell,k} = \delta_{i,p}(e^{j,q}_{h,k}).$$

Les deux matrices $E^{\mathrm{t}}_{i,j}E_{p,q}$ et $\delta_{i,p}E_{j,q}$ ont donc les mêmes coefficients à la place (h,k), c'est-à-dire :

$$E^{\mathrm{t}}_{i,j}E_{p,q} = \delta_{i,p}E_{j,q}.$$

Rappelons que la trace de $E_{j,q}$ n'est rient d'autre que $\delta_{j,q}$. Donc :

$$\mathrm{tr}(E^{\mathrm{t}}_{i,j}E_{p,q}) = \delta_{i,p}\delta_{j,q},$$

c'est-à-dire :

(5) $$\varphi(E_{i,j}, E_{p,q}) = \delta_{i,p}\delta_{j,q}.$$

La matrice de φ dans notre base est donc l'identité I_{n^2}, car étant donnés deux vecteurs de base A, B, on a $\varphi(A,B) = 1$ si $A = B$ et $\varphi(A,B) = 0$ si $A \neq B$.

(3) On note par $\Delta_n(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices diagonales, et par $\mathbf{S}_n(\mathbb{K})$ celui des matrices symétriques. On sait que une base de $\Delta_n(\mathbb{K})$ est constitué par les éléments $E_{1,1}, \dots, E_{n,n}$. Une matrice A de $\Delta_n(\mathbb{K})$ est donc de la forme :

$$A = \sum_{i=1,\dots,n} a_{i,i}E_{i,i}.$$

On a déjà vu qu'une base de $\mathbf{S}_n(\mathbb{K})$ est constitué par les éléments $E_{1,1}, \dots, E_{n,n}, E_{1,2} + E_{2,1}, \dots, E_{n,n-1} + E_{n-1,n}$. Calculons l'application φ sur un élément de base de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ et matrice générique

$$M = \sum_{i,j=1,\dots,n} m_{i,j}E_{i,j}.$$

On a :

$$\begin{aligned}\varphi(E_{p,q}, M) &= \sum_{i,j=1,\dots,n} m_{i,j} = \varphi(E_{p,q}, E_{i,j}) = \qquad \text{(par (5))}\\ &= \sum_{i,j=1,\dots,n} m_{i,j}\delta_{i,p}\delta_{j,q} = m_{p,q}.\end{aligned}$$

On calcule maintenant l'orthogonal de $\Delta_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}\Delta_n(\mathbb{K})^\perp &= \{E_{1,1}, \dots, E_{n,n}\}^\perp =\\ &= \{M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \mid \varphi(E_{i,i}, M) = 0,\ \forall i = 1, \dots, n\} =\\ &= \{M = \sum_{i,j=1,\dots,n} m_{i,j}E_{i,j} \mid m_{i,i} = 0,\ \forall i = 1, \dots, n\}.\end{aligned}$$

Donc *l'orthogonal de* $\Delta_n(\mathbb{K})$ *est constitué par les matrices avec des zéros sur la diagonale.*

On calcule finalement l'orthogonal de $\mathbf{S}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_n(\mathbb{K}) &= \{E_{1,1}, \ldots, E_{n,n}, E_{1,2}+E_{2,1}, \ldots, E_{n,n-1}+E_{n-1,n}\}^{\perp} = \\
&= \left\{ M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(E_{i,i}, M) = 0, & \forall i = 1, \ldots, n, \\ \varphi(E_{i,j}+E_{j,i}, M) = 0, & \forall i \leq j = 1, \ldots, n \end{array} \right. \right\} = \\
&= \left\{ M = \sum_{i,j=1,\ldots,n} m_{i,j} E_{i,j} \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{ll} m_{i,i} = 0, & \forall i = 1, \ldots, n, \\ m_{i,j} + m_{j,i} = 0, & \forall 1 \leq i < j \leq n \end{array} \right. \right\} = \\
&= \left\{ M = \sum_{i,j=1,\ldots,n} m_{i,j} E_{i,j} \;\mid\; m_{i,j} = -m_{j,i},\ \forall 1 \leq i < j \leq n \right\}.
\end{aligned}$$

Donc *l'orthogonal de* $\mathbf{S}_n(\mathbb{K})$ *est constitué par les matrices antisymétriques.*

E-mail address: `daniele.faenzi@univ-pau.fr`

Université de Pau et des Pays de l'Adour, L.M.A., I.P.R.A. Avenue de l'université BP 1155, 64013 PAU Cedex, Téléphone : +33(0)5 59 40 75 15, Télécopie : +33(0)5 59 40 70 01