

ALGÈBRE IV - FEUILLE D'EXERCICES 2

DANIELE FAENZI

Exercice 1. Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{K}[t]_{\leq 2}$ des polynômes en la variable t et coefficients dans \mathbb{K} , de degré au plus 2. Soit φ l'application qui associe à un couple (p, q) d'éléments de E le scalaire :

$$\varphi(p, q) = \int_0^1 p(t)q(1-t)dt.$$

- i) La fonction φ est-elle une forme bilinéaire ? Symétrique ?
- ii) Calculer l'orthogonal de l'ensemble $A = \{t^2 - t + 1, t^2 + t + 1, 5t\} \subset E$.
- iii) Écrire une matrice de φ_F , où $F = \text{vect}(A)$. Quel est le rang de φ_F ?

Exercice 2. Soit $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n sur \mathbb{K} .

- (1) Montrer que l'application φ définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{K} \\ (A, B) &\mapsto \text{tr}(A^t B), \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire symétrique. Quel est son rang ?

- (2) Étant choisie une base B de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, écrire la matrice $M_B(\varphi)$.
- (3) Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques.

E-mail address: daniele.faenzi@univ-pau.fr

UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR, L.M.A., I.P.R.A. AVENUE DE L'UNIVERSITÉ BP 1155, 64013 PAU CEDEX, TÉLÉPHONE : +33(0)5 59 40 75 15, TÉLÉCOPIE : +33(0)5 59 40 70 01