Université de Pau et des Pays de l'Adour
Département de Mathématiques

Algèbre IV — Année 2009-2010

Contrôle continu du 29-03-2009

Temps disponible : 1,5 heures

Exercice 1 (Questions de cours)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, E^* le dual de E, et φ une forme bilinéaire symétrique sur E.

(1) Donner la définition de l'application $L_\varphi : E \to E^*$ donnée par la forme bilinéaire φ.

(2) Soit F un sous espace vectoriel de E. Décrire l'application de restriction $\pi_F : E^* \to F^*$ et montrer qu'elle est linéaire.

(3) Montrer que $\ker(\pi_F \circ L_\varphi) = F^\perp$.

(4) Sachant que π_F est surjective, montrer que :
$$\dim(E) \leq \dim(F) + \dim(F^\perp).$$

(5) Donner une condition suffisante pour que l'égalité dans la formule ci-dessus soit atteinte.

Exercice 2. Soit E l'espace des matrices carrées de taille 2 à coefficients complexes. Posons :
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
et soit φ l'application de $E \times E$ sur $\mathbb{C}$ définie, $\forall A, B \in E$, par :
$$\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}} J B).$$

(1) Montrer que φ est une forme bilinéaire sur E.

(2) Dire si φ est symétrique, ou antisymétrique.

(3) Calculer le rang de φ.

(4) Soit F l'espace des matrices de E qui ont trace nulle. Calculer $F^{\perp}$ et montrer que $F^{\perp}$ est contenu dans F.

(5) Soit T l'espace des matrices de E qui sont triangulaire supérieures. Calculer le rang de la restriction de φ à T.

(6*) Montrer que, si $f \neq 0$ est une forme linéaire sur E, la restriction de φ à $\ker(f)$ a rang au plus 2.

Exercice 3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et soit q_1, q_2 les formes quadratiques définies sur $\mathbb{R}^4$ par :

$$q_1(x_1, \ldots, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_3^2,$$
$$q_2(x_1, \ldots, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + ax_1x_3 + bx_2x_3.$$

(1) Écrire les matrices de q_1 et q_2 dans la base canonique.

(2) Calculer rang et signature de q_1.

(3) Dire pour quels a, b, la forme q_1 est équivalente à q_2.

(4) Poser $a = 1$, $b = 0$, et donner une base de $\mathbb{R}^3$ qui soit orthogonale pour q_2.

(5) Poser $b = 0$, et dire quelles sont les valeurs de a telles que la restriction de q_1 au noyau de q_2 soit définie positive.

Corrigé 1. On renvoie au cours pour les réponses à ces questions.

Corrigé 2. L'espace en question E est de dimension 4. Remarquons aussi que $J^{\mathrm{t}} = -J$.

(1) Par la linéarité de la trace et du produit de matrices, on montre que, étant donnés $A_1, A_2, A, B_1, B_2, B \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, on a :

$$\mathrm{tr}((\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)^{\mathrm{t}} JB) = \lambda_1 \mathrm{tr}(A_1^{\mathrm{t}} JB) + \lambda_2 \mathrm{tr}(A_2^{\mathrm{t}} JB).$$
$$\mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}} J \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) = \lambda_1 \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}} JB_1) + \lambda_2 \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}} JB_2).$$

Ceci prouve que φ est bilinéaire.

(2) On a :

$$\mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}} JB) = \mathrm{tr}((A^{\mathrm{t}} JB)^{\mathrm{t}}) = \mathrm{tr}(B^{\mathrm{t}} J^{\mathrm{t}} A) = -\mathrm{tr}(B^{\mathrm{t}} JA),$$

donc φ est antisymétrique.

(3) Définissons :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une base de E est donnée par $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.

On calcule la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{tr}(E_{1,1}^{\mathrm{tr}} JE_{1,1}) = 0, & \mathrm{tr}(E_{1,1}^{\mathrm{tr}} JE_{1,2}) = 0, & \mathrm{tr}(E_{1,1}^{\mathrm{tr}} JE_{2,1}) = 1, & \mathrm{tr}(E_{1,1}^{\mathrm{tr}} JE_{2,2}) = 0, \\
\mathrm{tr}(E_{1,2}^{\mathrm{tr}} JE_{1,1}) = 0, & \mathrm{tr}(E_{1,2}^{\mathrm{tr}} JE_{1,2}) = 0, & \mathrm{tr}(E_{1,2}^{\mathrm{tr}} JE_{2,1}) = 0, & \mathrm{tr}(E_{1,2}^{\mathrm{tr}} JE_{2,2}) = 1, \\
\mathrm{tr}(E_{2,1}^{\mathrm{tr}} JE_{1,1}) = -1, & \mathrm{tr}(E_{2,1}^{\mathrm{tr}} JE_{1,2}) = 0, & \mathrm{tr}(E_{2,1}^{\mathrm{tr}} JE_{2,1}) = 0, & \mathrm{tr}(E_{2,1}^{\mathrm{tr}} JE_{2,2}) = 0, \\
\mathrm{tr}(E_{2,2}^{\mathrm{tr}} JE_{1,1}) = 0, & \mathrm{tr}(E_{2,2}^{\mathrm{tr}} JE_{1,2}) = -1, & \mathrm{tr}(E_{2,2}^{\mathrm{tr}} JE_{2,1}) = 0, & \mathrm{tr}(E_{2,2}^{\mathrm{tr}} JE_{2,2}) = 0.
\end{array}$$

On en obtient :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 1$, donc le rang de φ est 4.

(4) Une base de F est donnée par $(Z, E_{0,1}, E_{1,0})$. La matrice des coordonnées de ces vecteurs est donnée par :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc l'orthogonal de F est donnée par le noyau de :
$$N \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Ce noyau est engendré par le vecteur de coordonnées $(0, -1, 1, 0)^{\mathrm{t}}$. On en obtient :
$$F^{\perp} = \mathrm{vect}(Z).$$
Puisque Z appartient à F, on a montré $F^{\perp} \subset F$.

