
ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

PROGRAMME DU COURS

par

Daniele Faenzi

1. Groupes finis, opérations

1.1. Groupes, notions de base. —

1. Sous-groupes.
2. Sous-groupes distingués.
3. Morphismes de groupes.
4. Générateurs d'un sous-groupe.
5. Groupes monogènes et cycliques.
6. Centre, centralisateur, normalisateur, clôture normale.
7. Commutateurs, groupe dérivé.
8. Suites exactes.

1.2. Opération d'un groupe sur un ensemble. —

1. Opération d'un groupe sur un ensemble, groupes de permutations.
2. Orbites, stabilisateurs, ensemble quotient, ensemble fondamental pour une opération.
3. Formule aux classes.
4. Exemples algébriques d'opérations : translation, conjugaison.
5. Points fixes.

1.3. Théorèmes de Sylow. —

1. p -groupes.
2. Notion de p -sous-groupes de Sylow.
3. Exemple : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.
4. Théorème de Sylow I : si $|G| = p^\alpha m$, $\alpha > 1$, $p \nmid m$, il existe un p -Sylow (de cardinal p^α).
5. Théorème de Sylow II : les p -Sylow forment une classe de conjugaison, leur nombre k_p divise m et $k_p \equiv 1$ modulo p .

1.4. Automorphismes d'un groupe cyclique. —

1. Éléments d'ordre donné dans un groupe cyclique ; sous-groupes d'ordre donné.
2. Théorème chinois.
3. Automorphismes de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$, $p \geq 3$.
4. Automorphismes de $\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z}$.

1.5. Produits directs et semi-directs. —

1. Produit direct de deux groupes.
2. Notion de produit semi-direct par rapport à une opération par automorphismes.
3. Critère de décomposabilité en produit direct et semi-direct.
4. Exemple : le groupe diédral.

1.6. Structure des groupes symétriques et alternés. —

1. Générateurs de \mathfrak{S}_n et de \mathfrak{A}_n .
2. Centre.
3. Classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n .
4. \mathfrak{S}_n comme produit semi-direct $\mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
5. Éléments d'ordre fixé dans \mathfrak{S}_3 , \mathfrak{A}_4 , \mathfrak{A}_5 .
6. Simplicité de \mathfrak{A}_n , $n \geq 5$.
7. Automorphismes de \mathfrak{S}_n .

Références

- [FG] SERGE FRANCINO, HERVÉ GIANELLA, *Exercices de mathématique pour l'agrégation. Algèbre 1*. Masson 1997.
- [O] PASCAL ORTIZ, *Exercices d'algèbre*. Ellipses 2004.
- [P] DANIEL PERRIN, *Cours d'algèbre*. Ellipses 1996.

28 mars 2008

DANIELE FAENZI • *E-mail* : daniele.faenzi@univ-pau.fr, Université de Pau et des Pays de l'Adour, L.M.A. I.P.R.A. Avenue de l'université BP 1155 - 64013 PAU Cedex.
Téléphone : +33(0)5 59 40 75 15, Télécopie : +33(0)5 59 40 70 01.