Université de Pau et des Pays de l'Adour

Département de Mathématiques

Algèbre IV — Année 2008-2009

Examen du 08-06-2009, Temps disponible : 2 heures.

Exercice 1 (Questions de cours)**.** Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire symétrique φ.

(1) Dire quand φ est un produit scalaire. Montrer que, dans ce cas, l'application $L : E \to E^*$, définie par $L(w)(v) = \varphi(w, v)$ est un isomorphisme.

Supposons que φ est un produit scalaire et notons $\varphi(u, v) = \langle u, v\rangle$.

(2) Soit α un endomorphisme de E et fixons $u \in E$. Montrer que l'application :

$$M_u : E \to \mathbb{R} \qquad v \mapsto \langle u, \alpha(v)\rangle$$

est linéaire. En déduire qu'il existe un unique $w \in E$ tel que $L(w) = M_u$.

(3) Donner la définition d'endomorphisme adjoint α^*. Déduire de ce qui précède l'existence de α^*.

(4) Donner la définition de base orthonormée. Soit B une telle base. Montrer $\mathrm{M}_B(\alpha^*) = \mathrm{M}_B(\alpha)^{\mathrm{t}}$.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $u = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}} \in E$ et soit q l'application définie par :

$$q : E \to \mathbb{R}, \qquad q(u) = 2x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

(1) Montrer que q est une forme quadratique pour tout λ, écrire la matrice de q dans la base canonique B et calculer le rang et la signature de q selon la valeur de λ.

(2) Considérons q pour $\lambda = 1$. Trouver le noyau $E^{\perp}$. Quel est l'ensemble des vecteurs isotropes ?

(3) Considérons q pour $\lambda = 2$. Trouver une base orthonormée de E.

(4) Considérons q pour $\lambda = 0$. Trouver un sous-espace de E de dimension 2 où q est positive, puis calculer son orthogonal.

Exercice 3. Soit A la matrice :

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) Prouver que A est orthogonale.

(2) La matrice A est-elle diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ? Leurs multiplicités ?

(3) Existe-t-il un plan H tel que A soit la matrice de la réflexion σ_H ? Si oui, trouver H.

(4) Prouver que $A \notin \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, et que $-A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. La matrice $-A$ représente une symétrie par rapport à quel espace ?

Exercice 4. Soit E un espace euclidien de dimension n ; α, β endomorphismes de E, avec α symétrique.

(1) Soit ℓ_m, ℓ_M la plus petite et la plus grande valeur propre de α. Prouver que $\forall u \in E$ on a :

$$\ell_m\|u\|^2 \leq \langle \alpha(u), u\rangle \leq \ell_M\|u\|^2.$$

(2) Considérons l'endomorphisme $\sigma = 1/2(\beta + \beta^*)$, et soit a_m, a_M la plus petite et la plus grande valeur propre de σ. Montrer que σ est symétrique et que, si ℓ est une valeur propre de β, alors :

$$a_m \leq \ell \leq a_M.$$

(3) Définissons l'endomorphisme $\rho = \beta^* \circ \beta$, de valeurs propres $b_1 \leq \cdots \leq b_r$. Montrer que ρ est symétrique, et que $b_i \geq 0$ pour tout i.

(4) Avec les notations du point précédent, soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de β dans une base orthonormée B et soit $u \in E$. Démontrer que les deux assertions :

$$b_1 + \cdots + b_r = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2, \qquad\qquad b_1\|u\|^2 \leq \|\beta(u)\|^2 \leq b_r\|u\|^2.$$

Corrigé 1. On note par n la dimension de E.

(1) La forme φ est un produit scalaire si et seulement si la forme quadratique associée q_φ est définie positive, i.e. si et seulement si, pour tout $u \in E \setminus \{0\}$ on a $q_\varphi(u) = \varphi(u,u) > 0$.

Soit alors φ un produit scalaire et soit $q = q_\varphi$. Puisque q est positive, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz on voit que l'ensemble des vecteurs isotropes pour q coïncide avec le noyau de φ. Vu que q est définie positive, elle n'a pas de vecteurs isotropes non-nuls, donc $E^\perp = 0$. La forme φ est donc non-dégénérée, car elle est positive Soit B une base de E et B^* la base duale de E^*. On a donc :

$$\mathrm{M}_{B,B^*}(L) = \mathrm{M}_B(\varphi),$$

ce qui implique que $\mathrm{M}_{B,B^*}(L)$ est non-dégénérée, donc L est un isomorphisme.