(5) Une base $\mathcal{C}$ de T est donné par $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$. Donc la matrice de la restriction de φ à T, dans la base $\mathcal{C}$, se lit comme sous matrice de $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ par suppression de la troisième ligne et de la troisième colonne. Cette matrice est donc :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$
ce qui donne rang 2.

(6*) Puisque f n'est pas nulle, on a $\dim(\ker(f)) = 3$. Soit $\mathcal{D}$ une base de $\ker(f)$. La matrice G de la restriction de φ à $\ker(f)$ dans la base $\mathcal{D}$ est donc une matrice carrée de taille 3, antisymétrique. Alors on a :
$$\det(G) = \det(G^{\mathrm{t}}) = \det(-G) = (-1)^3 \det(G) = -\det(G).$$
Ceci implique $\det(G) = 0$ donc G a rang au plus 2.

Corrigé 3. On sait que les applications en question sont des formes quadratiques grâce au critère de réalisation polynomiale.

(1) Soit B la base canonique. On a :
$$\mathrm{M}_B(q_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{M}_B(q_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{a}{2} \\ 1 & 0 & \frac{b}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Effectuons une réduction de Gauss.
$$\begin{aligned} q_1(x_1, x_2, x_3) &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_2x_3 + 2x_2^2 + 2x_3^2 = \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 4x_2x_3 = \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2 = \\ &= 2f_1(x_1, x_2, x_3)^2 + f_2(x_1, x_2, x_3)^2 - f_3(x_1, x_2, x_3)^2, \end{aligned}$$
où nous avons posé :
$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 - x_3, \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= x_2 + x_3, \\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= x_2 - x_3. \end{aligned}$$
La signature de q_1 est donc $(2, 1)$ et le rang est 3.

(3) Effectuons une réduction de Gauss aussi pour q_2.

$$
\begin{aligned}
q_2(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2+2x_1x_2+ax_1x_3+bx_2x_3 = \\
&= \left(x_1+x_2+\frac{a}{2}x_3\right)^2 - x_2^2 - \frac{a^2}{4}x_3^2 + (-a+b)x_2x_3 =
\end{aligned}
$$

posons $\ell_1(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_2+\frac{a}{2}x_3$;

$$
\begin{aligned}
&= \ell_1(x_1,x_2,x_3)^2 - x_2^2 - \frac{a^2}{4}x_3^2 - (a-b)x_2x_3 = \\
&= \ell_1(x_1,x_2,x_3)^2 - \left(x_2+\frac{a-b}{2}x_3\right)^2 + \frac{-a^2+(a-b)^2}{4}x_3^2 =
\end{aligned}
$$

posons $\ell_2(x_1,x_2,x_3) = x_2+\frac{a-b}{2}x_3$;

$$
= \ell_1(x_1,x_2,x_3)^2 - \ell_2(x_2,x_2,x_3)^2 + \frac{b^2-2ab}{4}x_3^2.
$$

La signature de q_2 vaut $(2,1)$ si et seulement si $b(b-2a)>0$, donc si $b<0, 2a>b$ ou si $b>0, 2a<b$. La forme q_2 est donc équivalente à q_1 précisément pour ces valeurs de a,b.

(4) Si $a=1, b=0$, la forme q_2 devient :

$$
q_2(x_1,x_2,x_3) = \ell_1(x_1,x_2,x_3)^2 - \ell_2(x_2,x_2,x_3)^2.
$$

Nous pouvons poser $\ell_3(x_1,x_2,x_3) = x_3$. En regardant les expressions de ℓ_1 et ℓ_2 ci-dessus, on a les coefficients de ℓ_1 et ℓ_2 dans la base (e_1^*, e_2^*, e_3^*). La matrice de passage P de (e_1^*, e_2^*, e_3^*) à $(\ell_1^*, \ell_2^*, \ell_3^*)$ est donc :

$$
P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.
$$

En calculant la transposée de P^{-1}, nous avons la matrice :

$$
Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

On obtient la base orthogonale (v_1,v_2,v_3) suivante :

$$
\begin{aligned}
v_1 &= (1,0,0)^{\mathrm{t}}, \\
v_2 &= (-1,1,0)^{\mathrm{t}}, \\
v_3 &= (0,-\frac{1}{2},1)^{\mathrm{t}}.
\end{aligned}
$$

(5) Si $b = 0$, le noyau de q_2 est donné par les vecteurs (x_1, x_2, x_3) tels que $\ell_1(x_1, x_2, x_3) = \ell_2(x_1, x_2, x_3) = 0$. Nous avons donc :

$$x_1 = -x_2 - \frac{a}{2}x_3,$$
$$x_2 = -\frac{1}{2}x_3.$$

Alors les formes f_1, f_2, f_3 prennent les valeurs :

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = -\left(1 + \frac{a}{2}\right) x_3,$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \left(1 - \frac{a}{2}\right) x_3,$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = -\left(1 + \frac{a}{2}\right) x_3.$$

Donc $f_3 = f_1$ et $2f_1^2 - f_3^2 = f_1^2$. En remplaçant dans l'expression de q_1, on en obtient que la forme q_1 est définie positive, quel que soit $a \in \mathbb{R}$.

E-mail address: `daniele.faenzi@univ-pau.fr`

Université de Pau et des Pays de l'Adour, L.M.A., I.P.R.A. Avenue de l'université BP 1155, 64013 PAU Cedex, Téléphone : +33(0)05 40 17 51 78, Télécopie : +33(0)5 59 40 70 01 http://www.univ-pau.fr/~faenzi