ALGÈBRE IV - FEUILLE D'EXERCICES 6
UPPA - ANNÉE 2008-2009

DANIELE FAENZI

Exercice 1. Soit $M \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. Prouver que $M \neq 0$ implique $M^k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien, et α, β deux endomorphismes symétriques de E. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\alpha \circ \beta$ est symétrique,

ii) $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$,

iii) il existe une base orthonormée de E de vecteurs propres simultanés pour α et β. *(Indication : montrer qu'un espace propre de α est stable pour β si α et β commutent).*

Exercice 3. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, et u, v deux vecteurs de E.

(1) Montrer que, si $\|u\| = \|v\|$, alors il existe un hyperplan H tel que $\sigma_H(u) = v$.

(2) Montrer que, si $\langle u, v\rangle = \|v\|^2$, alors il existe un hyperplan H tel que $\pi_H(u) = v$.

Soit maintenant $u_1, \ldots, u_m$ une base orthonormée d'un sous-espace F de E.

(3) Montrer que $\pi_F(u) = \sum_{i=1}^m \langle u, u_i\rangle u_i$.

(4) Soit $u = (1, 2, 3)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3$, et soit F le plan $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Calculer $\pi_F(u)$.

Exercice 4. Prouver que les matrices suivantes sont orthogonales, et décrire l'isométrie de $\mathbb{R}^3$ qu'elles définissent :

$$A_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit E un espace euclidien, α un endomorphisme de E.

(1) Montrer que si α est symétrique et $\langle u, \alpha(u)\rangle = 0$ pour tout $u \in E$, alors $\alpha = 0$.

(2) Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

i) $\alpha^* \circ \alpha = \alpha \circ \alpha^*$;

ii) pour tous $u, v \in E$, on a $\langle \alpha(u), \alpha(v)\rangle = \langle \alpha^*(u), \alpha^*(v)\rangle$;

iii) pour tout $u \in E$ on a $\|\alpha(u)\| = \|\alpha^*(u)\|$.

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, et q la forme quadratique définie par :

$$q(u) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

(1) Donner la matrice de q dans la base canonique.

(2) Décrire un endomorphisme symétrique α de E tel que $q(u) = \langle \alpha(u), u\rangle$.

(3) Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ qui est orthogonale pour q. Quelle est la matrice de α dans cette base ?

Exercice 7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \neq v \in E$, avec E espace euclidien. Posons $\alpha(u) = u + \lambda\langle u, v\rangle v$.

(1) Dire pour quels λ, v l'endomorphisme α est orthogonal.

(2) Lorsque α est orthogonal, trouver les valeurs propres et les espaces propres de α.

(3) Interpréter de manière géométrique α.

Date: 4 juin 2009.

Les exercices 1, 2, 3, 4.

Corrigé 5. Soit α symétrique.

(1) Rappelons que α est diagonalisable. Soit $B = (u_1, \dots, u_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de α, avec $\alpha(u_i) = \lambda_i u_i$, pour certains $\lambda_i \in \mathbb{R}$, pour $i = 1, \dots, n$. Alors :

$$\langle u_i, \alpha(u_i) \rangle = \lambda_i \langle u_i, u_i \rangle = \lambda_i \langle u_i, u_i \rangle = 0,$$

ce qui implique $\lambda_i = 0$ pour tout i, donc $\alpha = 0$.

(2) Montrons (2i) $\Leftrightarrow$ (2ii) $\Leftrightarrow$ (2iii)

$\boxed{\text{(2i)} \Rightarrow \text{(2ii)}}$ En utilisant les propriétés de l'endomorphisme adjoint, la symétrie du produit scalaire et la condition (2i), on vérifie, pour tout $u, v \in E$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha(u), \alpha(v) \rangle &= \langle \alpha^*(\alpha(u)), v \rangle = \\ &= \langle \alpha(\alpha^*(u)), v \rangle = \\ &= \langle v, \alpha(\alpha^*(u)) \rangle = \\ &= \langle \alpha^*(v), \alpha^*(u) \rangle = \\ &= \langle \alpha^*(u), \alpha^*(v) \rangle. \end{aligned}$$

ce qui prouve (2ii).

$\boxed{\text{(2i)} \Leftarrow \text{(2ii)}}$ On utilise les mêmes égalités qu'on vient d'écrire :

$$\langle \alpha(u), \alpha(v) \rangle = \langle \alpha^*(\alpha(u)), v \rangle.$$

$$\langle \alpha^*(u), \alpha^*(v) \rangle = \langle \alpha^*(v), \alpha^*(u) \rangle = \langle v, \alpha(\alpha^*(u)) \rangle = \langle \alpha(\alpha^*(u)), v \rangle.$$

Donc la condition (2ii) implique que $\alpha^*(\alpha(u)) = \alpha(\alpha^*(u))$ pour tout $u \in E$, et on obtient (2i).

$\boxed{\text{(2ii)} \Rightarrow \text{(2iii)}}$ C'est évident en posant $u = v$.