(2) Prouvons que M_u est linéaire. Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $v_1, v_2 \in E$. On a :

$$\begin{aligned} M_u(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \langle u, \alpha(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)\rangle = \\ &= \lambda_1 \langle u, \alpha(v_1)\rangle + \lambda_2 \langle u, \alpha(v_2)\rangle = \\ &= \lambda_1 M_u(v_1) + \lambda_2 M_u(v_2). \end{aligned}$$

Déduisons l'existence de w. L'application M_u est linéaire de E sur $\mathbb{R}$ donc $M_u \in E^*$. Il en découle que $w := L^{-1}(M_u)$ est dans E (rappelons que L est un isomorphisme) et w est l'unique antécédent de M_u.

(3) L'endomorphisme adjoint α^* de α est un endomorphisme (qui s'avère unique) tel que pour tout $u, v \in V$ on ait :

$$\langle \alpha^*(u), v\rangle = \langle u, \alpha(v)\rangle. \tag{A}$$

Étant donné $u \in E$, il existe un seul $w \in E$ tel que $M_u = L(w)$. Les deux formes linéaire prennent donc la même valeur sur tout $v \in E$. En en obtient, pour tout $v \in E$:

$$\langle u, \alpha(v)\rangle = M_u(v) = L(w)(v) = \varphi(w, v) = \langle w, v\rangle\,.$$

Définissons $\alpha^*(u) = w$. On en obtient une application bien définie $E \to E$ qui satisfait (A).

Il suffit donc de vérifier que α^* est linéaire. Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $u_1, u_2 \in E$. Nous devons montrer que $\alpha^*(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 \alpha^*(u_1) + \lambda_2 \alpha(u_2)$. Nous pouvons ce faire en montrant, pour tout $v \in E$:

$$\langle \lambda_1 \alpha^*(u_1) + \lambda_2 \alpha^*(u_2), v\rangle = \langle \alpha^*(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v\rangle\,. \tag{B}$$

Le premier membre de (B) est égale à :

$$\lambda_1 \langle \alpha^*(u_1), v\rangle + \lambda_2 \langle \alpha^*(u_2), v\rangle = \lambda_1 \langle u_1, \alpha(v)\rangle + \lambda_2 \langle u_2, \alpha(v)\rangle\,.$$

Le second membre de (B) est égale à

$$\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \alpha(v)\rangle\,.$$

Ces deux quantités sont égales, et on a terminé la preuve.

(4) La base $B = (u_1, \ldots, u_n)$ est orthonormée si et seulement si $\|u_i\| = 1$ pour tout i et $u_i \perp u_j$ pour $i \neq j$. Ceci est équivalent à demander $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{i,j}$. Puisque la matrice de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dans la base B est donnée par $\langle u_i, u_j\rangle$, on a que cette matrice est I_n si et seulement si $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{i,j}$, i.e. ssi B est orthonormée.
Soit B une base orthonormée, posons $\mathrm{M}_B(\alpha) = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ et $\mathrm{M}_B(\alpha^*) = (b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$. On a :

$$\begin{aligned} a_{j,i} &= \langle u_i, \alpha(a_{j,1}u_1 + \cdots + a_{j,n}u_n)\rangle = \langle u_i, \alpha(u_j)\rangle = \\ &= \langle \alpha^*(u_i), u_j\rangle = \langle \alpha^*(b_{i,1}u_1 + \cdots + b_{i,n}u_n), u_j\rangle = b_{i,j}. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathrm{M}_B(\alpha^*)$ est la transposée de $\mathrm{M}_B(\alpha)$.

Corrigé 2. Nous utiliserons la réduction de Gauss.

(1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'expression de q est un polynôme homogène de degré 2, donc q est une forme quadratique. La matrice de q est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} q(u) &= 2(x_1+1/2x_2+1/2x_3)^3 - 1/2x_2^2 - 1/2x_3^2 - x_2x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + \lambda x_3^2 = \\ &= 2(x_1+1/2x_2+1/2x_3)^3 + 1/2x_2^2 + x_2x_3 + (\lambda - 1/2)x_3^2 = \\ &= 2(x_1+1/2x_2+1/2x_3)^3 + 1/2(x_2+x_3)^2 - 1/2x_3^2 + (\lambda-1/2)x_3^2 = \\ &= 2(x_1+1/2x_2+1/2x_3)^3 + 1/2(x_2+x_3)^2 + (\lambda-1)x_3^2 = \\ &= 2f_1(u)^3 + 1/2f_2(u)^2 + (\lambda-1)f_3(u)^2, \end{aligned}$$

où nous avons posé :

$$\begin{aligned} f_1(u) &= x_1 + 1/2x_2 + 1/2x_3, \\ f_2(u) &= x_2 + x_3, \\ f_3(u) &= x_3. \end{aligned}$$

Le rang de q est donc 3 si $\lambda \neq 1$ et 2 si $\lambda = 1$. La signature est $(3,0)$ si $\lambda > 1$, $(2,0)$ si $\lambda = 1$, $(2,1)$ si $\lambda < 1$.

