Université de Pau et des Pays de l'Adour

Département de Mathématiques

ALGÈBRE IV Année 2007-2008

Examen du 20-05-2008, Temps disponible : 2 heures.

(Documents interdits)

Exercice 1. Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré 2 à coefficients complexes. Étant donné $p \in E$, on considère les scalaires $p(0)$, $p'(0)$, et $p''(0)$. On définit la fonction :

$$q : E \to \mathbb{C}, \qquad q(p) = p''(0)p'(0) + p''(0)p(0) + p'(0)p(0).$$

a) Démontrer que q est une forme quadratique sur E et trouver la matrice dans une base B de la forme bilinéaire f_q associée à q.

b) Calculer le rang de f_q. Quel est l'espace $E^\perp$?

c) Trouver :
- deux polynômes $p_1, p_2 \in E$ tels que $f_q(p_1, p_2) \neq 0$;
- un polynôme $p \in E$ tel que $q(p) \neq 0$;
- une base de T de vecteurs isotropes pour q.

d) Trouver une base de E orthogonale pour q.

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit q_λ la fonction $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$q_\lambda(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1x_3 + (\lambda - \frac{1}{8})x_2^2 + \lambda(x_1 - x_3)^2.$$

a) Démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction q_λ est une forme quadratique.

b) Dire pour quelles valeurs de λ la forme q_λ est dégénérée.

c) Déterminer la signature de q_λ en fonction de λ.

d) Étant donnée une valeur de λ telle que q_λ ait signature $(1, 2)$, déterminer des sous-espaces F_+ et F_- de $\mathbb{R}^3$, avec $\dim(F_+) = 1$, $\dim(F_-) = 2$, tels que $(q_\lambda)_{|F_+}$ est définie positive et $(q_\lambda)_{|F_-}$ est définie négative.

Exercice 3. Soit M la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) de la forme quadratique g de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$g(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4) = 5x_1^2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 2x_2x_4 + 5x_3^2 + 5x_4^2.$$

On remarque que $\det(M) = 576$, donc M est de rang 4.

a) Calculer le rang de $M - 4I_4$.

b) Trouver les valeurs propres de M.

c) Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ de vecteurs propres de M.

d) Dire si g est équivalente à la forme quadratique associée au produit scalaire standard.

Corrigé 1. Posons $P = a_2x^2 + a_1x + a_0$, et fixons la base $B = (1, x, x^2)$. Alors $P(0) = a_0$, $P'(0) = a_1$, $P''(0) = 2a_2$.

a) On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que $(a_0, a_1, a_2)M(a_0, a_1, a_2)^t = q(P)$, donc q est une forme quadratique et sa matrice dans la base B est M.

b) On calcule $\det(M) = 1$, donc $\mathrm{rg}(q) = 3$, ce qui entraîne $E^\perp = 0$.

c) La forme f_q a comme matrice M dans la base B.
  - Prenons $p_1 = x$, $p_2 = x^2$, de coordonnées respectivement $(0, 1, 0)^t$ et $(0, 0, 1)^t$. On vérifie $(0, 1, 0)M(0, 0, 1)^t = 1$ donc $f_q(p_1, p_2) = 1$.
  - Il suffit de choisir $p = x + x^2$.
  - On peut choisir B comme base de vecteurs isotropes.

d) On prend $e_1 = p$ car $q(e_1) \neq 0$. De plus P est orthogonal à e_1 ssi :

$$3/2a_0 + a_1 + a_2 = 0.$$

On peut choisir $e_2 = t - t^2$. Maintenant P est orthogonal à e_1 et e_2 ssi :

$$\begin{cases} 3/2a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ -1/2a_0 - 1/2a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$$

On peut donc choisir $e_3 = -6 + 8t + t^2$.

Corrigé 2. Nous allons utiliser la méthode de Gauss. On sait que :

$$x_1x_3 = 1/4(x_1 + x_3)^2 - 1/4(x_1 - x_3)^2.$$

On calcule donc :

$$q_\lambda(x_1, x_2, x_3) = (-1/4 + \lambda)^2(x_1 - x_3)^2 + 1/4(x_1 + x_3)^2 + (\lambda - 1/8)x_2^2,$$

qui est une décomposition en carrés de formes linéaires indépendantes.

a) L'application q_λ est donnée en coordonnées comme un polynôme homogène de degré 2, c'est donc une forme quadratique.

b) Depuis la forme trouvée avec Gauss, le rang est 3 pour $\lambda \neq 1/8, 1/4$ et $\mathrm{rg}(q_{1/8}) = \mathrm{rg}(q_{1/4}) = 2$.

c) En vue de la forme donnée par Gauss, la signature est :

$$\begin{cases} (1,2) & \text{si } \lambda < 1/8, \\ (2,1) & \text{si } 1/8 < \lambda < 1/4, \\ (3,0) & \text{si } \lambda > 1/4. \end{cases}$$

d) Soit $\lambda < 1/8$. Alors $F_- = \{x_1 + x_3 = 0\}$ et $F_+ = x_2 = x_1 - x_3 = 0$.

Corrigé 3. Écrivons M.

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Écrivons la matrice en question.

$$M - 4I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que $\mathrm{rg}(M - 4I_4) = 2$, parce que la troisième ligne est égale à la première, et la quatrième est $-$ la seconde, et la première et la seconde sont libres.

b) Nous savons que 2 valeurs propres sont égales à 4. Par trace et déterminant on obtient les valeurs des autres valeurs propres λ, μ :

$$\begin{cases} \lambda\mu = 576/16 = 36, \\ \lambda + \mu = 20 - 8 = 12, \end{cases}$$

ce qui implique facilement :

$$\lambda = \mu = 6.$$

c) On calcule aisément :

$$\ker(M - 4I_4) = \text{vect}\left((1,0,1,0)^{\text{t}}, (0,1,0,-1)^{\text{t}}\right).$$

Ces deux vecteurs sont déjà orthogonaux donc il suffit de les normaliser. De même on calcule :

$$\ker(M - 6I_4) = \text{vect}\left((-1,0,1,0)^{\text{t}}, (0,-1,0,-1)^{\text{t}}\right).$$

Ces 4 vecteurs sont clairement orthogonaux, donc il suffit de les normaliser pour obtenir la base cherchée :

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^{\text{t}}, \\ u_2 &= \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\text{t}}, \\ u_3 &= \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^{\text{t}}, \\ u_4 &= \left(0, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\text{t}}. \end{aligned}$$

d) Les valeurs propres de M sont positives donc dans notre base orthonormée la matrice de M est diagonale avec termes positif sur la diagonale. Ceci implique que la signature de q est $(4,0)$ donc q est équivalente au produit scalaire standard.