$\boxed{\text{(2ii)} \Leftarrow \text{(2iii)}}$ On utilise la *formule importante* :

$$\begin{aligned} \langle \alpha(u), \alpha(v) \rangle &= \frac{1}{2} \left(\|\alpha(u+v)\|^2 - \|\alpha(u)\|^2 - \|\alpha(v)\|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\alpha^*(u+v)\|^2 - \|\alpha^*(u)\|^2 - \|\alpha^*(v)\|^2 \right) = \\ &= \langle \alpha^*(u), \alpha^*(v) \rangle, \end{aligned}$$

ce qui implique (2ii).

Corrigé 6. L'application définie par q est une forme quadratique puisqu'elle est définie par un polynôme homogène de degré 2. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1) La matrice de q dans B est la suivante :

$$A := \mathrm{M}_B(q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Soit $X = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}}$ le vecteur des coordonnées de u dans la base B. On sait que $q(u) = X^{\mathrm{t}} A X$. De plus, Y est les vecteurs de coordonnées de $v \in \mathbb{R}^3$, on a $\langle v, u \rangle = Y^{\mathrm{t}} X$.
Soit α l'endomorphisme (symétrique) dons la matrice dans la base B est A. Lorsque $v = \alpha(u)$, nous avons alors $Y = AX$ et $Y^{\mathrm{t}} = X^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}} = X^{\mathrm{t}} A$. On en obtient :

$$\langle \alpha(u), u \rangle = X^{\mathrm{t}} A X = q(u).$$

Remarquons finalement que, étant donnés deux vecteurs u, w de coordonnées X, Z on a :

$$\varphi_q(u, v) = X^{\mathrm{t}} A Z = \langle \alpha(u), w \rangle.$$

(3) La matrice A est de rang 2, on a donc la valeur propre $\lambda_1 = 0$. En fait X appartient à $\ker(A)$ ssi :
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$
Cela entraîne facilement :
$$\ker(A) = \mathrm{vect}((1, -1, -1)^{\mathrm{t}}) = \mathrm{vect}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{\mathrm{t}}\right),$$
où le second vecteur est normalisé. On le note u_1

On trouve par le polynôme caractéristique les autres valeurs propres $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$. On calcule facilement ensuite :
$$\ker(A - I_3) = \mathrm{vect}((0, 1, -1)^{\mathrm{t}}) = \mathrm{vect}\left(\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{t}}\right),$$
où le second vecteur (noté u_2) est de norme 1. De même on trouve :
$$\ker(A - 3I_3) = \mathrm{vect}((2, 1, 1)^{\mathrm{t}}) = \mathrm{vect}\left(\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^{\mathrm{t}}\right),$$
et on note le troisième vecteur u_3 (il est de norme 1).

Les vecteurs u_1, u_2, u_3 sont orthogonaux car ils appartiennent à des espaces propres différents de α, ils sont donc libres et on a une base orthonormée C de vecteurs propres de α.

On a :
$$\varphi_q(u_i, u_j) = \langle \alpha(u_i), u_j \rangle = \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle = \lambda_i \delta_{i,j},$$
donc la base C est orthogonale pour q. La matrice de q (et de α) dans cette base est donc :
$$\mathrm{M}_C(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Corrigé 7. Il est facile de prouver que α est une application linéaire, pour n'importe quel choix de λ et v.

(1) L'endomorphisme v est orthogonal ssi pour tout $u \in E$ on a :
$$\|u\| = \|\alpha(u)\|,$$
ce qui est le cas ssi :
$$\lambda = -\frac{2}{\|v\|^2}, \tag{A}$$
car :
$$\|\alpha(u)\|^2 = \|u\|^2 + 2\lambda\langle u, v\rangle^2 + \lambda^2\langle u, v\rangle^2.$$
Nous avons donc la condition cherchée (A). Remarquons que (A) est définie puisque $v \neq 0$.

(2) Supposons maintenant que (A) soit satisfaite, et soit μ une valeur propre de α. Alors il existe u tel que $\alpha(u) = \mu u$, donc :
$$u - \frac{2\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v = \mu u.$$
Ceci donne deux cas :

$\boxed{\langle u, v\rangle = 0}$ Donc u appartient à l'hyperplan H orthogonal à v et la valeur propre μ est 1.

$\boxed{\langle u, v\rangle \neq 0}$ Donc l'équation ci-dessus implique que u est proportionnel à v, disons $u = tv$ pour un certain $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dans ce cas l'équation ci-dessus devient :

$$tv - 2t\frac{\langle v, v\rangle}{\|v\|^2}v = \mu tv,$$

en on obtient $\mu = -1$.

Les valeurs propres sont donc ± 1 et les espaces propres V_μ sont :

$$V_1 = H = v^\perp, \qquad V_{-1} = H^\perp = \mathrm{vect}(v).$$

(3) Les vecteurs de H sont fixés par α tandis que ceux de l'orthogonal de H sont changés de signe. Donc α est la réflexion orthogonale par rapport à H.

E-mail address: daniele.faenzi@univ-pau.fr

Université de Pau et des Pays de l'Adour, L.M.A., I.P.R.A. Avenue de l'université BP 1155, 64013 PAU Cedex, Téléphone : +33(0)05 40 17 51 78, Télécopie : +33(0)5 59 40 70 01
http://www.univ-pau.fr/~faenzi