Université de Pau et des Pays de l'Adour
Département de Mathématiques

ALGÈBRE IV Année 2007-2008

Examen du 20-05-2008, Temps disponible : 2 heures.

(Documents interdits)

Exercice 1. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$q(x, y, z) = x^2 - 2yz - xz,$$

et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $P_t \subset \mathbb{R}^3$ le plan défini par $3x + 2y + tz = 0$ et q_t la restriction de q à P_t.

a) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles q_t est dégénérée.
b) Déterminer la signature de q_t en fonction de t.
c) Dire pour quelles valeurs de t, le plan P_t contient des vecteurs non nuls isotropes pour q_t. Pour des telles valeurs, dire s'il existe une base de P_t constituée de vecteurs isotropes, et éventuellement la trouver.
d) Étant donné t tel que q_t n'est ni positive ni dégénérée, trouver un sous-espace de dimension 1 de P_t où la restriction de q_t soit négative.

Exercice 2. Soit S l'espace vectoriel des matrice symétriques complexes de taille 2. On considère la fonction :

$$g : S \to \mathbb{C}, \qquad g(A) = \det(A) - \operatorname{tr}(A)^2.$$

a) Démontrer que q est une forme quadratique sur S.
b) Écrire la matrice de la forme bilinéaire f_g dans une base de S. Quel est le rang de f_g ?
c) Calculer l'orthogonal dans S par rapport à f_g de l'ensemble des matrices diagonales.
d) Trouver une base orthogonale de S dont deux éléments sont matrices diagonales.

Exercice 3. On considère la matrice réelle suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3/2\sqrt{2} & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 3/2\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2\sqrt{2} & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 3/2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

a) Dire si A est diagonalisable.
b) Démontrer que $\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$ sont des valeurs propres de A.
c) Trouver une base orthonormée de vecteurs propres de A.
d) Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Est-ce que P est une matrice orthogonale ?

Corrigé 1. On écrit la forme q_t en remplaçant y par :

$$y = -\frac{3x + tz}{2}.$$

On en obtient, en utilisant la réduction de Gauss :

$$q_t(x, z) = x^2 + 2xz + tz^2 = (x + z)^2 + (t - 1)z^2.$$

a) Il résulte de la forme ci-dessus que q_t est dégénérée si et seulement si $t = 1$, auquel cas elle a rang 1.

b) La signature est $(2, 0)$ si $t > 1$, $(1, 0)$ si $t = 1$, $(1, 1)$ si $t < 1$.

c) Le plan P_t ne contient pas de vecteurs isotropes non-nuls si la forme q_t est définie positive i.e. lorsque $t > 1$.

   Par ailleurs, si $t = 1$, le noyau $P_t^{\perp}$ de q_t est donné par $x + z = 0$ car l'expression de q_t s'annule dans ce cas, et le noyau coïncide avec l'ensemble des vecteurs isotropes puisque q_t est positive. On ne peut pas trouver une base dans cet ensemble, car il s'agit d'un sous-espace vectoriel de P_t de dimension 1.

   Finalement, si $t < 1$, on peut écrire :

$$q_t(x, z) = (x + z)^2 + (t - 1)z^2 = \left(x + z + z\sqrt{1 - t}\right)\left(x + z - z\sqrt{1 - t}\right).$$

   On a donc les espaces de vecteurs isotropes :

$$V_+ = P_t \cap \{x + + - z\sqrt{1 - t} = 0\}, \qquad V_- = P_t \cap \{x + z - z\sqrt{1 - t} = 0\}.$$

   En choisissant deux vecteurs non nuls $v_+ \in V_+$ et $v_- \in V_-$ on obtient une base de P_t constituée de vecteurs isotropes.

d) On doit avoir $t < 1$ pour que q_t soit ni positive ni dégénérée. On a donc l'espace $P_t \cap \{x + z = 0\}$ où q_t est négative. Cet espace a dimension 1 car l'équation qui le définit (où la variable y n'apparaît pas) est indépendante de l'équation de P_t.

Corrigé 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

une matrice de S, et interprétons $(a, b, c)^{\mathrm{t}}$ comme les coordonnées du vecteur A dans la base canonique B. On a alors :

$$g(A) = (ac - b^2) - (a + c)^2 = -(a^2 + b^2 + c^2 + ac).$$

a) Depuis l'expression ci-dessus g est une forme quadratique car elle est un polynôme homogène de degré 2.

b) La matrice est la suivante :

$$\mathrm{M}_B(f_g) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Le rang est donc $\mathrm{rg}(f_g) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}_B(f_g)) = 3$.

c) L'ensemble des matrices diagonales forme un sous-espace vectoriel de dimension 2 qui est engendré par $(1,0,0)^{\mathrm{t}}$ et $(0,0,1)^{\mathrm{t}}$. On peut donc calculer l'orthogonal comme l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées $(a,b,c)^{\mathrm{t}}$ satisfont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0.$$

On trouve facilement que le système ci-dessus admet comme solution $a = c = 0$, donc l'orthogonal cherché est constitué par les vecteurs ayant coordonnées $(0,b,0)^{\mathrm{t}}$, i.e. par les matrices symétriques avec zéro sur la diagonale.

d) On peut prendre comme vecteurs de base :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Depuis la question qui précède E_1 et E_2 sont orthogonaux. Il suffit donc de chercher E_3. Soit alors E_3 de coordonnées $(a,b,c)^{\mathrm{t}}$ orthogonal à E_1 et E_2. On a alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0,$$

ce qui implique $2a = -c$ et $b = 0$. On peut donc choisir :

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

et E_1, E_2, E_3 est une base orthogonale.

Corrigé 3. La matrice A est symétrique.

a) D'après le théorème spectral la matrice A est diagonalisable.

b) On prouve facilement que $\mathrm{rg}(A - 2\sqrt{2}I_4) = \mathrm{rg}(A - \sqrt{2}I_4) = 2$ donc les deux valeurs $\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$ sont valeurs propres, chacune de multiplicité 2.

c) On calcule facilement :

$$\ker(A - 2\sqrt{2}I_4) = \mathrm{vect}(v_1, v_2), \qquad \ker(A - \sqrt{2}I_4) = \mathrm{vect}(v_3, v_4),$$

avec :

$$v_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^{\mathrm{t}},$$

$$v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{t}},$$

$$v_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^{\mathrm{t}},$$

$$v_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{t}}.$$

On a pris soin de choisir des vecteurs normalisés qui de plus sont orthogonaux (par Grahm-Schmidt). Il en résulte une base orthonormée de vecteurs propres.

d) La matrice

$$P^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

est orthogonale car elle représente un changement de base orthonormé. Donc $P^{-1} = P^{\mathrm{t}}$ et $P^{-1}AP$ est diagonale.