

---

# ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

## PROGRAMME DU COURS

*par*

Daniele Faenzi

---

### 1. Groupes finis, opérations

#### 1.1. Groupes, notions de base. —

1. Sous-groupes.
2. Sous-groupes distingués.
3. Morphismes de groupes.
4. Générateurs d'un sous-groupe.
5. Groupes monogènes et cycliques.
6. Centre, centralisateur, normalisateur, clôture normale.
7. Commutateurs, groupe dérivé.
8. Suites exactes.

#### 1.2. Opération d'un groupe sur un ensemble. —

1. Opération d'un groupe sur un ensemble, groupes de permutations.
2. Orbites, stabilisateurs, ensemble quotient, ensemble fondamental pour une opération.
3. Formule aux classes.
4. Exemples algébriques d'opérations : translation, conjugaison.
5. Points fixes.

**1.3. Théorèmes de Sylow. —**

1.  $p$ -groupes.
2. Notion de  $p$ -sous-groupes de Sylow.
3. Exemple :  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ .
4. Théorème de Sylow I : si  $|G| = p^\alpha m$ ,  $\alpha > 1$ ,  $p \nmid m$ , il existe un  $p$ -Sylow (de cardinal  $p^\alpha$ ).
5. Théorème de Sylow II : les  $p$ -Sylow forment une classe de conjugaison, leur nombre  $k_p$  divise  $m$  et  $k_p \equiv 1$  modulo  $p$ .

**1.4. Automorphismes d'un groupe cyclique. —**

1. Éléments d'ordre donné dans un groupe cyclique ; sous-groupes d'ordre donné.
2. Théorème chinois.
3. Automorphismes de  $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ ,  $p \geq 3$ .
4. Automorphismes de  $\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z}$ .

**1.5. Produits directs et semi-directs. —**

1. Produit direct de deux groupes.
2. Notion de produit semi-direct par rapport à une opération par automorphismes.
3. Critère de décomposabilité en produit direct et semi-direct.
4. Exemple : le groupe diédral.

**1.6. Structure des groupes symétriques et alternés. —**

1. Générateurs de  $\mathfrak{S}_n$  et de  $\mathfrak{A}_n$ .
2. Centre.
3. Classes de conjugaison de  $\mathfrak{S}_n$ .
4.  $\mathfrak{S}_n$  comme produit semi-direct  $\mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
5. Éléments d'ordre fixé dans  $\mathfrak{S}_3$ ,  $\mathfrak{A}_4$ ,  $\mathfrak{A}_5$ .
6. Simplicité de  $\mathfrak{A}_n$ ,  $n \geq 5$ .
7. Automorphismes de  $\mathfrak{S}_n$ .

### Références

- [FG] SERGE FRANCINO, HERVÉ GIANELLA, *Exercices de mathématique pour l'agrégation. Algèbre 1*. Masson 1997.
- [O] PASCAL ORTIZ, *Exercices d'algèbre*. Ellipses 2004.
- [P] DANIEL PERRIN, *Cours d'algèbre*. Ellipses 1996.

---

28 mars 2008

DANIELE FAENZI • *E-mail* : [daniele.faenzi@univ-pau.fr](mailto:daniele.faenzi@univ-pau.fr), Université de Pau et des Pays de l'Adour, L.M.A. I.P.R.A. Avenue de l'université BP 1155 - 64013 PAU Cedex.  
Téléphone : +33(0)5 59 40 75 15, Télécopie : +33(0)5 59 40 70 01.