ALGÈBRE IV - CORRIGÉ PARTIEL DE LA FEUILLE D'EXERCICES 3

DANIELE FAENZI

Exercice 5. On considère $\mathbb{R}^3$, muni de la structure d'espace euclidien standard (ou canonique).

(1) Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par :

$$q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

(a) Montrer que q est positive.

(b) Décrire le noyau de f_q.

(c) Donner la matrice de f_q dans la base canonique.

(d) Décrire un endomorphisme symétrique u de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = \langle u(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3), x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\rangle.$$

(e) Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ qui est orthogonale pour q.

(2) Répondre aux questions précédente en remplaçant la définition de q par :

$$q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = 2x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Exercice 6. Soit E un espace euclidien, et u un endomorphisme symétrique de E. Montrer que u est orthogonal si et seulement si $1 - x^2$ divise le polynôme minimal de u.

Corrigé (Exercice 5.1)**.** Pour montrer que q est positive on pourra utiliser la méthode de Gauss :

$$\begin{aligned}
q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &= 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 = \\
&= 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 = \\
&= 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

pour tout x_1, x_2, x_3. On a donc prouvé (1a).

Pour (1b), on peut utiliser que le noyau $(\mathbb{R}^3)^\perp$ d'une forme positive est l'ensemble des vecteurs isotropes. Donc :

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^3)^\perp &= \{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \mid q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = 0\} = \\
&= \{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \mid 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2 = 0\} = \\
&= \{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \mid x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = x_2 - x_3 = 0\} = \\
&= \{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \mid x_1 = -x_2; x_2 = x_3\} = \\
&= \mathrm{vect}((1, -1, -1)^{\mathrm{t}}).
\end{aligned}$$

Date: 14 mai 2008.

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. La matrice $\mathrm{M}_B(q)$ est alors :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui répond à (1c).

Pour la question (1d), on considère un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$, et on note par $A = \mathrm{M}_B(u)$ sa matrice dans la base canonique B. Si $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, on a $u(x) = B \cdot A \cdot (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}}$. On n'obtient :

$$\begin{aligned} \langle u(x), x\rangle &= (A \cdot (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} \cdot I_3 \cdot (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}} = \\ &= (x_1, x_2, x_3) \cdot A^{\mathrm{t}} \cdot (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}}, \end{aligned}$$

vu que la matrice dans la base canonique de la forme bilinéaire donnée par le produit scalaire est l'identité I_3. D'autre part on a :

$$q(x) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \mathrm{M}_B(q) \cdot (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}}.$$

Donc $q(x) = \langle u(x), x\rangle$ si $A = \mathrm{M}_B(q)$. De plus, comme B est orthonormée, u est symétrique si et seulement si $A = A^{\mathrm{t}}$, ce qui est le cas puisque $\mathrm{M}_B(q)$ est symétrique.

Il suffit donc de définir u comme l'endomorphisme dont la matrice dans B est $\mathrm{M}_B(q)$. C'est-à-dire, on pose :

$$u(x) = u(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = B\mathrm{M}_B(q)(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}}.$$

Pour (1e), on remarque d'abord que, si P est la matrice de passage de B à une base B' orthonormée de valeurs propres pour u, on a :

$$\mathrm{M}_{B'}(u) = P^{-1}\mathrm{M}_B(u)P = P^{\mathrm{t}}\mathrm{M}_B(u)P, \qquad \text{matrice diagonale.}$$

Mais, vu qu'on a imposé $\mathrm{M}_B(u) = \mathrm{M}_B(q)$, on n'obtiendra :

$$\mathrm{M}_{B'}(q) = P^{\mathrm{t}}\mathrm{M}_B(q)P, \qquad \text{matrice diagonale,}$$

ce qui implique que la base B' est orthogonale pour q (et bien entendu orthonormée).

Il faut donc chercher une base orthonormée de vecteurs propres de u. On remarque que u a rang 2 donc 0 est une valeur propre, et on sait que son espace propre est $E^{\mathrm{t}} = \mathrm{vect}((1, -1, -1)^{\mathrm{t}})$. L'orthogonale $E_0^{\perp}$ de cet espace est défini par l'équation $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Une base de $E_0^{\perp}$ est donc :

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 0)^{\mathrm{t}}, \\ v_2 &= (1, 0, 1)^{\mathrm{t}}. \end{aligned}$$

On calcule la matrice de la restriction de q à cet espace par :

$$M_{(v_1,v_2)}(q_{|E_0^{\perp}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

On voit aisément que le polynôme caractéristique de cette matrice admet comme racines 1 et 9. Les espaces propres sont donc :

$$\begin{aligned} E_1 &= \mathrm{vect}(v_1 + v_2) = \mathrm{vect}((2, 1, 1)^{\mathrm{t}}), \\ E_9 &= \mathrm{vect}(v_1 - v_2) = \mathrm{vect}((0, 1, -1)^{\mathrm{t}}). \end{aligned}$$

On normalise et on trouve donc les trois vecteurs :

$$b_1 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})^{\mathrm{t}},$$
$$b_2 = (\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6})^{\mathrm{t}},$$
$$b_3 = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{t}}.$$

La base $B' = (b_1, b_2, b_3)$ est donc orthonormée, et formé par vecteurs propres pour u, ce qui entraîne le résultat.

Cela termine la partie 5.1. Pour la partie 5.2, tous les arguments sont presque les mêmes. L'algorithme de Gauss donne dans ce cas :

$$q = 2(x_1 + 1/2x_2 + 1/2x_3)^2 - 1/4(x_2 + x_3)^2 + 1/4(x_2 - x_3)^2,$$

donc en fait q n'est pas positive (ni négative). Dans ce cas, pour trouver le noyau, il faudra calculer le noyau de :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 0 \\ 1 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Le reste de l'exercice comporte des passages similaires à ceux que l'on vient de voir (les calculs sont dans ce cas un peu longs).

Pour un autre exercice du même genre (mais avec des calculs plus rapides), essayer avec la fonction $q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2$. *Essayer aussi avec* $q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.

Corrigé (Exercice 6)**.** Le polynôme minimal de u divise tous les polynômes $p = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_0$ qui s'annulent en u, c'est-à-dire tels que :

$$p(u) = \alpha_n u^n + \cdots + \alpha_0 = 0.$$

Soit alors u symétrique, et soit A la matrice de u dans une base orthonormée.

Si u est orthogonale, la matrice A satisfait :

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{\mathrm{t}} = A \cdot A = A^2 = I_n,$$

donc $x^2 - 1$ s'annule en A (donc en u).

Réciproquement, si $x^2 - 1$ s'annule en A, alors $A^2 = I_n$, donc $A \cdot A^{\mathrm{t}} = I_n$, vu que $A = A^{\mathrm{t}}$. Cela implique $A^{-1} = A^{\mathrm{t}}$, donc A est orthogonale.