(2) Soit $\lambda = 1$. Alors q est positive et de rang 2. Le noyau $E^\perp$ coïncide avec l'ensemble des vecteurs isotropes. Ceci correspond donc à $f_1(u) = f_2(u) = 0$. Cet espace est donc :

$$\mathrm{vect}((0,-1,1)^{\mathrm{t}}).$$

(3) Soit $\lambda = 2$. On utilise Grahm-Schmidt sur la base canonique. Soit donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire induit par q. Soit $u_1' = (1,0,0)^{\mathrm{t}}$. Vu que $q(u_1') = 2$, on pose :

$$u_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)^{\mathrm{t}}.$$

Maintenant soit $u_2' = \alpha_{2,1}u_1 + \alpha_{2,2}(0,1,0)^{\mathrm{t}}$. On veut $u_2' \perp u_1$ donc :

$$\left\langle u_2', u_1\right\rangle = \alpha_{2,1} + \alpha_{2,2}\left\langle (0,1,0)^{\mathrm{t}}, u_1\right\rangle,$$

et :

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On trouve donc :

$$u_2' = (1/2, -1, 0)^{\mathrm{t}}.$$

Ce vecteur est de norme 1/2. On doit normaliser donc à :

$$u_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}, 0\right)^{\mathrm{t}}.$$

Pour trouver u_3, calculons l'espace orthogonal à u_1 et u_2 (ou de leurs multiples, ce qui est le même) :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1 + x_2 + x_3\\ -x_2 - x_3\end{pmatrix}.$$

On en obtient comme équations de l'orthogonal $x_1 = 0$ et $x_2 = -x_3$. On pourrait donc choisir $u_3' = (0,0,1)^{\mathrm{t}}$ et en normalisant :

$$u_3 = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{t}}.$$

(4) Soit F l'espace en question. Il est donné par $f_3(u) = 0$. Une base de F est donc $((1,0,0)^{\mathrm{t}}, (0,1,0)^{\mathrm{t}})$. Pour trouver l'orthogonal $F^\perp$, on calcule :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

donc l'orthogonal est :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

On a donc trouvé :

$$F^\perp = \mathrm{vect}((0,1,-1)^{\mathrm{t}}).$$

Corrigé 3. Remarquons que la matrice A est symétrique.

(1) Il suffit de calculer : $AA^{\mathrm{t}} = I_3$.

(2) La matrice A est symétrique donc diagonalisable (théorème spectral). Ses valeurs propres peuvent donc être $+1$ ou -1. Aucune des deux ne peut être de multiplicité 3, car $A \neq \pm I_3$. On calcule alors la trace de A : c'est $+1$, donc les valeurs propres sont 1 avec multiplicité 2 et -1 avec multiplicité 1.

(3) Puisque A admet 1 comme valeur propre de multiplicité 2, l'espace propre H relatif à 1 a dimension 2. L'espace propre relatif à -1 est alors de dimension 1 et orthogonal à H, il coïncide donc avec $H^\perp$, et $\mathbb{R}^3 = H \oplus H^\perp$. Soit α endomorphisme représenté par A, et soit $u \in \mathbb{R}^3$. On a alors $u = u' + u''$ avec $u' \in H$ et $u'' \in H^\perp$. Donc $\alpha(u') = u'$ et $\alpha(u'') = -u''$, ce qui implique $\alpha(u) = u' - u'' = \sigma_H(u)$.

Pour trouver l'équation de H, on rappelle que $H = \ker(A - I_3)$. On en déduit :

$$H = \{-3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}.$$

(4) Le déterminant de A est le produit des valeurs propres de A, donc $\det(A) = -1$. Ceci implique que $A \notin \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et que $-A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ car $\det(-A) = (-1)^3 \det(A) = 1$. L'endomorphisme correspondent à $-A$ est $-\alpha$ et $-\alpha(u) = u'' - u'$ avec les notation de la question précédente. Ceci implique que $-\alpha$ est la symétrie par rapport à l'espace $H^\perp$, qui est engendré par le vecteur :

$$(-3, 2, -1)^{\mathrm{t}}.$$

Corrigé 4. Soit $B = (u_1, \dots, u_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de α (elle existe grâce au théorème spectral) et soit ℓ_i la valeurs propre relative à u_i. Quitte à permuter les vecteurs de base, on peut supposer $\ell_1 \leq \cdots \leq \ell_n$, donc $\ell_1 = \ell_m$ et $\ell_n = \ell_M$.

(1) Soit $u = x_1 u_1 + \cdots x_n u_n$ un vecteur de E. On a :

$$\begin{aligned} \langle \alpha(u), u \rangle &= \langle \alpha\left(x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n\right), x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n \rangle = \\ &= \langle x_1 \ell_1 u_1 + \cdots + x_n \ell_n u_n, x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n \rangle = \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \ell_i x_i x_j \delta_{i,j} = \ell_1 x_1^2 + \cdots + \ell_n x_n^2. \end{aligned}$$

Puisque $\ell_1 \leq \cdots \leq \ell_n$, on a facilement :

$$\ell_1 x_1^2 + \cdots + \ell_1 x_n^2 \leq \ell_1 x_1^2 + \cdots + \ell_n x_n^2 \leq \ell_n x_1^2 + \cdots + \ell_n x_n^2,$$

ce qui entraîne la conclusion.

(2) L'application σ est évidemment linéaire car elle est combinaison linéaire d'applications linéaires, elle est donc un endomorphisme. On a $\sigma^* = 1/2(\beta^* + \beta)$ puisque la transposition est linéaire et involutive ($(\beta^*)^* = \beta$), donc σ est symétrique. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de σ (elle existe depuis le théorème spectral), avec $\sigma(v_i) = a_i$. On peut supposer $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ donc $a_1 = a_m$ et $a_n = a_M$.

Soit ℓ valeur propre de β et soit v tel que $\beta(v) = \ell v$. Quitte à normaliser v, on peut supposer $\|v\| = 1$, donc : $\ell = \langle v, \beta(v) \rangle$. Donc :

$$\begin{aligned} \langle v, \sigma(v) \rangle &= 1/2(\langle v, \beta + \beta^*(v) \rangle) = \\ &= 1/2(\langle v, \beta(v) \rangle + \langle v, \beta^*(v) \rangle) = \\ &= 1/2(\langle v, \beta(v) \rangle + \langle \beta^*(v), v \rangle) = \\ &= 1/2(\langle v, \beta(v) \rangle + \langle v, \beta(v) \rangle) = \\ &= \langle v, \beta(v) \rangle = \ell. \end{aligned}$$

Soit $x_1, \dots, x_n$ tels que $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$. Puisque le vecteur v est de norme 1, nous avons :

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

On calcule maintenant :

$$\begin{aligned}\langle v, \sigma(v)\rangle &= \langle x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n, \sigma(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n)\rangle = \\ &= \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \langle v_i, \sigma(v_j)\rangle = \sum_{1\le i,j\le n} a_j \delta_{i,j}\, x_i x_j = \\ &= \sum_{1\le j\le n} a_j\, x_j^2.\end{aligned}$$

Puisque cette valeur est comprise entre a_1 et a_n (i.e. entre a_m et a_M) et elle est égale à ℓ, nous avons :

$$a_m \le \ell \le a_M.$$

(3) L'application ρ est évidemment linéaire et $\rho^* = \beta^* \circ \beta = \rho$ puisque la transposition est involutive et intervertit les compositions. Si w_i et un vecteur propre de norme 1 relatif à b_i, nous avons :

$$b_i = \langle w_i, \rho(w_i)\rangle = \langle w_i, \beta^*(\beta(w_i))\rangle = \langle \beta(w_i), \beta(w_i)\rangle = \|\beta(w_i)\|^2 \ge 0.$$

(4) Puisque ρ est diagonalisable (théorème spectral) nous savons qu'il existe n valeurs propres (peut-être avec répétitions), donc $r = n$ et la somme des valeurs propres est la trace d'un matrice de ρ. En même temps cette matrice s'écrit comme AA^{t} dans une base orthonormée. Le coefficient à la place (i,j) de AA^{t} est $\sum_k a_{i,k} a_{j,k}$. On a donc :

$$b_1 + \cdots + b_n = \mathrm{tr}(AA^{\mathrm{t}}) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j} a_{i,j},$$

ce qui prouve la première assertion. Pour la seconde, remarquons que :

$$\|\beta(u)\|^2 = \langle \beta(u), \beta(u)\rangle = \langle \beta^*(\beta(u)), u\rangle = \langle \rho(u), u\rangle .$$

En écrivant $u = y_1 w_1 + \cdots + y_n w_n$, où $(w_1, \dots, w_n)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de ρ, on a donc :

$$\|\beta(u)\|^2 = \langle \rho(u), u\rangle = \sum_{i=1,\dots,n} b_i y_i^2,$$

et cette quantité est comprise entre $b_1 \sum_{i=1,\dots,n} y_i^2$ et $b_r \sum_{i=1,\dots,n} y_i^2$. On en obtient :

$$b_1 \|u\|^2 \le \|\beta(u)\|^2 \le b_r \|u\|^2.$$

Remarque : la seconde question du point (4) a été omise du sujet d'examen.

E-mail address: daniele.faenzi@univ-pau.fr

Université de Pau et des Pays de l'Adour, L.M.A., I.P.R.A. Avenue de l'université BP 1155, 64013 PAU Cedex, Téléphone : +33(0)05 40 17 51 78, Télécopie : +33(0)5 59 40 70 01 http://www.univ-pau.fr/~faenzi